

УДК 539.3

Іванченко Г.М., канд. техн. наук

ПЕРЕБУДОВА ПЛОСКОГО ФРОНТУ АКУСТИЧНОЇ ХВИЛІ КРИВОЛІНІЙНИМИ ПОВЕРХНЯМИ АНІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩ

При розповсюдженні нестационарних розривних хвиль в пружних середовищах проявляються ефекти, аналогічні явищу фокусування світлових променів оптичними приладами – лінзами і дзеркалами. Для кількісного опису таких явищ, а також для дослідження їх особливостей можуть бути використані методи геометричної оптики [1-3].

Актуальними є дослідження особливостей розповсюдження нестационарних розривних хвиль в земній корі, породжуваних вибухами, землетрусом, де практичний інтерес представляють питання геометричної побудови рухомих поверхонь розривів перших похідних польових функцій – ударних хвиль або хвиль сильного розриву.

Для постановки і вирішення таких задач в теорії пружності використовуються методи геометричної оптики, зокрема, нульове наближення променевого методу, який забезпечує хороший кількісний опис багатьох хвильових явищ різної фізичної природи [2, 3].

Променевий метод передбачає виділення функції оптичного шляху хвилі, або ейконалу, і побудова за допомогою рівняння ейконалу системи променів і видозмін рухомого фронту ударної хвилі. Ця задача достатньо легко розв'язується для ізотропних середовищ, проте і там виникають деякі ускладнення, пов'язані з дослідженням взаємодії хвилі з поверхнями розділу середовищ, які відрізняються механічними властивостями (пружні відбивачі, лінзи, шаруваті середовища, тощо), внаслідок чого утворюються каустики, де фокусується енергія і значно зростає інтенсивність поля.

При дослідженні закономірностей розповсюдження хвиль сильних розривів у пружних анізотропних середовищах фізична картина динамічних явищ значно ускладнюється, оскільки в цих випадках векторна польова функція для кожного напрямку описує три види хвиль, які відрізняються поляризацією; фазові швидкості хвиль залежать не лише від поляризації хвилі, а і від напрямку її розповсюдження; промені, в загальному випадку, не ортогональні поверхні хвильового фронту, а променеві швидкості відрізняються від фазових швидкостей і між їх напрямками не завжди є однозначна відповідність.

Постановка задачі. Стан динамічної рівноваги пружного середовища

в декартовій системі координат x_1, x_2, x_3 визначається системою трьох диференціальних рівнянь

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

де $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq} / \rho$; $c_{ik,pq}$ – параметри пружності середовища; ρ – густина; u_1, u_2, u_3 – компоненти вектора пружних зсувів, t – час.

Враховуючи те, що в анізотропних середовищах промені в загальному випадку не ортогональні поверхням хвильових фронтів, розрізнятимемо вектори фазової $\mathbf{v}$ і променевої ξ швидкостей, вважаючи, що фронтом хвилі є поверхня постійної фази, де кожен елементарний плоский фрагмент фронту рухається уздовж місцевої одиничної нормалі $\mathbf{n}$ зі швидкістю $\mathbf{v}$.

Фазові швидкості $\mathbf{v}$ хвилі і вектори її поляризації $\mathbf{A}$ для вибраного напрямку $\mathbf{n}$ можна побудувати із однорідної системи рівнянь [2, 4]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

як власні числа і вектори матриці з коефіцієнтів системи.

Ненульові розв'язки системи (2) існують при виконанні умови

$$\left| \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq} \right| = 0, \quad (3)$$

за допомогою якої для кожного напрямку нормалі $\mathbf{n}$ можна визначити і розташувати у послідовності зменшення три швидкості хвиль, які по різному поляризовані.

Надаючи величині v^2 в системі (2) по черзі одне із знайдених значень $v_r^2(\mathbf{n})$ ($r = 1, 2, 3$), можна відшукати компоненти векторів поляризації $\mathbf{A}^{(r)}$ трьох хвиль, які рухаються в даному напрямі $\mathbf{n}$ зі своїми фазовими швидкостями $\mathbf{v}_r(\mathbf{n})$. Поверхня фронту ударної хвилі визначається співвідношенням

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \quad (4)$$

у якому функція τ повинна задовольняти диференціальному рівнянню в часткових похідних першого порядку [2]

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (5)$$

яке узагальнює рівняння ейконалу геометричної оптики для пружних анізотропних хвиль.

Величини p_k ($k = 1, 2, 3$), які входять до рівняння (5), є компонентами вектора рефракції $p_k \equiv \partial \tau / \partial x_k = n_k / v_r(\mathbf{n})$ ($k = 1, 2, 3$).

Хвильовий фронт (4) ударної хвилі в анізотропному середовищі постійної густини будується після знаходження розв'язків рівняння (5), яке методом характеристик приводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} dx_k / d\tau &= \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \\ dp_k / d\tau &= 0, \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (6)$$

У системі (6) перша група рівнянь характеризує розповсюдження хвилі уздовж променя з променевою швидкістю, а друга – показує на прямолінійність променів в анізотропних середовищах постійної густини.

Методика розв'язування. Розглядатимемо два трансверсально-ізотропні середовища в яких осі симетрії пружних параметрів співпадають з віссю Ox_2 декартової системи координат. Завдяки властивостям симетрії відносно осі Ox_2 , компоненти $c_{ik,pq}$ тензора пружних постійних кожного середовища можна подати у формі квадратної матриці [4, 5] з позначеннями λ і μ – параметри Ламе, l, m, p – константи, що відрізняють середовище від ізотропного (параметри анізотропії).

Нехай в середовищі $\bar{I}$ збуджена плоска подовжня ударна хвиля, вектор поляризації якої направлений уздовж осі Ox_2 . Будемо досліджувати дифракцію такої хвилі при її взаємодії з криволінійною вісесиметричною межею G розділу середовищ, вісь симетрії якої також співпадає з Ox_2 . Задача є вісесиметричною, тому досить розглянути явища перебудови і формування слідів ударних хвиль на одній із площин, яка містить вісь симетрії. Приймемо „локально-плоске наближення” [2], відповідно до якого в місці падіння хвилі на елементарну ділянку межі G в площині падіння всі відображені і заломлені хвилі також належатимуть цій площині, тобто треті компоненти всіх векторів поляризації рівні нулю. Це дозволяє застосовувати узагальнений закон Снеллїуса [2, 4, 5]

$$\frac{\sin(\gamma)}{v} = \frac{\sin(\Theta_v^{\bar{I}} - \gamma)}{v_v^{\bar{I}}(\Theta_v^{\bar{I}})} = \frac{\sin(\Theta_\mu^{\bar{II}} + \gamma)}{v_\mu^{\bar{II}}(\Theta_\mu^{\bar{II}})}, \quad v, \mu = 1, 2, \quad (7)$$

де γ – кут нахилу дотичної до поверхні G_1 в точці падіння променя на межу розділу середовищ, $\Theta_v^{\bar{I}}, \Theta_\mu^{\bar{I}}$ – кути між віссю Ox_2 і напрямками векторів фазових швидкостей квазіподовжньої qP і квазіпоперечної qS хвиль, відображених в середовище $\bar{I}$; $\Theta_v^{\bar{II}}, \Theta_\mu^{\bar{II}}$ – аналогічні кути для хвиль, заломлених у середовище $\bar{II}$; $v, v_v^{\bar{I}}, v_\mu^{\bar{II}}$ – величини фазових швидкостей хвиль: падаючої подовжньої, відображених і заломлених (нижній індекс 1 відповідає квазіподовжнім, 2 – квазіпоперечним хвилям).

Для випадків анізотропних середовищ співвідношення (7) закону Снелліуса характеризуються тим, що знаменники і чисельники є функціями відповідних кутів $\Theta_v^{\bar{I}}, \Theta_\mu^{\bar{II}}$ і неявно функціями кута γ . Значення кутів $\Theta_v^{\bar{I}}, \Theta_\mu^{\bar{II}}$ ($v, \mu = 1, 2$) відбиття і заломлення променя в деякій точці межі, визначаються вирішенням системи нелінійних рівнянь (7) методом Ньютона спільно з алгоритмом продовження рішення по параметру [3]. Тут в якості провідного параметра зручно вибрати кут нахилу дотичної γ . Тоді, наприклад, для першого рівняння системи (7) при деяких відомих величинах параметра $\gamma = \gamma^n$ і векторів $v_v = v_v^n$ малому приросту провідного параметра $\Delta\gamma$ відповідатимуть прирости направляючих кутів фазових швидкостей пружних хвиль відображених в середовище $\bar{I}$

$$\Delta\Theta_v^{\bar{I}} = \frac{\cos\gamma \cdot v_v^{\bar{I}}(\Theta_v^{\bar{I}}) + \cos(\Theta_v^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v}{\cos(\Theta_v^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v - \sin(\gamma) \cdot dv_v(\Theta_v^{\bar{I}})/d\Theta_v^{\bar{I}}} \cdot \Delta\gamma + r_v, \quad (8)$$

де $r_v = \sin(\Theta_v^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v - \sin\gamma \cdot v_v^{\bar{I}}(\Theta_v^{\bar{I}})$ – нев'язка на даному кроці побудови розв'язку.

Результати досліджень. В задачі, яка розв'язана, досліджувалось трансформування фронтів розривних хвиль, породжених взаємодією плоскої хвилі з параболічною межею розділу середовищ з параметрами $\rho_1 = 2.650 \times 10^3$ кг/м³, $\lambda_1 = 4.972 \times 10^{10}$ Па, $\mu_1 = 3.906 \times 10^{10}$ Па для першого середовища, та для другого середовища – $\rho_2 = 2.760 \times 10^3$ кг/м³, $\lambda_2 = 1.587 \times 10^9$ Па, $\mu_2 = 1.429 \times 10^{10}$ Па. Для

обох середовищ значення коефіцієнтів анізотропії змінювались. На рис. 1 показана видозміна фронтів падаючої хвилі (1), фронтів відображених від межі розділу середовищ квазіподовжньої (2) і квазіпоперечної (3) хвиль, та відповідно заломлених квазіподовжньої (4) і квазіпоперечної (5) хвиль. Параметри анізотропії, які відрізняють середовища від ізотропних на цих рисунках приймалися $l_1 = -0.3\lambda_1$, $m_1 = -0.2\mu_1$, $p_1 = 0.1(\lambda_1 + 2\mu_1)$ та $l_2 = -0.6\lambda_2$, $m_2 = 0.2\mu_2$, $p_2 = 0.1(\lambda_2 + 2\mu_2)$. Рис. 1, б відрізняється від рис. 1, а зміною положень середовищ.

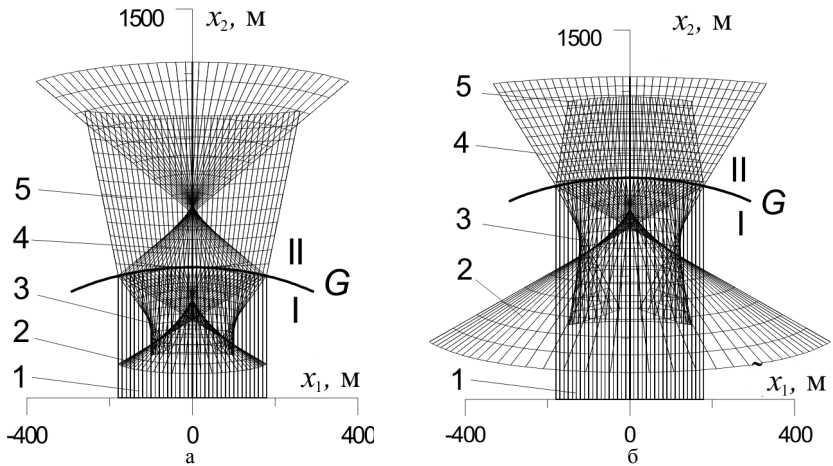


Рис. 1

На рис. 2, а, б показана перебудова фронтів падаючої хвилі (1), відображених від межі розділу середовищ квазіподовжньої (2) і квазіпоперечної (3) хвиль, та заломлених квазіподовжньої (4) і квазіпоперечної (5) хвиль при параметрах анізотропії середовищ $l_1 = -0.5\lambda_1$, $m_1 = -0.3\mu_1$, $p_1 = -0.5(\lambda_1 + 2\mu_1)$ та $l_2 = -0.1\lambda_2$, $m_2 = 0.3\mu_2$, $p_2 = -0.1(\lambda_2 + 2\mu_2)$ при різній послідовності середовищ.

Рисунки. 3, а, б ілюструють трансформацію фронтів відбитих та заломлених хвиль від межі розділу середовищ з параметрами анізотропії $l_1 = 0.1\lambda_1$, $m_1 = 0.2\mu_1$, $p_1 = 0.3(\lambda_1 + 2\mu_1)$ та $l_2 = 0.3\lambda_2$, $m_2 = 0.2\mu_2$, $p_2 = 0.1(\lambda_2 + 2\mu_2)$ при зміні послідовності середовищ.

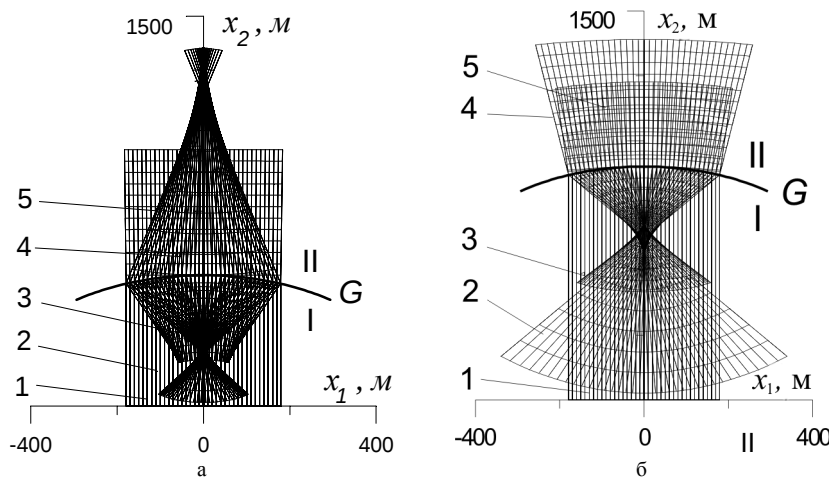


Рис.2

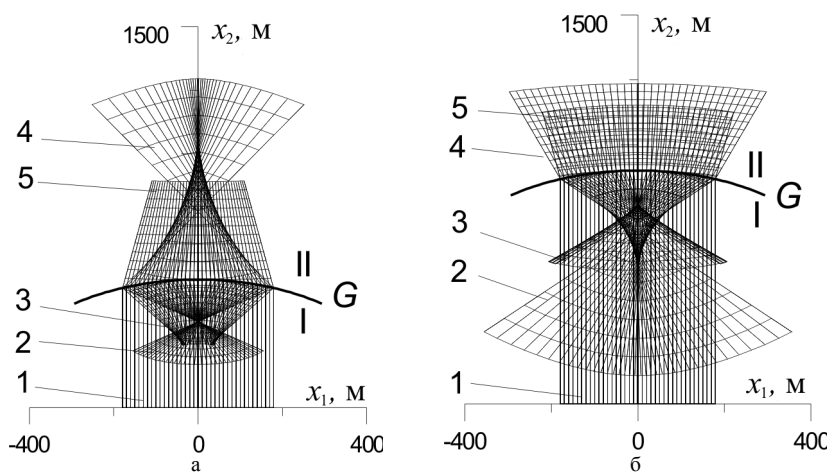


Рис. 3

Приведені результати розрахунку свідчать, що здатність фокусування або розсіювання розривних хвиль межею розділу середовищ залежить не лише від геометрії самої межі та властивостей середовищ, а в значній мірі і від величин параметрів анізотропії середовищ.

1. *Кравцов Ю.А. Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
2. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. –Ленинград: Наука, 1980. – 220 с.
3. *Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К.* Применение лучевых методов в задачах распространения и рассеяния волн. (Обзор) //Прикл. механика. – 1996. – 32, №12. – С.3-27.
4. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Яковенко Е.В.* Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000.– 64, №3.– С. 394–402.
5. *Gulyayev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M.* Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media //International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40. – P. 237-247.

Надійшла до редколегії 21.11.2005 р.