УДК 539.3

Ю.В. Ворона, канд. техн. наук
О.В. Геращенко, канд. техн. наук

МЕТОДИКА ЧИСЕЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ МАСИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З ТРІЩИНАМИ

Розглядається чисельна методика дослідження гармонічних коливань пружних масивних елементів конструкцій з тріщинами. Проведена регулярізація і вказано спосіб обчислення гіперсингулярного граничного інтегралу, який входить до складу інтегрального представлення для напружень. Розв'язана тестова задача про динамічне навантаження пружного простору, послабленого круговою тріщиною.

В задачах про деформування масивних елементів конструкцій, послаблених тріщинами, місця концентрації напружень локалізовані і відомі заздалегідь. Цей факт зумовлює привабливість ідеї про застосування для дослідження таких об'єктів методу потенціалу. В той же час відомо [1], що системи граничних інтегральних рівнянь (ГІР), отримані на основі формули Соміліани для переміщень, в задачах про НДС масивів з тріщинами дуже часто є виродженими. Тому в таких випадках перевага надається алгоритмам, що базуються на інтегральних представленнях для напружень в граничних точках розрахункової області. Недоліком таких систем є висока сингулярність інтегральних рівнянь, що значно ускладнює процедуру чисельного розв'язання задачі. В задачах статики для обчислення гіперсингулярних інтегралів традиційно застосовують два прийоми регулярізації. Перший з них базується на перетворенні підінтегрального виразу із застосуванням теореми Стокса [2], [3], в результаті чого знижується порядок особливості ядра, а невідомі функції граничних переміщень замінюються на похідні за дотичними до поверхні тіла напрямками. Другий підхід використовує виключення постійної складової у виразі функції щільності за допомогою переміщення тіла як жорсткого цілого, після чого потреба в обчисленні гіперсингулярної частини відповідного інтегралу зникає. Нажаль, константа не є розв'язком системи диференціальних рівнянь, яка відповідає коливанням пружного масиву, тому в задачах динаміки цей прийом використати не можливо. В той же час застосування теореми Стокса в таких задачах приводить до надто складних інтегро-диференціальних рівнянь, невідомими в яких є як переміщення, так і їх дотичні похідні.

В роботі [4] використана наступна процедура отримання гіперсингулярного ГІР для задачі про гармонійні коливання пружного тіла. Замість вихідної розрахункової області Ω з границею Г розглядаємо допоміжну область Ω_0, яку отримуємо із заданої за допомогою виключення з останньої малого околу полюсу $x_0 \in \Gamma$ (рис. 1). При цьому вважаємо, що т.x_0 лежить на гладкій частині Г, а Γ_s – частина сфери радіусу ε з центром в x_0.

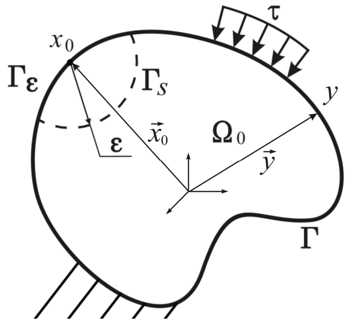

Рис.1. Утворення допоміжної області Ω_0

По відношенню до області Ω_0 точка x_0 є зовнішньою, тому формула Соміліани для напружень набуває вигляду [5]

$$\int\limits_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y})d\Gamma_y - \int\limits_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y})d\Gamma_y = 0, \ \vec{x}_0,\vec{y} \in \Gamma, \tag{1}$$

де через $u_k(\vec{y})$ і $\tau_k(\vec{y})$) позначені компоненти векторів переміщень та напружень; вирази для ядер $D_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y})$ і $S_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y})$ наведені в [4].

Зауважимо, що яким би малим не був радіус ε, полюс x_0 завжди лежить поза Ω_0 і тому при граничному переході справедливість тотожності (1) не порушується:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ \int\limits_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y})d\Gamma_y - \int\limits_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y})d\Gamma_y \right\} = 0. \tag{2}$$

Будемо вважати, що переміщення $u_j(y)$ поблизу точки x_0 можна представити у вигляді

$$u_j(\vec{y}) = u_j(\vec{x}_0) + \frac{\partial u_j(\vec{x}_0)}{\partial x_m}(y_m - x_{0m}) + O(r^{1+\alpha}). \tag{3}$$

В свою чергу

$$\frac{\partial u_j(\vec{y})}{\partial y_m} = \frac{\partial u_j(\vec{x}_0)}{\partial x_m} + O(r^{\alpha}), \tag{4}$$

$$\sigma_{ij}(\vec{y}) = \sigma_{ij}(\vec{x}_0) + O(r^{\alpha}), \tag{5}$$

де r – відстань між точками $\vec{x}_0$ і $\vec{y}$.

Оскільки при $\varepsilon \to 0$ поверхню Γ_s можна вважати півсферою, то після інтегрування по Γ_s вираз (2) набуде наступного вигляду [4,6]:

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\vec{x}_0) = \fint_{\Gamma} \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y}) d\Gamma_y - \fint\!\!\!\!=_{\Gamma} u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y}) d\Gamma_y . \tag{6}$$

Тут використані позначення

$$\fint_{\Gamma} \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y}) d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y}) d\Gamma_y \right\}; \tag{7}$$

$$\fint\!\!\!\!=_{\Gamma} u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y}) d\Gamma_y =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y}) d\Gamma_y + u_l(\vec{x}_0) \int_{\Gamma_s} S_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y}) d\Gamma_y \right\}, \tag{8}$$

тобто $\fint_{\Gamma} \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y}) d\Gamma_y$ - це головне за Коші значення невласного інтегралу $\int_{\Gamma} \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y}) d\Gamma_y$, тоді як $\fint\!\!\!\!=_{\Gamma} u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y}) d\Gamma_y$ - це скінченна за Адамаром [7] частина невласного інтегралу $\int_{\Gamma} u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y}) d\Gamma_y$. За такого тлумачення невласні інтеграли можуть бути визначені чисельно після гранично-елементної дискретизації поверхні розрахункової області.

Співвідношення (6) є гіперсингулярним ГІР, розв’язок якого дозволяє визначити незадані граничні умови і перейти до аналізу НДС пружного тіла.

Розглянемо задачу про коливання пружного простору, послабленого плоскою тріщиною. Гармонічне нормальне навантаження симетрично прикладене до берегів тріщини. Вісь x_3 декартової системи координат спрямуємо вздовж нормалі до площини, в якій розташована тріщина. Симетрична половина розрахункової області показана на рисунку 2.

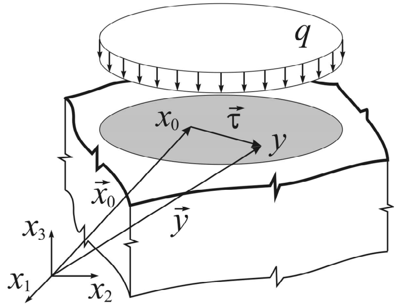

Рис.2. Простір з тріщиною нормального відриву

В силу симетрії ГІР (6) набуває наступного вигляду:

$$\sigma_{33}(\vec{x}_0) = -\oint_{\Gamma} \Delta u_3(\vec{y}) S_{333}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y \quad , \tag{9}$$

де Δu_3 - різниця між вертикальними переміщеннями берегів тріщини; Г - поверхня одного з берегів тріщини.

Крім того, оскільки точки $\vec{x}_0, \vec{y}$ лежать в одній площині, ядро $S_{333}(\vec{x}_0, \vec{y})$ визначається таким чином:

$$S_{333} = -\frac{\mu}{4\pi r^3}\Big\{4\exp(z_2)\left[z_2 - 4 + 9z_2^{-1} - 9z_2^{-2}\right] - 4\exp(z_1)[z_1^2 - z_1 + 1] + \\ + 4\beta\ \exp(z_1)\left[z_1^2 - 2z_1 + 5 - 9z_1^{-1} + 9z_1^{-2}\right] + \beta^{-1}\exp(z_1) z_1^2\Big\}, \tag{10}$$

де $z_k(r) = \dfrac{i\omega r}{C_k}$, $k = 1,2$; $\beta = \dfrac{\mu}{\lambda + 2\mu}$; $r = \sqrt{(x_k - y_k)(x_k - y_k)}$; ω - частота коливань; λ і μ - константи Ляме; C_1 та C_2 –швидкості розповсюдження хвиль розширення та викривлення відповідно; $C_1^2 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}$; $C_2^2 = \dfrac{\mu}{\rho}$;

ρ - густина пружного середовища.

Коефіцієнти алгебраїчного аналога системи ГІР обчислюються за формулою

$$a_{kj} = \int_{\Delta\Gamma_j} \varphi_j S_{333}(\vec{x}_k, \vec{y}) d\Gamma_y \, , \tag{11}$$

де φ_j - функція форми для переміщення вузла $\vec{x}_j$; $\Delta\Gamma_j$ - граничний елемент (ГЕ), на якому розташований *j*-й вузол.

Якщо полюс $\vec{x}_k$ не лежить на тому ж граничному елементу, по якому здійснюється інтегрування, то визначення a_{kj} за допомогою (11) не викликає утруднень. В протилежному випадку знаходження a_{kj} зводиться при кусочно-квадратичній апроксимації невідомих до обчислення інтегралів

$$\fint_{\Delta\Gamma_j} S_{333}(\vec{x}_k,\vec{y})d\Gamma_y\,,\quad \fint_{\Delta\Gamma_j} r,_l\, rS_{333}(\vec{x}_k,\vec{y})d\Gamma_y\,,\quad \fint_{\Delta\Gamma_j} r,_l\, r,_m\, r^2 S_{333}(\vec{x}_k,\vec{y})d\Gamma_y\,. \quad (12)$$

В полярній системі координат, пов’язаній з полюсом $\vec{x}_k$, інтеграли (12) можуть бути визначені наступним чином:

$$\fint_{\Delta\Gamma_j} S_{333}(\vec{x}_k,\vec{y})d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{t(\theta)} S_{333}(r)\,rdrd\theta + \int_{\Gamma_s} S_{333}(\varepsilon)d\Gamma_y\right\}, \quad (13)$$

$$\fint_{\Delta\Gamma_j} r,_l\, rS_{333}(\vec{x}_k,\vec{y})d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{t(\theta)} S_{333}(r)\,r^2dr\cos(\theta)d\theta\right\}, \quad (14)$$

$$\fint_{\Delta\Gamma_j} r,_l\, r,_m\, r^2 S_{333}(\vec{x}_k,\vec{y})d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{t(\theta)} S_{333}(r)\,r^3dr\cos^2(\theta)d\theta\right\}, \quad (15)$$

де $t(\theta)$ – відстань від полюса $\vec{x}_k$ до точки, що лежить на контурі і визначається кутом θ.

Внутрішні інтеграли по r можна взяти аналітично:

$$F_0(r) = \int S_{333}(r)rdr = \frac{\mu}{\pi r}\Big\{\exp(z_2)\left[3z_2^{-1} - 3z_2^{-2} - 1\right] + \exp(z_1)\left[z_1 - 1\right] -$$

$$-\beta\,\exp(z_1)\left[z_1 - 2 + 3z_1^{-1} - 3z_1^{-2}\right] - 0.25\beta^{-1}\exp(z_1)z_1\Big\}, \quad (16)$$

$$F_1(r) = \int S_{333}(r)r^2dr = \frac{\mu}{2\pi}\Big\{\exp(z_2)\left[9z_2^{-1} - 9z_2^{-2} - 1\right] - Ei(z_2) +$$

$$+\exp(z_1)\left[z_1(2 - 0.5\beta^{-1}) - 4 + 0.5\beta^{-1}\right] -$$

$$-\beta\,\exp(z_1)\left[2z_1 - 6 + 9z_1^{-1} - 3z_1^{-2}\right] + (2-\beta)\,Ei(z_1)\Big\}, \quad (17)$$

де

$$Ei(x)=\int\frac{\exp(x)}{x}dx\,,$$

$$F_2(r)=\int S_{333}(r)r^3dr=\frac{\mu r}{\pi}\Big\{\exp(z_2)z_2^{-1}\left[5-9z_2^{-1}-z_2\right]+$$

$$+\exp(z_1)z_1^{-1}[z_1^{-2}-3z_1+4]-\beta\ \exp(z_1)z_1^{-1}\left[z_1^2-4z_1+9-9z_1^{-1}\right]-$$

$$-0.25\beta^{-1}\exp(z_1)z_1^{-1}(z_1^{-2}-2z_1+2)\Big\}\ . \qquad (18)$$

З урахуванням (16) вираз (13) може бути переписаний наступним чином:

$$\oint\limits_{\Delta\Gamma_j}S_{333}(\vec{x}_k,\vec{y})d\Gamma_y=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_0^{2\pi}F_0[t(\theta)]d\theta-2\pi F_0(\varepsilon)+\int\limits_{\Gamma_s}S_{333}(\varepsilon)d\Gamma_y\right\}, \qquad (19)$$

При малих значеннях аргументу за допомогою заміни експоненти початковим відрізком степеневого ряду виразу (16) можна надати такого вигляду:

$$F_0(\varepsilon)=\frac{\mu}{\pi\,\varepsilon}\left[1-\beta+z_1\beta-z_2-z_1\beta^{-1}\right]+O(\varepsilon)\ . \qquad (20)$$

В свою чергу вираз для інтегралу по півсфері, наведений в [4], при прямуючому до нуля радіусі запишеться так:

$$\int\limits_{\Gamma_s}S_{333}(\varepsilon)d\Gamma_y=\frac{2\mu}{\varepsilon}\left(1-\beta+z_1\beta-z_2\right)+O(\varepsilon)\ . \qquad (21)$$

Підставимо (19), (20) до (21) і в результаті граничного переходу отримаємо:

$$\oint\limits_{\Delta\Gamma_j}S_{333}(\vec{x}_k,\vec{y})d\Gamma_y=\int\limits_0^{2\pi}F_0[t(\theta)]d\theta+2\mu\frac{i\omega}{C_1}\beta^{-1}. \qquad (22)$$

Отже, визначення скінченної за Адамаром частини невласного інтегралу по плоскому фрагменту поверхні зводиться до обчислення регулярного контурного інтегралу.

Далі, з урахуванням (17) перетворимо вираз (14):

$$\fint_{\Delta\Gamma_j} r_{,1} r S_{333}(\vec{x}_k, \vec{y}) d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_0^{2\pi} F_1[t(\theta)] \cos(\theta) d\theta - F_1(\varepsilon) \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} F_1[t(\theta)] \cos(\theta) d\theta \ . \qquad (23)$$

Таким чином, головне за Коші значення невласного інтегралу по плоскому фрагменту поверхні також виражається через регулярний контурний інтеграл.

Нарешті, за допомогою (18) перетворимо (15):

$$\fint_{\Delta\Gamma_j} r_{,1} r_{,1} r^2 S_{333}(\vec{x}_k, \vec{y}) d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_0^{2\pi} F_2[t(\theta)] \cos^2(\theta) d\theta - F_2(\varepsilon) \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} F_2[t(\theta)] \cos^2(\theta) d\theta - \pi F_2(0) \ , \qquad (24)$$

де

$$F_2(0) = \frac{i\mu C_1}{2\omega}[8\beta - 8 + \beta^{-2}] \ . \qquad (25)$$

Отже, обчислення такого невласного інтегралу також не викликає труднощів.

Співвідношення (11)-(25) складають алгоритмічну основу розв’язання за методом граничних елементів задачі про динамічне деформування лінійно-пружного масиву з тріщиною. В результаті розрахунку отримуємо переміщення у вузлах на поверхні тріщини. Аналізуючи величини переміщень у точках, наближених до фронту тріщини, визначаємо динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН).

Як приклад розглянемо задачу про усталені гармонічні коливання пружного простору, послабленого круговою тріщиною, до берегів якої прикладене рівномірно розподілене навантаження. Графіки залежності нормованого КІН від безрозмірного параметру частоти коливань при різних значеннях коефіцієнту Пуассона ν наведені на рисунках 3, 4, 5. Суцільна лінія відповідає значенням, взятим з довідкової літератури [8]. Штриховою лінією з’єднані точки, отримані за допомогою розробленого чисельного апарату на досить розрідженій сітці граничних елементів (4 елементи вздовж радіусу тріщини). Штрих-пунктирна лінія побудована за результатами, знайденими на більш густій сітці (8 елементів вздовж радіусу).

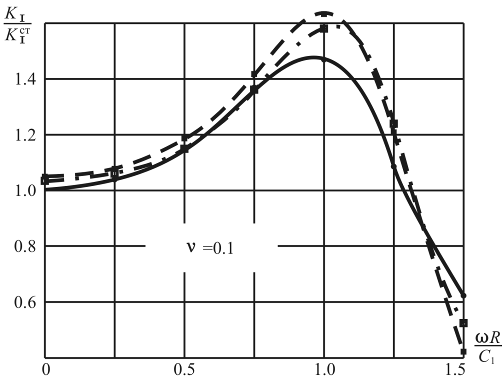

Рис. 3

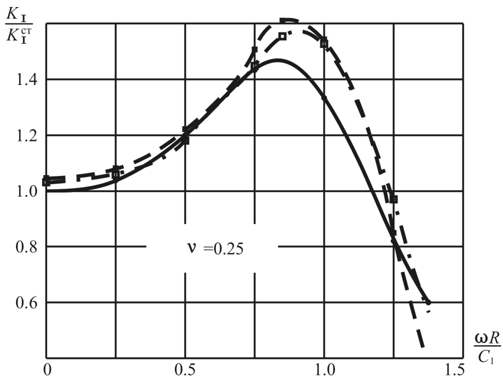

Рис. 4

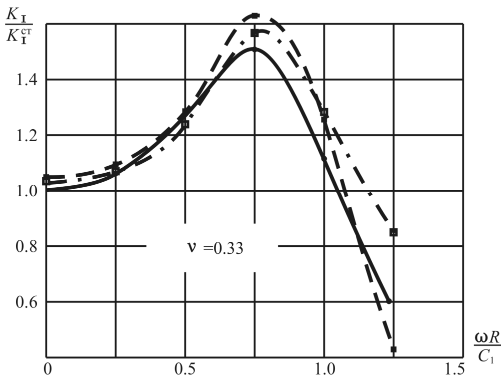

Рис. 5

Наведені результати наочно свідчать про задовільну узгодженість розрахункових та довідкових даних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Cruse T.A.* Recent advances in boundary element analysis methods // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 62 (1987), pp. 227-244
2. *Хуторянский Н.М.* Граничные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения второго рода для основной смешанной задачи теории упругости // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1981. – С.3–13
3. *Sladek V., Sladek J.* Regularization of hypersingular integrals in BEM formulations using various kinds of continuous elements // Engineering Analysis with Boundary Elements, 17 (1996), pp. 5-18
4. *Ворона Ю.В, Геращенко О.В.* Методика розв'язання задачі про гармонічні коливання масивів з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2007. – Вип. 81.– С.119–134
5. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. – М.: Ф-М, 1963. – 280 с.
6. *Guiggiani M,. Krishnasamy G., Rudolphi T.J., Rizzo F.J.* A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations, ASME J.of Applied Mechanics, 59 (1992), pp. 604-614
7. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М: Наука, 1978. – 352 с.
8. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах. Т.2: Пер. с англ./Под ред. Ю.Мураками. – М: Мир, 1990. – 1016 с.

Отримано 21.05.09

Рассматривается численная методика исследования гармоничных колебаний упругих масивных элементов конструкций с трещинами. Проведена регуляризация и указан способ вычисления гиперсингулярного граничного интеграла, который входит в состав интегрального представления для напряжений. Решена тестовая задача о динамическом нагружении упруго пространства, ослабленного круговой трещиной.

The numerical technique for analysis of harmonic vibration of three-dimensional elastic solids with cracks is described. The method is proposed for regularization and evaluation of hypersingular boundary integrals that occur in traction boundary integral equations. An example of elastic medium with penny-shaped crack stress analysis is presented to illustrate the technique.