УДК 539.3:534.6

д-р физ.-мат. наук Григоренко А.Я.,
канд. физ.-мат. наук,Ефимова Т.Л.,
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев,
канд. физ.-мат. наук Соколова Л.В.,
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Рассматривается задача о свободных колебаниях незамкнутых круговых цилиндрических оболочек переменной в круговом направлении толщины в рамках уточненной теории Тимошенко-Миндлина. Для решения поставленной задачи используется метод сплайн-аппроксимации совместно с методом дискретной ортогонализации. Представлены результаты расчета динамических характеристик свободных колебаний оболочек.

Ключевые слова: *цилиндрические оболочки, переменная толщина, уточненная теория, метод сплайн-коллокации, метод дискретной ортогонализации*

Важными составляющими элементами конструкций, которые широко используются в строительстве и других областях современной техники, являются оболочки различной геометрии, в том числе и круговые цилиндрические оболочки переменной толщины.

Геометрия оболочки оказывает существенное влияние на ее динамические характеристики, поэтому изучение свободных колебаний незамкнутых цилиндрических оболочек переменной в круговом направлении толщины является важной научно-технической задачей. Исследования, посвященные данной проблеме единичны из-за сложностей вычислительного характера [1], поэтому большое значение имеет разработка новых и развитие существующих методов решения задач данного класса.

В данном сообщении представлены результаты расчета динамических характеристик незамкнутых круговых изотропных цилиндрических оболочек переменной толщины в круговом направлении. Для решения поставленной задачи развивается эффективная численно-аналитическая методика, основанная на сведении двумерной краевой задачи к одномерной методом сплайн-аппроксимации и решением полученной одномерной задачи на собственные значения устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в совокупности с методом пошагового поиска [2,3].

1. Постановка задачи. Для вывода уравнений, описывающих свободные колебания рассматриваемых оболочек, отнесем срединную поверхность оболочки к ортогональной криволинейной системе координат z, θ, а всю оболочку к системе координат z, θ, γ (γ – координата в направлении нормали к срединной поверхности). Толщина оболочки h отсчитывается от срединной поверхности в направлении координаты γ и является переменной величиной $h = h(z,\theta)$. В рамках уточненной теории Тимошенко-Миндлина малые перемещения точек оболочки выражаются через компоненты перемещения срединной поверхности следующим образом:

$$u_r(r,\theta,z) = w(\theta,z); \quad u_\theta(r,\theta,z) = v(\theta,z) + \gamma\Psi_\theta(\theta,z);$$
$$u_z(r,\theta,z) = u(\theta,z) + \gamma\Psi_z(\theta,z), \tag{1}$$

где $u(z,\theta)$, $v(z,\theta)$, $w(z,\theta)$ – перемещения срединной поверхности; $\Psi_z(z,\theta)$, $\Psi_\theta(z,\theta)$ – функции, характеризующие полный поворот нормали.

Используя соответствующие геометрические соотношения и соотношения упругости для изотропной оболочки [2,3], получаем разрешающую систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций $u(z,\theta)$, $v(z,\theta)$, $w(z,\theta)$, $\Psi_z(z,\theta)$, $\Psi_\theta(z,\theta)$ и их производных, которую можно записать в виде:

$$L_i\left(u,\frac{\partial u}{\partial\theta},\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial^2 u}{\partial^2\theta},\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z},\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial z},v,\frac{\partial v}{\partial\theta},\frac{\partial v}{\partial z},\frac{\partial^2 v}{\partial^2\theta},\frac{\partial^2 v}{\partial^2 z},\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial z},\right.$$
$$w,\frac{\partial w}{\partial\theta},\frac{\partial w}{\partial z},\frac{\partial^2 w}{\partial^2\theta},\frac{\partial^2 w}{\partial^2 z},\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial z},\Psi_\theta,\frac{\partial\Psi_\theta}{\partial\theta},\frac{\partial\Psi_\theta}{\partial z},\frac{\partial^2\Psi_\theta}{\partial^2\theta},\frac{\partial^2\Psi_\theta}{\partial^2 z}, \tag{2}$$
$$\left.\frac{\partial^2\Psi_\theta}{\partial\theta\partial z},\Psi_z,\frac{\partial\Psi_z}{\partial\theta},\frac{\partial\Psi_z}{\partial z},\frac{\partial^2\Psi_z}{\partial^2\theta},\frac{\partial^2\Psi_z}{\partial^2 z},\frac{\partial^2\Psi_z}{\partial\theta\partial z},\omega^2\right)=0,$$

где $L_i\left(i=\overline{1,5}\right)$ – линейные операторы. Добавляя граничные условия на контурах оболочки, получаем двумерную краевую задачу.

2. Методика решения. Для решения поставленной задачи развивается эффективная численно-аналитическая методика, основанная на сведении двумерной краевой задачи к одномерной методом сплайн-коллокации и последующим ее решением методом дискретной ортогонализации с применением метода пошагового поиска.

Решение системы (2) будем искать в следующем виде:

$$u(z;\theta) = \sum_{i=0}^{N} u_i(\theta)\varphi_{1i}(z);\ v(z;\theta) = \sum_{i=0}^{N} v_i(\theta)\varphi_{2i}(z),;\ w(z;\theta) = \sum_{i=0}^{N} w_i(\theta)\varphi_{3i}(z);$$
$$\Psi_z(z;\theta) = \sum_{i=0}^{N}\Psi_{zi}(\theta)\varphi_{4i}(z);\ \Psi_\theta(z;\theta) = \sum_{i=0}^{N}\Psi_{\theta i}(\theta)\varphi_{5i}(z), \tag{3}$$

где $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$, $w_i(\theta)$, $\psi_{\theta i}(\theta)$, $\psi_{zi}(\theta)$ – искомые функции переменной θ, $\varphi_{ji}(z)$ $\left(j=\overline{1,5}; i=\overline{0,N}\right)$ – линейные комбинации B-сплайнов третьей степени на равномерной сетке Δ: $0 = z_0 < z_1 < \ldots < z_N = L$ с учетом граничных условий при $z = 0$ и $z = L$.

Систему дифференциальных уравнений (6) можно привести к виду

$$\bar{Y}' = A(\theta, \omega)\bar{Y}, \tag{4}$$

где $\bar{Y} = \{\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{\psi}_z, \bar{\psi}'_z, \bar{\psi}_\theta, \bar{\psi}'_\theta\}^T$, $A(\omega, \theta)$ – квадратная матрица порядка $10(N+1)\times 10(N+1)$. Граничные условия запишутся в виде

$$B_1\bar{Y}(0) = \bar{0};\ B_2\bar{Y}(\pi) = \bar{0}, \tag{5}$$

где B_1 и B_2 – прямоугольные матрицы порядка $5(N+1)\times 10(N+1)$.

Краевая задача (4) – (5) на собственные значения решалась методом дискретной ортогонализации совместно с методом пошагового поиска.

3. Анализ результатов. Для проведения расчетов рассматривалась незамкнутая цилиндрическая оболочка с такими параметрами: длиной L = 20, радиусом R =10, при $0 \le \theta \le \pi$, коэффициент Пуассона ν = 0.3. Толщина оболочки является переменной в круговом направлении и изменяется согласно закону $H(\theta) = H_0(1 + \alpha\cos 2\theta)$, $H_0 = 2$. В данном случае важно, что **масса оболочки сохраняется**.

В таблице 1 представлены значения обезразмеренного частотного параметра $\Omega_m = \omega_m H_0\sqrt{\rho / G_0}$ при шарнирном опирании торцов: при $z = 0$, $z = L: \dfrac{\partial u}{\partial z} = v = w = \dfrac{\partial \Psi_z}{\partial z} = \Psi_\theta = 0$ и при $\theta = 0$, $\theta = \pi : u = \dfrac{\partial v}{\partial \theta} = w = \Psi_z = \dfrac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} = 0$. Расчеты проводились при N=18, N – число точек коллокации.

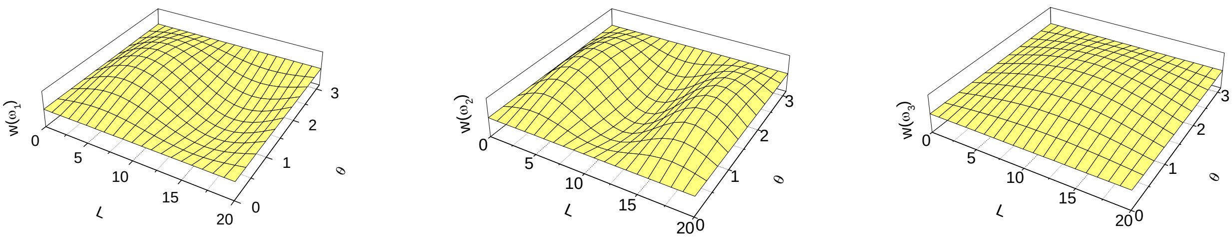
Таблица 1

Частоты свободных колебаний изотропных оболочек переменной толщины

Ω	α = -0.3	α = -0.2	α = -0.1	α = 0	α = 0.1	α = 0.2	α = 0.3
Ω_1	0.0701	0.0705	0.0706	0.0707	0.0707	0.0706	0.0701
Ω_2	0.0905	0.0912	0.0927	0.0939	0.0932	0.0925	0.0918
Ω_3	0.0955	0.0961	0.0974	0.0987	0.0998	0.1027	0.1044
Ω_4	0.0961	0.0973	0.0985	0.1000	0.1048	0.1102	0.1159

Анализ таблицы показывает, что первая частота колебаний оболочек переменной толщины практически не отличается от частоты колебаний оболочки постоянной толщины (α=0), что объясняется сохранением массы оболочки. Однако при увеличении номера частоты влияние переменной толщины на спектр частот свободных колебаний становится более существенным и составляет от 3% до 15%.

На рис.1 представлены формы колебаний оболочки переменной толщины при α=0.2. При данном законе изменения толщины оболочки не наблюдается значительного отличия от форм колебаний оболочки постоянной толщины.



а *б* *с*

Рис. 1. Формы свободных колебаний оболочек переменной толщины

Библиографические ссылки

1. ***Qatu M. S.*** Recent research advances in the dynamic behavior of shells: 1989-2000, Part 2: Homogeneous shells / M. S. Qatu // Appl. Mech. Rev. – 2002. – Vol. 55. – P. 415-434.

2. ***Григоренко Я.М.*** Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Я.М. Григоренко, Г.Г. Влайков, А.Я. Григоренко.-К.: Академпериодика, 2006. – 472 с.

3. ***Григоренко А.Я.*** Об одном подходе к исследованию свободных колебаний цилиндрических оболочек переменой в круговом направлении толщины в уточненной постановке / А.Я. Григоренко, Т.Л. Ефимова, Л.В. Соколова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – Т. 52, № 3. – С. 103–115.

Анотація

Розглядається задача про вільні коливання незамкнених кругових циліндричних оболонок змінної в круговому напрямку товщини в рамках уточненої теорії Тимошенко-Міндліна. Для розв’язання поставленої задачі застосовується метод сплайн-апроксимації в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації. Представлено результати розрахунку динамічних характеристик вільних коливань оболонок.

Ключові слова: *циліндричні оболонки, змінна товщина, уточнена теорія, метод сплайн-колокації, метод дискретної ортогоналізації.*

Abstract

Investigation of the vibrations of open cylindrical shells with circumferentially varying thickness based on the Mindlin shell theory are presented. The approach based on spline-approximation method and the method of discrete orthogonalization has been proposed. The calculations are presented.

Key words: *cylindrical shells, variable thickness, refined theory, spline-collocation method, discrete orthogonalization method.*