УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук,
О.І. Гуляр, д-р техн. наук,
О.С. Сахаров, д-р техн. наук,
О.О. Шкриль, канд. техн. наук

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ ДЛЯ НАПІВАНАЛІТИЧНОГО ВАРІАНТА ПРИЗМАТИЧНОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА

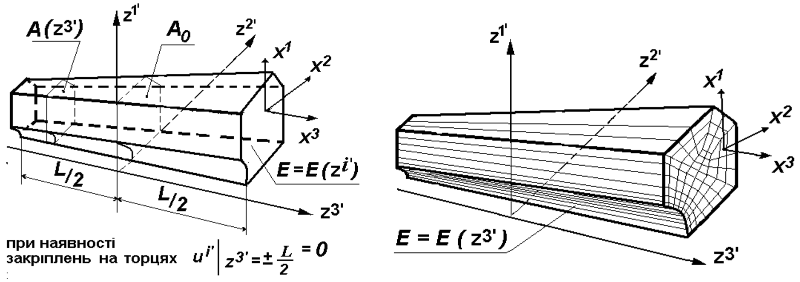
Наведені основні співвідношення просторової задачі теорії пружності для призматичних тіл в місцевій криволінійній системі координат. На основі основних положень моментної схеми скінченних елементів отримано співвідношення між переміщеннями, деформаціями і напруженнями.

Вступ. При розробці скінченно-елементної бази для розв’язання просторових задач теорії пружності суттєве значення має вибір відповідної схеми отримання розв’язувальних співвідношень. В даній роботі за основу прийняті положення моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) для призматичних тіл. В рамках напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) виведені співвідношення між переміщеннями, деформаціями та напруженнями, представленими в базисній декартовій і місцевій фізичній системі координат.

1. Вихідні співвідношення просторової задачі теорії пружності для призматичних тіл. Для дослідження процесів деформування та руйнування призматичних тіл доцільно використовувати наступні системи координат: базисну декартову $z^{j'}$, яка є незмінною і призначена для задання вихідної інформації про геометрію об'єкта, зовнішні впливи та граничні умови (вісі $z^{1'}$ та $z^{2'}$ базисної системи координат розташовані в площині поперечного перетину тіла, а вісь $z^{3'}$ орієнтована вздовж напрямної) і місцеву систему координат x^i, природньо пов'язану з геометрією досліджуванного об'єкта, при цьому вісь x^3 збігається за напрямком з $z^{3'}$ (рис.1).

Будемо вважати, що в кожній точці тіла відомі компоненти тензора перетворення $z^{i'}_{,j}$ місцевої та базисної систем координат [3]:

$$z^{i'}_{,j} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \qquad z^{\alpha}_{,3} = z^{3'}_{,\alpha} = 0$$



а *б*

Рис. 1. Неоднорідне призматичне тіло із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами (*а*) і дискретна модель НМСЕ (*б*)

Тут і в подальшому всі индекси, позначені грецькими буквами, будуть приймати значення 1,2, а позначені латинськими – 1,2,3.

Компоненти метричного тензору g_{mn} в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензору базисної системи згідно з формулою:

$$g_{mn} = z^{i'}_{,m} z^{j'}_{,n} g_{i'j'} .$$

При дослідженні призматичних тіл для базисної декартової системи координат відмінними від нуля будуть такі компоненти метричного тензору:

$$g_{\alpha\beta} = z^{\gamma'}_{,\alpha} z^{\gamma'}_{,\beta}, \quad g_{33} = \left(z^{3'}_{,3}\right)^2 .$$

Запишемо співвідношення для визначення компонент деформацій ε_{ij} через переміщення u_i в місцевій системі координат [3]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right) - u_k\, \Gamma^k_{ij} , \tag{1.1}$$

де Γ^k_{ij} –символи Крістофеля другого роду.

Враховуючи, що в декартовій системі координат всі символи Кристофеля дорівнюють нулю, а переміщення в місцевій системі координат визначаються через переміщення в базисній за формулою:

$$u_k = u_{s'} z^{s'}_{,k} ,$$

одержимо деформації місцевої системі координат через переміщення в базисній:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(u_{\gamma',\alpha} z^{\gamma'}_{,\beta} + u_{\delta',\beta} z^{\delta'}_{,\alpha}\right) ; \ \varepsilon_{33} = u_{3',3} z^{3'}_{,3}. \tag{1.2}$$

Передбачається, що пружні деформації малі та повязані з напруженнями узагальненим законом Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}\varepsilon_{kl} . \tag{1.3}$$

Для ізотропного тіла компоненти тензора пружних сталих C^{ijkl} визначаються через коефіцієнти Ляме:

$$C^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu\left(g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}\right),$$

де величини λ та μ визначаються через коефіцієнт Пуассона $\nu = \nu(z^{i'}, T)$ і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга) $E = E(z^{i'}, T)$:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

де T – температура.

Фізичні компоненти тензорів деформацій $\tilde{\varepsilon}_{kl}$, напружень $\tilde{\sigma}^{ij}$ та пружних констант $\tilde{C}^{ijkl}$ визначаються співвідношеннями:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}}, \quad \tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij}\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}$$

$$\tilde{C}^{ijkl} = C^{ijkl}\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)} g_{(kk)} g_{(ll)}} . \tag{1.4}$$

2. Просторовий призматичний скінчений елемент загального типу. Розглянемо скінченні елементи загального вигляду. На характер розподілення механічних та геометричних параметрів по площі поперечного перерізу СЕ ніяких обмежень не накладається і вони обчислюються в деякій кількості точок інтегрування (рис. 2).

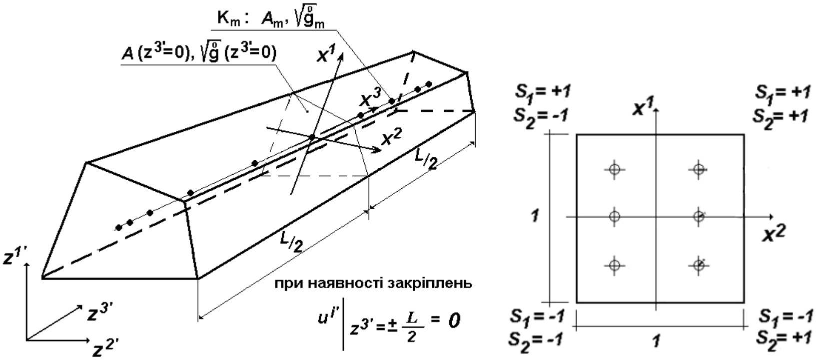


Рис. 2. Просторовий призматичний скінчений елемент загального типу

Визначник матриці, складеної із компонент метричного тензора g_{ij}, є змінним за напрямною і обчислюється на основі вихідних даних про геометрію досліджуваного об‘єкта – заданого закону змінення площі поперечного перерізу – із використанням співвідношення:

$$\sqrt{\overset{\circ}{g}(z^{3'})} = \frac{A(z^{3'})}{A_0}\sqrt{\overset{\circ}{g}\Big|_{z^{3'}=0}} = f(z^{3'})\sqrt{\overset{\circ}{g}\Big|_{z^{3'}=0}} . \qquad (2.1)$$

Розподілення переміщень в межах поперечного перерізу СЕ описується білінійним законом [1,2]:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{m'(S_1S_2)}\left(\frac{1}{2}S_1x^1 + \frac{1}{2}S_2x^2 + S_1S_2x^1x^2 + \frac{1}{4}\right), \qquad (2.2)$$

де $u_{m'(S_1S_2)}$ – вузлові значення переміщень, що подані компонентами в базисній системі координат; S_1 і S_2 – координати, що визначають розташування вузлів відносно центру поперечного перетину елементу в місцевій системі координат x^i.

Визначимо похідні від переміщень в центрі поперечного перерізу СЕ виходячи з прийнятого закону їх розподілення (2.2):

$$\overset{\circ}{u}_{i'} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{i'(S_1S_2)};$$

$$\overset{\circ}{u}_{i',\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{i'(S_1S_2)}S_\alpha; \quad \overset{\circ}{u}_{i',3} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{i'(S_1S_2),3};$$

$$\overset{\circ}{u}_{i',12} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{i'(S_1S_2)}S_1S_2; \quad \overset{\circ}{u}_{i',3\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{i'(S_1S_2),3}S_\alpha. \qquad (2.3)$$

В напрямку твірної переміщення та їх похідні по напрямку x^3 апроксимуються розкладенням за системою координатних функцій $\varphi^{(l)}$ – поліномам Лагранжа $(l=0,1)$ і Міхліна $(l=2,....,L)$:

$$u_{m'} = \sum_{l=0}^{L} u_{m'}^{l}\varphi^{(l)}; \quad u_{m',3} = \sum_{l=0}^{L} u_{m'}^{l}\varphi_{,3}^{(l)}; \qquad (2.4)$$

де

$$\varphi^{(0)} = \frac{1}{2}(1-x^3), \quad \varphi^{(1)} = \frac{1}{2}(1+x^3),$$

$$\varphi^{(l)} = f^{(l)}p^{(l)} - f^{(l-2)}p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2-1)^{-1}},$$

$$p^{(l)}=\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k(l+k)!}{(l-k)!(k!)^2\,2^{k+1}}\Big[(1-x^3)^k+(-1)^l(1+x^3)^k\Big].$$

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє найбільш просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, тобто шляхом виключення відповідних рівнянь.

Скінченні елементи, що пропонуються, орієнтовані на розрахунок широкого класу призматичних тіл. Вони повинні забезпечувати не тільки високу точність подання напружено-деформованого стану конструкцій складної форми, але і високу швидкість збіжності результатів до точного розв'язку. Як показано в роботах [1,2], застосування моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження просторових конструкцій на основі МСЕ. Окрім того МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла як жорсткого цілого, а також усуває явище "хибного зсуву", що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

Подамо компоненти тензору фізичних деформацій в поперечних перерізах, що відповідають точкам інтегрування, у відповідності до МССЕ [4] відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}=\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\,x^{(3-\alpha)}\,;\quad \tilde{\varepsilon}_{12}=\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12}\,;$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}=\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)}\,x^{(3-\alpha)}\,;\quad \tilde{\varepsilon}_{33}=\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta}\,x^{\beta}\,, \qquad (2.5)$$

де $\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij}=\tilde{\varepsilon}_{ij}\Big|_{x^{\alpha}=0}$, $\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij,\beta}=\dfrac{\partial\tilde{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^{\beta}}\Bigg|_{x^{\beta}=0}$.

У випадку лінійного зв'язку між фізичними компонентами тензора напружень та деформацій використовуємо узагальнений закон Гука:

$$\tilde{\sigma}^{ij}=\tilde{C}^{ijkl}\tilde{\varepsilon}_{kl}\,, \qquad (2.6)$$

Запишемо вираз для компонент тензора напружень (2.6) через коефіцієнти розкладу деформацій в ряд Маклорена (2.5):

$$\tilde{\sigma}^{ij}=\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij11}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11,2}\,x^2\right)+2\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij12}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12}+\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij22}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22,1}\,x^1\right)+2\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij13}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{13}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{13,2}\,x^2\right)+$$

$$+2\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij23}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{23}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{23,1}\,x^1\right)+\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij33}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33}+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,1}\,x^1+\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,2}\,x^2\right).$$

Після перегрупування складників, що містять величини деформацій та їх похідних, застосовуючи позначення

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}=\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ijkl}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl}\ ;$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,2}=\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij11}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11,2}+\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij13}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{13,2}+\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij33}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,2}\ ;$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,1}=\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij11}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22,1}+\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij23}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{23,1}+\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij33}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,1}\,,$$

отримаємо скорочений запис закону Гука з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена в термінах фізичних величин:

$$\tilde{\sigma}^{ij}=\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}+\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,2}x^2+\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,1}x^1. \tag{2.7}$$

Відкидаючи з (2.7) члени вигляду $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{i\alpha}_{,\alpha}$ як ті, що не дають вкладення в енергію деформування елементу, подамо напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)}=\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}+\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)};\quad \tilde{\sigma}^{12}=\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{12};$$

$$\tilde{\sigma}^{\alpha3}=\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha3}+\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha3}_{,(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)};\quad \tilde{\sigma}^{33}=\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}+\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha}x^{\alpha}, \tag{2.8}$$

де значення коефіцієнтів $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}$ і $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,\alpha}$ обчислюються в точках інтегрування K_m, що розташовані в поперечних перерізах вздовж вісі x^3 (рис. 2).

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних напружень в ряд Маклорена з урахуванням подання фізичних компонент тензора напружень в місцевій системі координат:

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}=\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)};\quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{12}=\overset{\circ}{g}_{12}\overset{\circ}{\sigma}{}^{12};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha3}=\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\overset{\circ}{g}_{33}}\,\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha3};\quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}=\overset{\circ}{g}_{33}\overset{\circ}{\sigma}{}^{33};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}=\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)};\quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha3}_{,(3-\alpha)}=\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\overset{\circ}{g}_{33}}\,\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha3}_{,(3-\alpha)};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha}=\overset{\circ}{g}_{33}\overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,(3-\alpha)}\,. \tag{2.9}$$

Аналогічно, коефіцієнти розкладання компонент фізичних деформацій в ряд Маклорена матимуть наступний вигляд:

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)}=\frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)};\quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12}=\frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{11}\overset{\circ}{g}_{22}}}\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}\,;$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3}=\frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\,\overset{\circ}{g}_{33}}}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3};\quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33}=\frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}}\overset{\circ}{\varepsilon}_{33};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}=\left.\frac{\partial\tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^{\beta}=0}=\left.\frac{\partial\left(\varepsilon_{\alpha(\alpha)}/g_{\alpha(\alpha)}\right)}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^{\beta}=0}=$$

$$=\frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}}\left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}-\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}\,\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\right);$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)}=\frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\,\overset{\circ}{g}_{33}}}\left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)}-\frac{1}{2}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}\,\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\right);$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta}=\frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}}\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta},\tag{2.10}$$

де

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}=\left.\varepsilon_{ij}\right|_{x^{\alpha}=0},\quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta}=\left.\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x^{\beta}}\right|_{x^{\alpha}=0},\quad \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}=\frac{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}},$$

$$\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}=\left.g_{\alpha(\alpha)}\right|_{x^{\beta}=0},\quad \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}=\left.\frac{\partial g_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^{\beta}=0}.$$

Коефіцієнтом розкладення $\left.\dfrac{\partial^{2}\varepsilon_{33}}{\partial x^{1}\partial x^{2}}\right|_{x^{\beta}=0}$ нехтуємо, як величиною більш високого порядку малості.

Запишемо ненормовані величини деформацій в криволінійній місцевій системі координат, через які подані фізичні коефіцієнти розкладу деформацій (2.10), через переміщення в базисній системі координат із використанням (2.3):

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}=\left.\frac{1}{2}\left(u_{m',i}\,z^{m'}_{,j}+u_{m',j}\,z^{m'}_{,i}\right)\right|_{x^{\alpha}=0};$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}=\left.\frac{\partial\varepsilon_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^{\alpha}=0}=\left.\frac{\partial(u_{\gamma',\alpha}z^{\gamma'}_{,\alpha})}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^{\alpha}=0}=\left.u_{\gamma',12}\,z^{\gamma'}_{,\alpha}+u_{\gamma',\alpha}\,z^{\gamma'}_{,12}\right|_{x^{\alpha}=0};$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)}=\left.\frac{1}{2}\left(u_{\gamma',3(3-\alpha)}\,z^{\gamma'}_{,\alpha}+u_{\gamma',3}\,z^{\gamma'}_{,12}+u_{3',12}\,z^{3'}_{,3}\right)\right|_{x^{\alpha}=0};$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} = u_{3',3\alpha} z^{3'}_{,3}\Big|_{x^{\alpha}=0}.$$

Введемо наступні позначення для значень похідних від переміщень і компонент тензора перетворення $z,^{m'}_{i}$ в центрі СЕ: $u_{m',i}\Big|_{x^{\gamma}=0} = \overset{\circ}{u}_{m',i}$, $z^{m'}_{,i}\Big|_{x^{\gamma}=0} = \overset{\circ}{z}{}^{m'}_{,i}$. Тоді:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{u}_{m',i}\overset{\circ}{z}{}^{m'}_{,j} + \overset{\circ}{u}_{m',j}\overset{\circ}{z}{}^{m'}_{,i}\right);$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \overset{\circ}{u}_{\gamma',12}\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} + \overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha}\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12};$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{u}_{\gamma',3(3-\alpha)}\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} + \overset{\circ}{u}_{\gamma',3}\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12} + \overset{\circ}{u}_{3',12}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\right);$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} = \overset{\circ}{u}_{3',3\alpha}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}.$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент деформацій з врахуванням прийнятого закону розподілення переміщень в поперечному перерізі СЕ (2.2):

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[u_{\gamma'(S_1S_2)}\left(S_\alpha\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\beta} + S_\beta\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\right)\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[u_{3'(S_1S_2)}S_\alpha\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3} + \frac{1}{2}u_{\gamma'(S_1S_2),3}\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[u_{3'(S_1S_2),3}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[u_{\gamma'(S_1S_2)}\left(2S_1S_2\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} + S_\alpha\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12}\right)\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[u_{3'(S_1S_2)}\left(2S_1S_2\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\right) + +u_{\gamma'(S_1S_2),3}\left(S_{(3-\alpha)}\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} + \frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12}\right)\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[u_{3'(S_1S_2),3}\left(2S_\alpha\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\right)\right].$$

Із урахуванням розкладу переміщень в напрямку твірної (2.4), отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів розкладу деформацій через коефіцієнти розкладу вузлових переміщень:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L}u^{l}_{\gamma'(S_1S_2)}\left(S_\alpha\,\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\beta}+S_\beta\,\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\right)\varphi^{(l)}\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha3}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L}\left(u^{l}_{3'(S_1S_2)}S_\alpha\,\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\varphi^{(l)}+u^{l}_{\gamma'(S_1S_2)}\frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\varphi^{(l)}_{,3}\right)\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L}u^{l}_{3'(S_1S_2)}z^{3'}_{,3}\varphi^{(l)}_{,3}\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}=\frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L}u^{l}_{\gamma'(S_1S_2)}\left(2S_1S_2\,\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}+S_\alpha\,\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12}\right)\varphi^{(l)}\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha3,(3-\alpha)}=\frac{1}{4}\sum_{S_1\pm1}\sum_{S_2\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L}\left\{u^{l}_{3'(S_1S_2)}\left(2S_1S_2\,\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\right)\varphi^{(l)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+u^{l}_{\gamma'(S_1S_2)}\left(S_{(3-\alpha)}\,\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}+\frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12}\right)\varphi^{(l)}_{,3}\right\}\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L}u^{l}_{3'(S_1S_2)}\left(2S_\alpha\,\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\right)\varphi^{(l)}_{,3}\right].\qquad(2.11)$$

Наведені співвідношення, які визначають зв'язок між переміщеннями і деформаціями а також між деформаціями і напруженнями в рамках моментної схеми СЕ, дозволяють отримувати розв’язувальні співвідношення НМСЕ для різних модифікацій призматичного СЕ з перемінними геометричними і механічними параметрами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.: НИИСМ, 1993. – 376 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
3. *Блох В.И.* Теория упругости. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1964. – 483 с.
4. *Сахаров А.С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислоокий, В.В. Киричевский. – К. : Вища шк., 1982. – 480 с.

Стаття надійшла до редакції 27.04.2013 р.

Баженов В.А., Гуляр А.И.,Сахаров А.С, Шкрыль А.А.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО ВАРИАНТА ПРИЗМАТИЧЕСКОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Приведены основные соотношения пространственной задачи теории упругости для призматических тел в местной криволинейной системе координат. На основании основных положений моментной схемы конечных элементов получены соотношения между перемещениями, деформациями и напряжениями.

Bazhenov V.A., Guliar A. I., Sakharov A.S., Shkril' A.,

SUBSTANTIVE PROVISIONS OF MOMENTARY CHEME FOR SEMIANALYTICAL VARIANT OF PRISMATIC FINITE ELEMENT

Basic correlations of theory of elasticity spatial problem are resulted for prismatic bodies in the local curvilinear system of co-ordinates. On the basis of substantive provisions of momentary cheme of finite elements the relations between displacements, eformations and stress values are obtained.