

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Методи обробки експериментальних даних

Методичні вказівки та завдання

до виконання лабораторних робіт
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності G3 «Електрична інженерія»

Київ 2026

УДК 519.6
Ч-58

Укладач Н. І. Полтораченко, канд. техн. наук, доцент

Рецензент Є.В. Бородавка, д-р техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск Є.В. Бородавка, д-р техн. наук,
професор

*Затверджено на засіданні кафедри інформаційних технологій
проектування і прикладної математики, протокол № 8 від 13 лютого
2026 року.*

В авторській редакції.

Чисельні методи. Методи обробки експериментальних даних
Ч-58 [електронний ресурс]: методичні вказівки та завдання до виконання
лабораторних робіт / уклад. Н.І. Полтораченко. – Київ: КНУБА,
2026. – 68 с.

Представлено приклади розв'язування задач та реалізації їх в
середовищі MATLAB щодо чисельних методів обробки експериментальних
даних відповідно до програми другого курсу, запропоновано варіанти для
лабораторних робіт. Наведено короткий зміст теоретичного матеріалу.
Містять варіанти завдань для виконання лабораторних робіт.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти спеціальності G3 «Електрична інженерія».

© КНУБА, 2026

Загальні положення

Чисельні методи є дисципліною, яка спирається на курс вищої математики, її складової – математичного аналізу, та широко використовується як в інженерних розрахунках, так і в задачах математичного моделювання. Методи курсу слугують базою для вивчення електромеханіки, будівельної та теоретичної механіки, системного аналізу, математичної кібернетики тощо.

Враховуючи широкий розвиток сучасної комп'ютерної математики, дослідження чисельних методів запропоновано виконувати з використанням автоматизованої системи математичних розрахунків MATLAB, яка побудована на застосуванні матричних операцій (звідси назва – MATrix LABoratory). Сучасна система MATLAB є середовищем для програмування, чисельних розрахунків та візуалізації даних, вона містить велику збірку чисельних методів комп'ютерної математики.

В методичних вказівках стисло викладений теоретичний матеріал щодо чисельних методів обробки експериментальних даних, а саме – обчислення абсолютних і відносних похибок, застосування методів знаходження похибки обчислення функції, методів інтерполяції та апроксимації. Теоретичні тези коментуються прикладами розв'язування відповідних задач.

1. Обчислення абсолютних і відносних похибок. Застосування методів знаходження похибки обчислення функції

Абсолютною похибкою називається величина

$$\Delta a = |A - a| \text{ або } A = a \pm \Delta a,$$

де A – точне число; a – наближене число.

Гранична абсолютна похибка – це оцінка різниці точного та наближеного чисел

$$|A - a| \leq \overline{\Delta a} \text{ або } a - \overline{\Delta a} \leq A \leq a + \overline{\Delta a}.$$

Відносна похибка наближеного числа визначається як відношення абсолютної похибки до абсолютного значення наближеної величини:

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{|a|}.$$

Гранична відносна похибка $\overline{\delta_a}$ є оцінкою відносної похибки $\delta_a \leq \overline{\delta_a}$.

Приклад 1.1. Визначити, яку рівність пораховано більш точно - $\frac{9}{11} = 0,818$ чи $\sqrt{18} = 4,24$?

Розв'язування. Знаходимо значення даних з більшою кількістю десяткових значень: $\frac{9}{11} = 0,81818 \dots$, $\sqrt{18} = 4,2426 \dots$. Обчислюємо граничні абсолютні похибки, округлюючи їх з надлишком:

$$\Delta_a = |0,81818 - 0,818| \leq 0,00018; \Delta_b = |4,2426 - 4,24| \leq 0,0026.$$

Граничні відносні похибки складають

$$\delta_a = \left| \frac{0,00018}{0,818} \right| = 0,00022 = 0,022\%; \delta_b = \left| \frac{0,0026}{4,24} \right| = 0,00061 = 0,061\%.$$

Так як $\delta_a < \delta_b$, то рівність $\frac{9}{11} = 0,818$ є більш точною.

Реалізація прикладу 1.1 в середовищі MATLAB наведена на рис. 1.1.

При роботі з числовими даними в MATLAB передбачені наступні формати:

short - стислий запис (за замовчуванням);

long - довгий запис;

hex - запис у вигляді шістнадцяткового числа;

bank - запис до сотих часток;

plus - записується тільки знак числа;

short E - стислий запис у форматі з плаваючою комою;

long E - довгий запис у форматі з плаваючою комою;

short G - друга форма стислого запису у форматі з плаваючою комою;

long G - друга форма довгого запису у форматі з плаваючою комою;

rational - запис у вигляді раціонального дробу.

В MATLAB використовуються такі знаки арифметичних операцій:

+ - додавання;

- - віднімання;

* - множення;

/ - ділення зліва праворуч;

\ - ділення справа ліворуч;

^ - піднесення до ступеня.

Якщо запис оператора закінчується символом «;», то результат його дії не відображується в командному вікні. Якщо символ «;» відсутній, то результат дії оператора буде наведений у командному вікні.

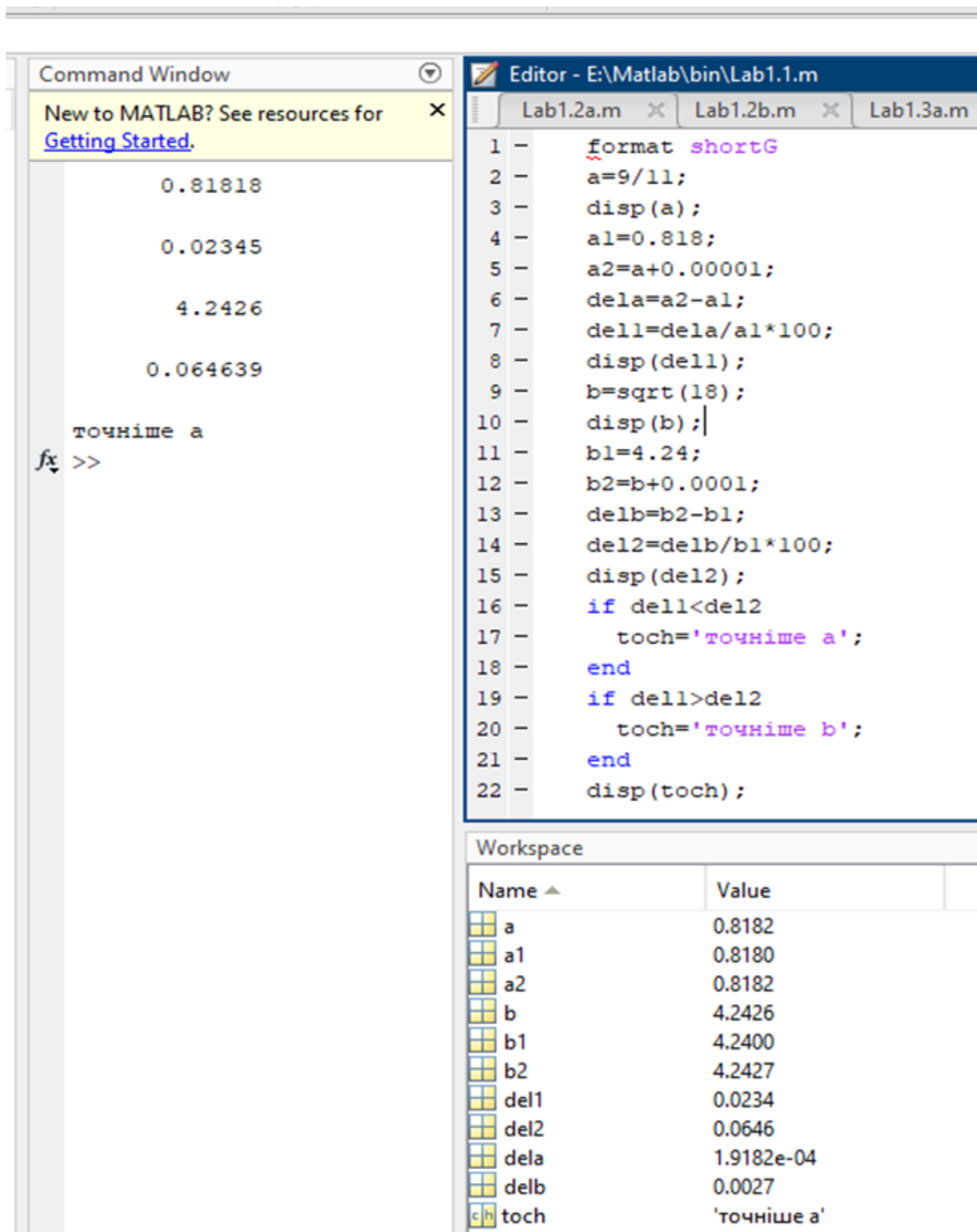


Рис. 1.1. Реалізація прикладу 1.1 в середовищі MATLAB

Вбудовані елементарні функції MATLAB складаються з тригонометричних, гіперболічних, експоненціальних, логарифмічних, функцій округлення та функцій для роботи з комплексними числами. Частина з них наведена нижче:

$\text{sqrt}(x)$ - обчислення квадратного кореня;
 $\text{exp}(x)$ - піднесення до ступеня числа e ;
 $\text{pow2}(x)$ - піднесення до ступеня числа 2;
 $\text{log}(x)$ - обчислення натурального логарифма;
 $\text{log10}(x)$ - обчислення десяткового логарифма;
 $\text{log2}(x)$ - обчислення логарифма за основою 2;
 $\text{sin}(x)$ - синус кута x , що заданий в радіанах;
 $\text{cos}(x)$ - косинус кута x , що заданий в радіанах;
 $\text{tan}(x)$ - тангенс кута x , що заданий в радіанах;
 $\text{cot}(x)$ - котангенс кута x , що заданий в радіанах;
 $\text{asin}(x)$ - арксинус;
 $\text{acos}(x)$ - арккосинус;
 $\text{atan}(x)$ - арктангенс;
 $\text{acot}(x)$ - арккотангенс;
 pi - число π ;
 $\text{round}(x)$ - округлення до найближчого цілого;
 $\text{fix}(x)$ - усічення дробової частини числа;
 $\text{floor}(x)$ - округлення до меншого цілого;
 $\text{ceil}(x)$ - округлення до більшого цілого;
 $\text{mod}(x)$ - залишок від ділення з урахуванням знаку;
 $\text{sign}(x)$ - знак числа;
 $\text{factor}(x)$ - розкладання числа на прості множники;
 $\text{isprime}(x)$ - істинно, якщо число просте;
 $\text{abs}(x)$ - обчислення модуля числа.

Для відображення операцій відносин використовуються наступні позначки:

$==$ - рівність;
 $<$ - менше;
 $<=$ - менше або дорівнює;
 $>$ - більше;
 $>=$ - більше або дорівнює;
 $\sim$ - не дорівнює.

А також їх комбінація за допомогою логічних операторів `and`, `or`, `not` або логічних операцій «&», «|», «~».

Умовний оператор `if` має наступний синтаксис:

```

if «умова»
    «команди»
end

```

Якщо умова є вірною, то виконуються команди оператора, а якщо умова не є вірною, то відбувається перехід до команд, що розташовані після end.

Команда disp(x) виводить у вікно команд значення змінної x.

При роботі з текстовими змінними їх значення беруться в лапки.

Вірними у сенсі ω вважаються n перших значущих цифр, якщо абсолютна похибка наближеного числа не перевищує ω одиниць розряду, що виражений n -ю значущою цифрою.

Вірними у вузькому розумінні ($\omega=0,5$) вважаються n перших значущих цифр, якщо абсолютна похибка наближеного числа не перевищує половини одиниці розряду, що виражений n -ю значущою цифрою.

Вірними у широкому розумінні ($\omega=1$) вважаються n перших значущих цифр, якщо абсолютна похибка наближеного числа не перевищує одиниці розряду, що виражений n -ю значущою цифрою.

Приклад 1.2. Округлити числа, лишивши вірні знаки: а) $72,353 \pm 0,026$ у вузькому розумінні; б) $2,3544$; $\delta=0,2\%$ у широкому розумінні.

Розв'язування. а) Нехай $a = 72,353 \pm 0,026$. Так як $0,026 < 0,05$, то вірними у вузькому розумінні будуть цифри 7, 2, 3. Тоді за правилами округлення матимемо $a_1 = 72,4$, а нова похибка - $\Delta_{a_1} = \Delta_a + \Delta_{\text{окр}} = 0,026 + 0,047 = 0,073$, що є більшим за 0,05, тобто умова щодо вірних знаків 7, 2, 3 не виконується. Як наслідок, кількість вірних знаків зменшується до 7, 2:

$$a_2 = 72, \text{ а } \Delta_{a_2} = \Delta_a + \Delta_{\text{окр}} = 0,026 + 0,353 = 0,379.$$

Оскільки $0,379 < 0,5$, то вірними у вузькому розумінні будуть цифри 7, 2. Відповідь: 72.

Реалізація прикладу 1.2а в середовищі MATLAB наведена на рис. 1.2. Оператор розгалуження має наступний синтаксис:

```

if «умова»
    «команди»
elseif «умова»

```

```

        «КОМАНДИ»
...
else
        «КОМАНДИ»
end

```

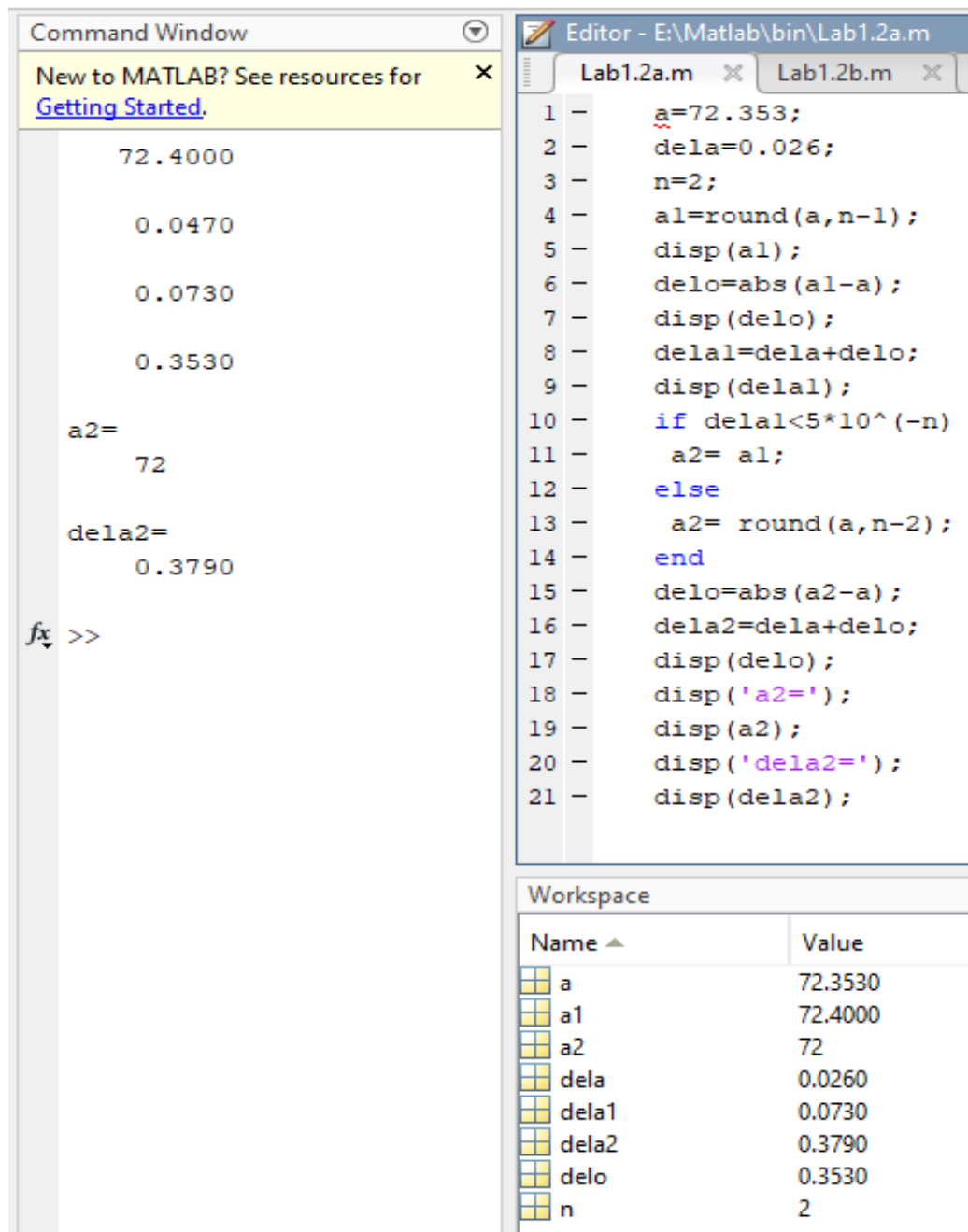


Рис. 1.2. Реалізація прикладу 1.2а в середовищі MATLAB

Залежно від виконання умови працює та або інша гілка програми. Якщо всі умови не виконуються, то працюють команди, що розташовані після else. Гілок при цьому може бути кілька.

б) Нехай $a = 2,3544$; $\delta_a = 0,2\%$. Тоді $\Delta_a = a \cdot \delta_a = 0,00471$. Так як $0,00471 < 0,01$, то вірними у широкому розумінні будуть цифри 2, 3, 5. Тоді за правилами округлення матимемо $a_1 = 2,35$, а нова похибка - $\Delta_{a_1} = \Delta_a + \Delta_{\text{окр}} = 0,00471 + 0,0044 = 0,00911$, що є меншим за 0,01.

Відповідь: 2,35.

Реалізація прикладу 1.2б в середовищі MATLAB наведена на рис. 1.3.

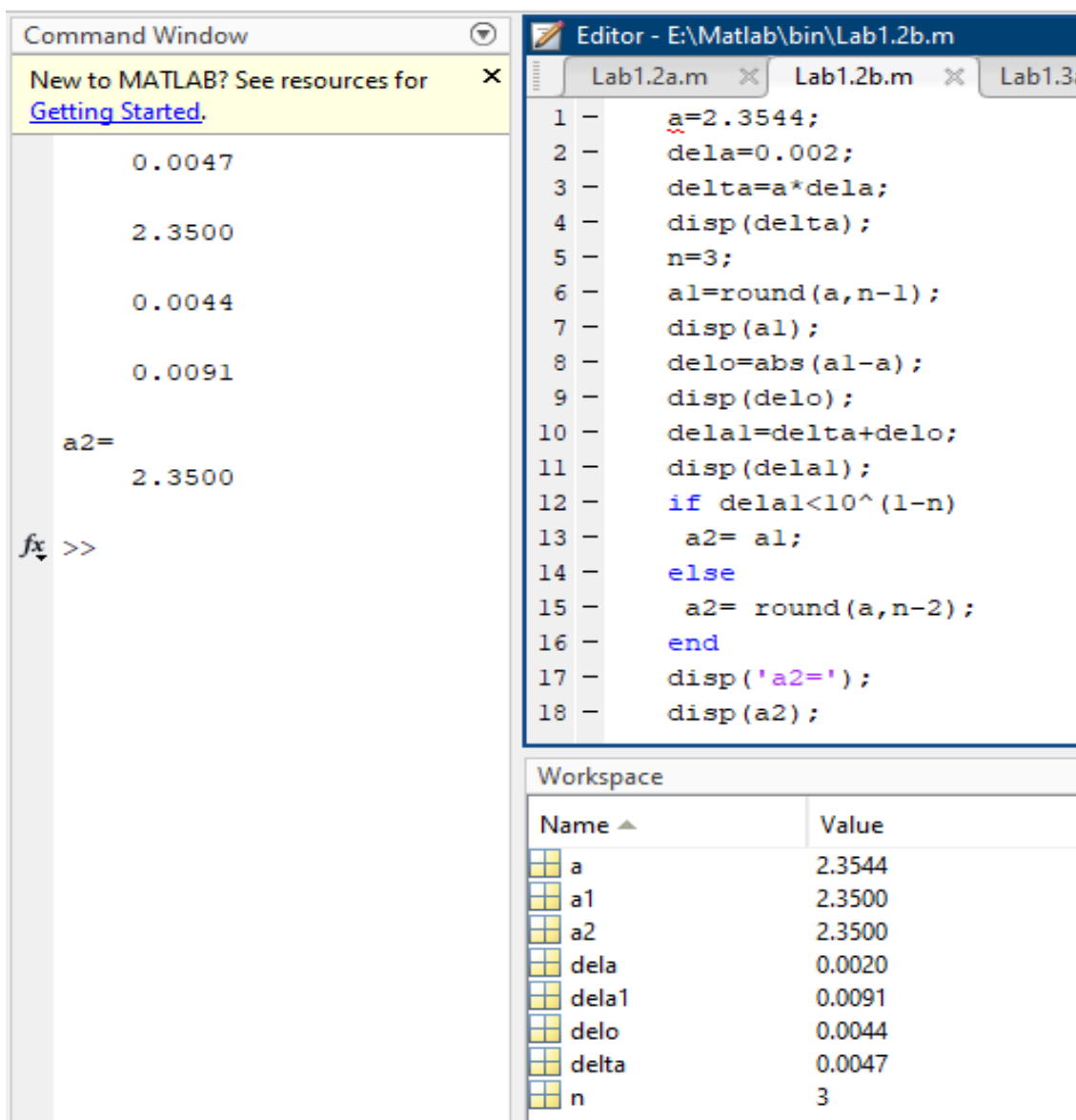


Рис. 1.3. Реалізація прикладу 1.2б в середовищі MATLAB

Похибка суми і різниці. Абсолютна похибка алгебраїчної суми декількох наближених чисел не перевищує суми абсолютних похибок цих чисел.

Похибка добутку. Відносна похибка добутку наближених чисел не перевищує суми відносних похибок співмножників.

Приклад 1.3. Обчислити значення виразу та оцінити його похибки:

а) $X = \frac{m^2 \cdot n^3}{\sqrt{k}}$, $m = 28,3(\mp 0,02)$, $n = 7,45(\mp 0,01)$, $k = 0,678(\mp 0,003)$ та

б) $N = \frac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}$, $m = 5,72(\mp 0,02)$, $n = 3,0567(\mp 0,0001)$.

Розв'язування. а) Початкові дані: $m = 28,3$; $\Delta_m = 0,02$; $n = 7,45$; $\Delta_n = 0,01$; $k = 0,678$; $\Delta_k = 0,003$. Так як вираз містить операції множення, ділення, піднесення до ступеня і добування кореня, то оцінимо відносні похибки: $\delta_m = \frac{0,02}{28,3} = 0,00071$; $\delta_n = \frac{0,01}{7,45} = 0,00134$; $\delta_k = \frac{0,003}{0,678} = 0,00443$. Обчислимо значення $X = \frac{(28,3)^2 \cdot (7,45)^3}{\sqrt{0,678}} = 4,02 \cdot 10^5$, а відносна похибка результату обчислюється через відносні похибки складових:

$$\delta_X = 2 \cdot \delta_m + 3 \cdot \delta_n + 0,5 \cdot \delta_k = 0,00142 + 0,00405 + 0,00222 = 0,00765 = 0,77\%.$$

Тоді абсолютна похибка результату $\Delta_X = X \cdot \delta_X = 4,02 \cdot 10^5 \cdot 0,00765 = 3,1 \cdot 10^3$.

Відповідь. $X = 4,02 \cdot 10^5 \mp 3,1 \cdot 10^3$.

Реалізація прикладу 1.3а в середовищі MATLAB наведена на рис. 1.4.

б) Оскільки при додаванні та відніманні абсолютні похибки складових додаються, то $n - 1 = 2,0567(\mp 0,0001)$; $m + n = 8,777(\mp 0,0201)$; $m - n = 2,663(\mp 0,0201)$. Для виконання операцій множення, ділення та піднесення до ступеня оцінимо відносні похибки:

$$\delta_{n-1} = \frac{0,0001}{2,0567} = 0,000049; \delta_{m+n} = \frac{0,0201}{8,777} = 0,00229; \delta_{m-n} = \frac{0,0201}{2,663} = 0,00755.$$

Як наслідок,

$$\delta_N = \delta_{n-1} + \delta_{m+n} + 2 \cdot \delta_{m-n} = 0,01743 = 1,74\%. \text{ Значення}$$

$$N = \frac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2} = \frac{2,0567 \cdot 8,777}{(2,663)^2} = 2,5448 \approx 2,55,$$

а його абсолютна похибка $\Delta_N = N \cdot \delta_N = 2,55 \cdot 0,01743 = 0,044$.

Відповідь. $N \approx 2,55 \mp 0,044$.

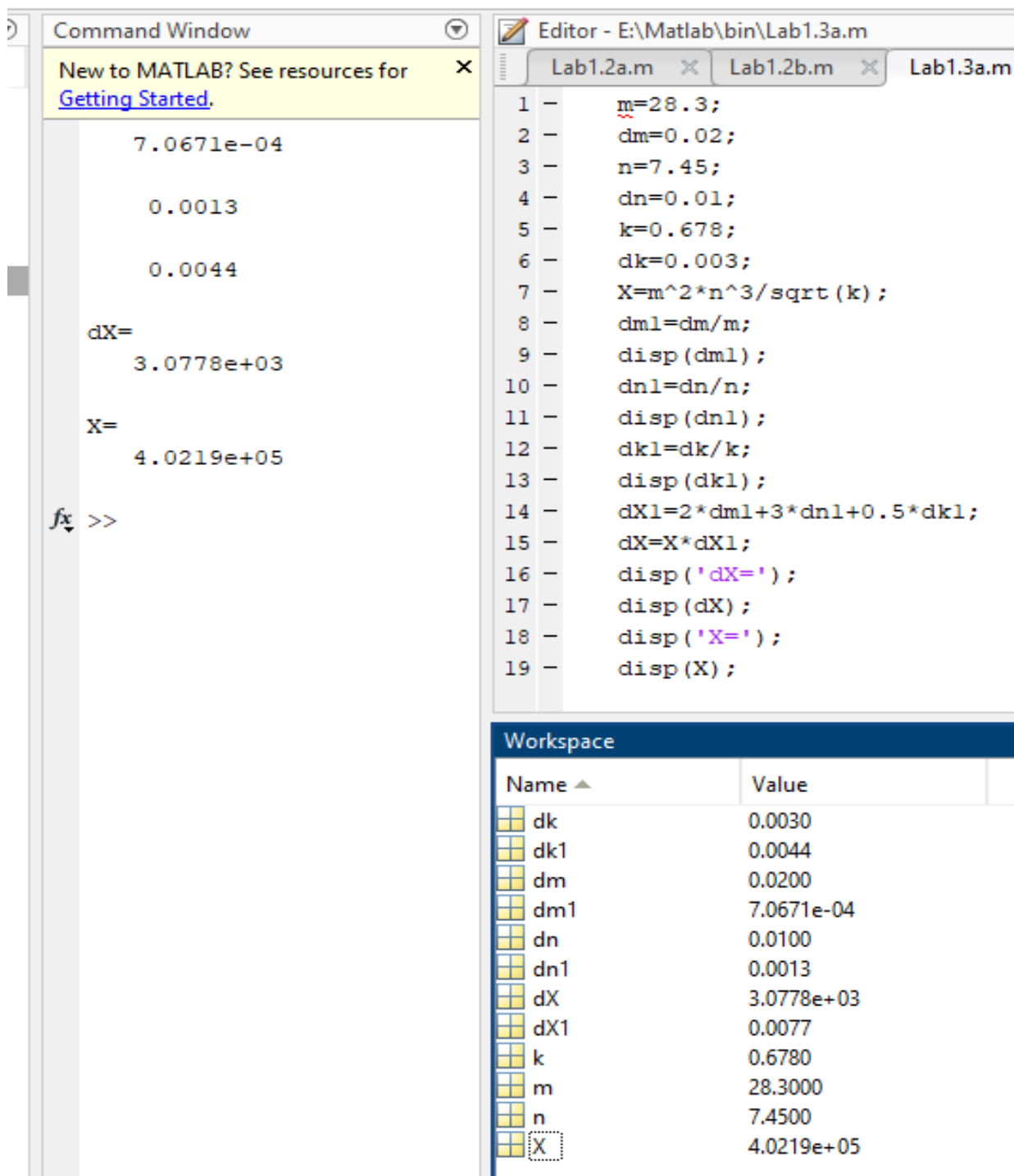


Рис. 1.4. Реалізація прикладу 1.3а в середовищі MATLAB

Реалізація прикладу 1.3б в середовищі MATLAB наведена на рис. 1.5.

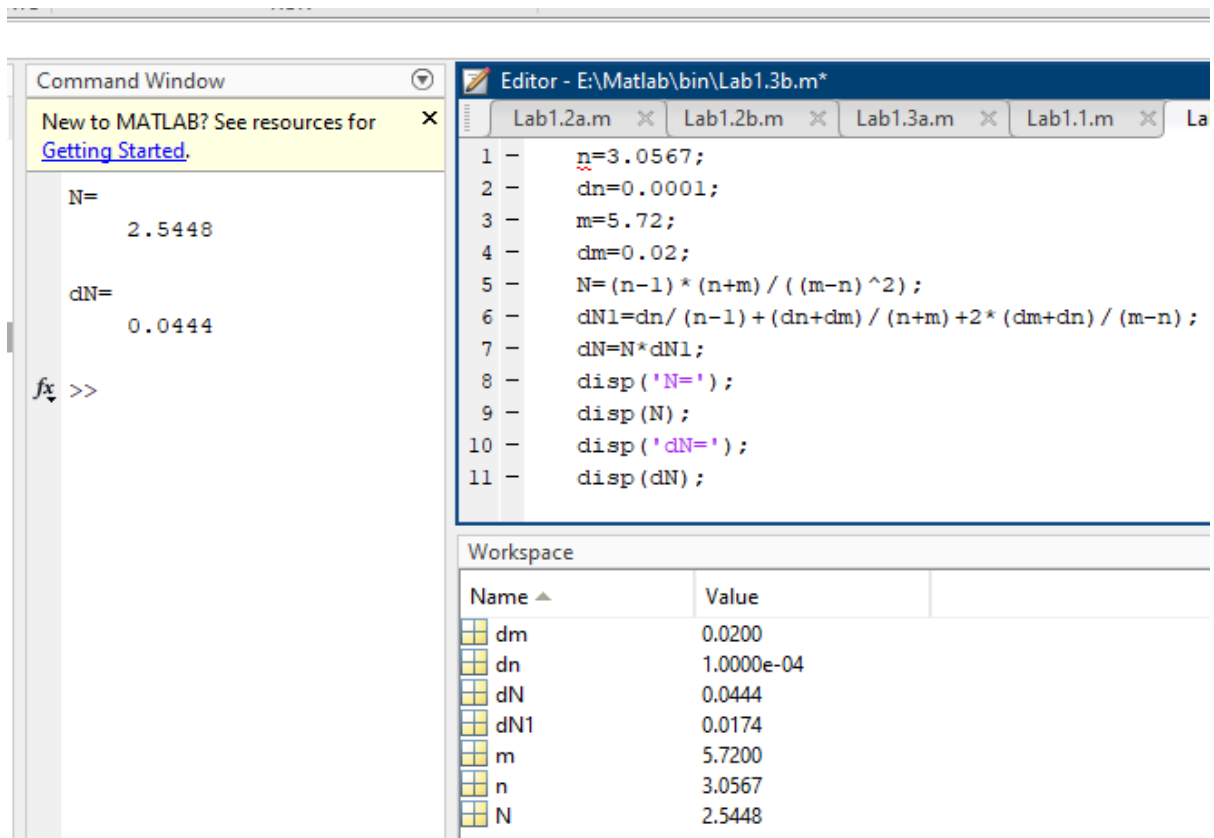


Рис. 1.5. Реалізація прикладу 1.3б в середовищі MATLAB

Абсолютною похибкою функції є вираз

$$\Delta_f = |f'(x)| \cdot \Delta x,$$

а відносною похибкою функції -

$$\delta_f = \frac{|\Delta_f|}{|f|} = \frac{|f'(x)|}{|f(x)|} \cdot \Delta x.$$

Приклад 1.4. Обчислити значення функції $N = \lg\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} + e^{\frac{3}{2}}$ та оцінити абсолютну похибку, взявши значення аргументів з чотирма вірними цифрами. Будемо вважати похибки аргументів рівними 0,0005.

Розв'язування. Так як аргументи беремо з чотирма вірними цифрами, то

$$x = \sqrt{5} = 2,236; y = \pi = 3,142; z = e = 2,718.$$

Значення функції $N = \lg(2,236) + \frac{1}{\sqrt[3]{3,142}} + (2,718)^{\frac{3}{2}} = 5,514$.

Для обчислення похибок функцій, які входять до побудови N , знайдемо їх похідні:

$$\frac{d(\lg x)}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln 10}; \quad \frac{d(y^{-\frac{1}{3}})}{dy} = -\frac{1}{3 \cdot y^{\frac{4}{3}}}; \quad \frac{d(z^{\frac{3}{2}})}{dz} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{z}.$$

Абсолютні похибки доданків приймуть значення:

$$\Delta_x = \left| \frac{1}{x \ln 10} \right| \cdot \Delta_x = \frac{1}{2,236 \cdot \ln 10} \cdot 0,0005 = 0,000097,$$

$$\Delta_y = \left| -\frac{1}{3 \cdot y^{\frac{4}{3}}} \right| \cdot \Delta_y = \frac{1}{3 \cdot (3,142)^{\frac{4}{3}}} \cdot 0,0005 = 0,000036,$$

$$\Delta_z = \left| \frac{3}{2} \cdot \sqrt{z} \right| \cdot \Delta_z = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2,718} \cdot 0,0005 = 0,001237.$$

Оскільки складові функції додаються, то абсолютна похибка функції має вигляд:

$$\Delta_N = 0,000097 + 0,000036 + 0,001237 = 0,00137.$$

Відповідь. $N \approx 5,51 \mp 0,00137$.

Реалізація прикладу 1.4 в середовищі MATLAB наведена на рис. 1.6.

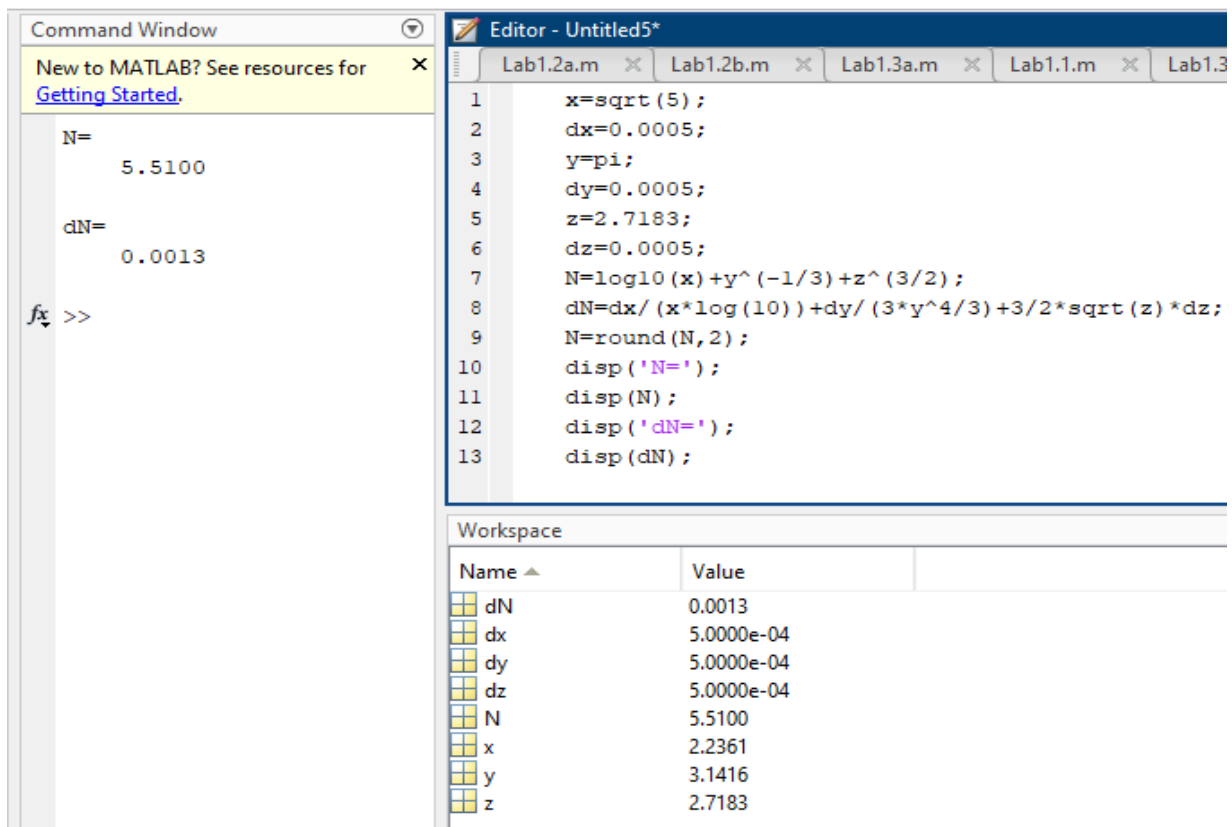


Рис. 1.6. Реалізація прикладу 1.4 в середовищі MATLAB

Завдання до лабораторної роботи №1

Завдання 1.1.

1) Визначити, яку рівність пораховано більш точно. 2) Округлити числа, лишивши вірні знаки: а) у вузькому розумінні; б) у широкому розумінні. Варіанти завдань наведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

№1	1	$\sqrt{44} = 6,63$, $19/41 = 0,463$	№2	1	$7/15 = 0,467$, $\sqrt{30} = 5,48$
	2	а) $22,553 \pm 0,016$ б) $2,8546$, $\delta = 0,3\%$		2	а) $6,4257 \pm 0,0024$ б) $17,2834$, $\delta = 0,3\%$
№3	1	$\sqrt{10,5} = 3,24$, $4/17 = 0,235$	№4	1	$15/7 = 2,14$, $\sqrt{10} = 3,16$
	2	а) $0,5748 \pm 0,0034$ б) $34,834$, $\delta = 0,1\%$		2	а) $2,3485 \pm 0,0042$ б) $0,34484$, $\delta = 0,4\%$
№5	1	$6/7 = 0,857$, $\sqrt{4,8} = 2,19$	№6	1	$12/11 = 1,091$, $\sqrt{6,8} = 2,61$
	2	а) $5,435 \pm 0,0028$ б) $10,8441$, $\delta = 0,5\%$		2	а) $0,12356 \pm 0,00036$ б) $8,24163$, $\delta = 0,2\%$
№7	1	$2/21 = 0,095$, $\sqrt{22} = 4,69$	№8	1	$23/15 = 1,53$, $\sqrt{9,8} = 3,13$
	2	а) $2,4543 \pm 0,0032$ б) $24,5643$, $\delta = 0,1\%$		2	а) $8,3445 \pm 0,0022$ б) $23,574$, $\delta = 0,2\%$
№9	1	$6/11 = 0,545$, $\sqrt{83} = 9,11$	№10	1	$17/19 = 0,895$, $\sqrt{52} = 7,21$
	2	а) $3,7834 \pm 0,0041$ б) $21,68563$, $\delta = 0,3\%$		2	а) $13,537 \pm 0,0026$ б) $7,521$, $\delta = 0,2\%$
№11	1	$21/29 = 0,723$, $\sqrt{44} = 6,63$	№12	1	$50/19 = 2,63$, $\sqrt{27} = 5,19$
	2	а) $13,6253 \pm 0,0021$ б) $0,3567$, $\delta = 0,42\%$		2	а) $1,784 \pm 0,0063$ б) $0,85637$, $\delta = 0,21\%$
№13	1	$13/17 = 0,764$, $\sqrt{31} = 5,56$	№14	1	$7/22 = 0,318$, $\sqrt{13} = 3,60$
	2	а) $3,6878 \pm 0,0013$ б) $15,873$, $\delta = 0,42\%$		2	а) $27,1548 \pm 0,0016$ б) $0,3945$, $\delta = 0,16\%$
№15	1	$17/11 = 1,545$, $\sqrt{18} = 4,24$	№16	1	$5/3 = 1,667$, $\sqrt{38} = 6,16$
	2	а) $0,8647 \pm 0,0013$ б) $24,3618$, $\delta = 0,22\%$		2	а) $0,98351 \pm 0,00042$ б) $3,7542$, $\delta = 0,32\%$

№17	1	$49/13 = 3,77$, $\sqrt{14} = 3,74$	№18	1	$13/7 = 1,857$, $\sqrt{7} = 2,64$
	2	a) $5,6483 \pm 0,0017$ б) $83,736$, $\delta = 0,085\%$		2	a) $32,7486 \pm 0,0012$ б) $2,8867$, $\delta = 0,43\%$
№19	1	$19/12 = 1,58$, $\sqrt{12} = 3,46$	№20	1	$51/11 = 4,64$, $\sqrt{35} = 5,91$
	2	a) $4,88445 \pm 0,00052$ б) $0,096835$, $\delta = 0,32\%$		2	a) $38,4256 \pm 0,0014$ б) $0,66385$, $\delta = 0,34\%$
№21	1	$18/7 = 2,57$, $\sqrt{22} = 4,69$	№22	1	$19/9 = 2,11$, $\sqrt{17} = 4,12$
	2	a) $0,39642 \pm 0,00022$ б) $46,453$, $\delta = 0,15\%$		2	a) $0,66385 \pm 0,00042$ б) $5,8425$, $\delta = 0,23\%$
№23	1	$16/7 = 2,28$, $\sqrt{11} = 3,32$	№24	1	$20/13 = 1,54$, $\sqrt{63} = 7,94$
	2	a) $0,75244 \pm 0,00013$ б) $24,3872$, $\delta = 0,34\%$		2	a) $2,3684 \pm 0,00017$ б) $45,7832$, $\delta = 0,18\%$
№25	1	$12/7 = 1,71$, $\sqrt{47} = 6,86$	№26	1	$6/7 = 0,857$, $\sqrt{41} = 6,40$
	2	a) $0,38725 \pm 0,00112$ б) $72,354$, $\delta = 0,24\%$		2	a) $0,36127 \pm 0,00034$ б) $46,7843$, $\delta = 0,32\%$
№27	1	$23/9 = 2,56$, $\sqrt{87} = 9,33$	№28	1	$27/31 = 0,872$, $\sqrt{42} = 6,48$
	2	a) $4,57633 \pm 0,00042$ б) $23,7564$, $\delta = 0,44\%$		2	a) $15,8372 \pm 0,0026$ б) $0,088748$, $\delta = 0,56\%$
№29	1	$7/3 = 2,33$, $\sqrt{58} = 7,61$	№30	1	$14/17 = 0,823$, $\sqrt{53} = 7,28$
	2	a) $13,5726 \pm 0,0072$ б) $3,87683$, $\delta = 0,33\%$		2	a) $0,66835 \pm 0,00115$ б) $23,3748$, $\delta = 0,27\%$
№31	1	$\sqrt{44} = 6,63$, $19/41 = 0,463$	№32	1	$7/15 = 0,467$, $\sqrt{30} = 5,48$
	2	a) $22,553 \pm 0,016$ б) $2,8546$, $\delta = 0,3\%$		2	a) $6,4257 \pm 0,0024$ б) $17,2834$, $\delta = 0,3\%$
№33	1	$\sqrt{10,5} = 3,24$, $4/17 = 0,235$	№34	1	$15/7 = 2,14$, $\sqrt{10} = 3,16$
	2	a) $34,834$, $\delta = 0,1\%$ б) $0,5748 \pm 0,0034$		2	a) $2,3485 \pm 0,0042$ б) $0,34484$, $\delta = 0,4\%$
№35	1	$6/11 = 0,545$, $\sqrt{83} = 9,11$	№36	1	$17/19 = 0,895$, $\sqrt{52} = 7,21$
	2	a) $3,7834 \pm 0,0041$ б) $21,68563$, $\delta = 0,3\%$		2	a) $13,537 \pm 0,0026$ б) $7,521$, $\delta = 0,2\%$

Завдання 1.2. Обчислити значення виразу та оцінити його похибки.
Варіанти завдань наведені в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Варіант	Завдання
1.	$X = \frac{ab}{\sqrt[3]{c}}; a = 4,16 \pm 0,005; b = 12,163 \pm 0,002; c = 55,18 \pm 0,01$
2.	$X = \frac{ab^3}{48c}; a = 54,8 \pm 0,02; b = 2,45 \pm 0,01; c = 0,863 \pm 0,004$
3.	$X = \sqrt{\frac{ab}{c}}; a = 2,65 \pm 0,01; b = 1,84 \pm 0,006; c = 4,88 \pm 0,03$
4.	$X = \frac{a^2b}{c^3}; a = 1,6531 \pm 0,0003; b = 3,78 \pm 0,002; c = 0,158 \pm 0,0005$
5.	$X = \frac{\pi^2}{4}ab; a = 54 \pm 0,5; b = 38,235 \pm 0,001; \pi = 3,14$
6.	$X = \frac{ab}{c^2}; a = 0,1756 \pm 0,0001; b = 3,71 \pm 0,03; c = 0,285 \pm 0,0002$
7.	$X = \frac{ab^3}{c}; a = 0,142 \pm 0,0003; b = 1,71 \pm 0,002; c = 3,727 \pm 0,001$
8.	$X = \frac{a^2b}{c}; a = 3,456 \pm 0,002; b = 0,642 \pm 0,0005; c = 7,12 \pm 0,004$
9.	$X = \frac{\sqrt{ab}}{c}; a = 4,632 \pm 0,003; b = 23,3 \pm 0,04; c = 11,3 \pm 0,06$
10.	$X = \frac{\sqrt{a} \cdot b}{c}; a = 228,6 \pm 0,06; b = 86,4 \pm 0,02; c = 67,7 \pm 0,05$
11.	$X = \left(\frac{(a+b)c}{m-n} \right)^2; a = 4,3 \pm 0,05; b = 17,21 \pm 0,02; c = 8,2 \pm 0,05;$ $m = 12,417 \pm 0,003; n = 8,37 \pm 0,005$
12.	$X = \frac{(2n-1)^2(a+b)}{a-b}; n = 1,175 \pm 0,002; a = 5,8 \pm 0,01; b = 0,65 \pm 0,02$
13.	$X = \frac{\sqrt[3]{a-b}}{m(c-a)}; a = 10,82 \pm 0,03; b = 2,786 \pm 0,0006; c = 14,7 \pm 0,06;$ $m = 0,28 \pm 0,006$
14.	$X = \frac{m\sqrt{a-b}}{c+d}; a = 9,542 \pm 0,001; b = 3,128 \pm 0,002; c = 0,172 \pm 0,001;$ $m = 2,8 \pm 0,03; d = 5,4 \pm 0,02$

15.	$X = \frac{\pi}{64} \sqrt{a^4 - b^4}; a = 36,5 \pm 0,1; b = 26,35 \pm 0,005$
16.	$X = \frac{(a+b)}{m\sqrt{c-d}}; a = 16,342 \pm 0,001; b = 2,5 \pm 0,03; c = 38,17 \pm 0,002;$ $m = 3,6 \pm 0,04; d = 9,14 \pm 0,005$
17.	$X = \frac{c(a-b)}{\sqrt{m+n}}; a = 27,16 \pm 0,006; b = 5,03 \pm 0,01; c = 3,6 \pm 0,02;$ $m = 12,375 \pm 0,004; n = 86,2 \pm 0,05$
18.	$X = \frac{m(a+b)}{\sqrt{c-d}}; a = 23,16 \pm 0,02; b = 11,7 \pm 0,005; c = 145,5 \pm 0,08;$ $m = 0,28 \pm 0,006; d = 28,6 \pm 0,1$
19.	$X = \frac{m(a+b)}{(c-d)^2}; a = 2,754 \pm 0,001; b = 11,7 \pm 0,04; c = 10,536 \pm 0,002;$ $m = 0,56 \pm 0,005; d = 6,32 \pm 0,008$
20.	$X = \frac{m^3(a+b)}{c-d}; a = 13,5 \pm 0,02; b = 3,7 \pm 0,02; c = 34,5 \pm 0,002;$ $m = 4,22 \pm 0,004; d = 23,725 \pm 0,005$
21.	$X = \frac{ab}{\sqrt[3]{c}}; a = 54,8 \pm 0,02; b = 2,45 \pm 0,01; c = 0,863 \pm 0,004$
22.	$X = \frac{ab^3}{48c}; a = 4,16 \pm 0,005; b = 12,163 \pm 0,002; c = 55,18 \pm 0,01$
23.	$X = \sqrt{\frac{ab}{c}}; a = 1,6531 \pm 0,0003; b = 3,78 \pm 0,002; c = 0,158 \pm 0,0005$
24.	$X = \frac{a^2b}{c^3}; a = 2,65 \pm 0,01; b = 1,84 \pm 0,006; c = 4,88 \pm 0,03$
25.	$X = \frac{ab}{c^2}; a = 0,142 \pm 0,0003; b = 1,71 \pm 0,002; c = 3,727 \pm 0,001$
26.	$X = \frac{ab^3}{c}; a = 0,1756 \pm 0,0001; b = 3,71 \pm 0,03; c = 0,285 \pm 0,0002$
27.	$X = \frac{a^2b}{c}; a = 4,632 \pm 0,003; b = 23,3 \pm 0,04; c = 11,3 \pm 0,06$
28.	$X = \frac{\sqrt{ab}}{c}; a = 3,456 \pm 0,002; b = 0,642 \pm 0,0005; c = 7,12 \pm 0,004$
29.	$X = \frac{(a+b)}{m\sqrt{c-d}}; a = 27,16 \pm 0,006; b = 5,03 \pm 0,01; c = 3,6 \pm 0,02;$ $m = 12,375 \pm 0,004; d = 86,2 \pm 0,05$

30.	$X = \frac{c(a-b)}{\sqrt{m+n}}; a = 16,342 \pm 0,001; b = 2,5 \pm 0,03; c = 38,17 \pm 0,002;$ $m = 3,6 \pm 0,04; n = 9,14 \pm 0,005$
31.	$X = \frac{ab}{\sqrt[3]{c}}; a = 4,16 \pm 0,005; b = 12,163 \pm 0,002; c = 55,18 \pm 0,01$
32.	$X = \frac{ab^3}{48c}; a = 54,8 \pm 0,02; b = 2,45 \pm 0,01; c = 0,863 \pm 0,004$
33.	$X = \sqrt{\frac{ab}{c}}; a = 2,65 \pm 0,01; b = 1,84 \pm 0,006; c = 4,88 \pm 0,03$
34.	$X = \frac{a^2b}{c^3}; a = 1,6531 \pm 0,0003; b = 3,78 \pm 0,002; c = 0,158 \pm 0,0005$
35.	$X = \frac{\pi^2}{4}ab; a = 54 \pm 0,5; b = 38,235 \pm 0,001; \pi = 3,14$

Завдання 1.3. Обчислити значення функції та оцінити абсолютну похибку, взявши значення аргументів з чотирма вірними цифрами. Будемо вважати похибки аргументів однаковими, що дорівнюють 0,0005. Варіанти завдань наведені в табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Варіант	Завдання	Варіант	Завдання
1	$y = \frac{\ln(\operatorname{tg} 20^\circ)}{\sqrt{\pi} \lg \sqrt{5}} + \sqrt[3]{e}$	19	$y = \frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sin 13^\circ} + \frac{\cos \sqrt{e}}{\ln \pi}$
2	$y = \frac{\cos \sqrt{5}}{\ln \pi \cdot \sqrt{30}} + e^2$	20	$y = \frac{\sqrt{3} \ln \sqrt{2} + \cos \sqrt{\pi}}{\sin 31^\circ}$
3	$y = \frac{\lg \sqrt{5} + e}{\sqrt{29} \cdot \sin \pi^2}$	21	$y = \frac{\cos \sqrt{\pi} + \ln(\sin 15^\circ)}{\lg e^2 + \sqrt{21}}$
4	$y = \frac{\sin \sqrt{11}}{\sqrt{3}} + \frac{\pi^2}{\lg \sqrt{19}}$	22	$y = \frac{\sqrt{2} + \sin 22^\circ}{\lg \sqrt{\pi} + \cos 12^\circ}$
5	$y = \frac{\sqrt{e} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \lg \pi^3}{\operatorname{tg} 31^\circ}$	23	$y = \frac{\sqrt{3} \ln \sqrt{2} + \cos \sqrt{\pi}}{\sin 31^\circ}$
6	$y = \frac{\lg(\cos 50^\circ)}{\sqrt{17}} + \frac{\sqrt[3]{e}}{\sin \sqrt{3}}$	24	$y = \frac{\sqrt[3]{28 + \sin e}}{\ln \sqrt{3} + \cos 46^\circ}$
7	$y = \frac{\lg \sqrt{11}}{\pi^2} + \sqrt{7} \cdot \operatorname{tge}$	25	$y = \frac{\sqrt{2} \cdot \ln(\cos 15^\circ)}{e^3} + \sqrt{\pi}$

8	$y = \frac{e^2 + \lg \sqrt{3}}{\sin 11^\circ + \sqrt{\pi}}$	26	$y = \frac{\ln \sqrt{\pi} + e^2}{\sin 45^\circ + \cos 20^\circ}$
9	$y = \frac{e^{0.5} \sin(\ln 5) + \ln \pi}{\operatorname{tg} 29^\circ}$	27	$y = \frac{\sqrt[3]{e}}{\cos 13^\circ} + \frac{\sin \sqrt{11}}{\ln \pi^2}$
10	$y = \frac{\sqrt{2} + \sin 22^\circ}{\lg \sqrt{\pi} + \cos 12^\circ}$	28	$y = \frac{\sin \sqrt{e} + \lg \sqrt{17}}{\operatorname{tg} 7^\circ + \sqrt[3]{28}}$
11	$y = \frac{\lg \sqrt{\pi} + e^3}{\sin \sqrt{2} + \cos 20^\circ}$	29	$y = \frac{\sin e + \cos 13^\circ}{\lg \sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{\pi}}$
12	$y = \frac{\sqrt{e} + \cos(\lg 5)}{\pi^3 + \sqrt{27}}$	30	$y = \frac{\cos 45^\circ + \ln(\sin 15^\circ)}{\lg e^2 + \sqrt[3]{9}}$
13	$y = \frac{e^3 + \sqrt{2}}{\lg \sqrt{\pi} \sin 33^\circ}$	31	$y = \frac{\ln(\operatorname{tg} 20^\circ)}{\sqrt{\pi} \lg \sqrt{5}} + \sqrt[3]{e}$
14	$y = \frac{\lg e^3 + \cos \sqrt{3} \ln \pi}{\sin 32^\circ}$	32	$y = \frac{\cos \sqrt{5}}{\ln \pi \cdot \sqrt{30}} + e^2$
15	$y = \frac{\sqrt[3]{7} + \sin e^2}{\ln \sqrt{2} + \cos 21^\circ}$	33	$y = \frac{\lg \sqrt{5} + e}{\sqrt{29} \cdot \sin \pi^2}$
16	$y = \frac{\lg(\cos 32^\circ)}{\sqrt[3]{\pi}} + \sqrt{e} \operatorname{tg} 5^\circ$	34	$y = \frac{\sin \sqrt{11}}{\sqrt{3}} + \frac{\pi^2}{\lg \sqrt{19}}$
17	$y = \sqrt{13} \lg(\cos 23^\circ) + \pi^3 \sin \sqrt{3}$	35	$y = \frac{\sqrt{e} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \lg \pi^3}{\operatorname{tg} 31^\circ}$
18	$y = \frac{\sqrt{7} + \sqrt[3]{e} \lg \pi^3}{\cos 21^\circ}$	36	$y = \frac{\sqrt{2} + \sin 22^\circ}{\lg \sqrt{\pi} + \cos 12^\circ}$

2. Застосування інтерполяційного многочлена Лагранжа

Задача інтерполювання. В обчислювальній практиці часто маємо справу з функціями $f(x)$, що задані вузлами (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

При розв'язуванні різних задач необхідно використовувати відомі значення $f(x)$ для обчислення значення функції у проміжних значеннях аргументу. У цьому випадку будують функцію $\varphi(x)$, яка є достатньо

простою для обчислень і в заданих точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ приймає значення $\varphi(x_0) = f(x_0), \varphi(x_1) = f(x_1), \varphi(x_2) = f(x_2), \dots, \varphi(x_n) = f(x_n)$, а в інших точках проміжку, що належить області визначення функції $f(x)$, наближено представляє функцію $f(x)$ з тією чи іншою точністю. Тобто при розв'язуванні задач замість функції $f(x)$ оперують функцією $\varphi(x)$. Задача побудови такої функції $\varphi(x)$ і є *задачею інтерполювання*. Найчастіше інтерполяційну функцію $\varphi(x)$ відшукують у вигляді алгебраїчного многочлена.

Приклад 2.1. Використовуючи схему Горнера, скласти таблицю значень многочлена

$P(x) = 0,883x^5 - 1,217x^4 + 1,452x^3 + 0,572x^2 - 2,343x + 1,158$
на проміжку $[0,5; 2,0]$ з кроком 0,25. Обчислення виконувати з точністю до 0,0001, відповідь округлити до тисячної.

Розв'язування. Для обчислення за схемою Горнера, скористаємося рекурентними співвідношеннями

$$b_n = a_n, b_j = a_j + b_{j+1}x_0, j = n - 1, \dots, 0,$$

де n - старший показник многочлена. Для аргументу $x_0 = 0,5$ обчислення наведені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

x_0	0,50
$a_5 = 0,883$	$b_5 = 0,883$
$a_4 = -1,217$	$b_4 = b_5 \cdot x_i + a_4 = 0,883 \cdot 0,50 - 1,217 = -0,7755$
$a_3 = 1,452$	$b_3 = b_4 \cdot x_i + a_3 = -0,7755 \cdot 0,50 + 1,452 = 1,06425$
$a_2 = 0,572$	$b_2 = b_3 \cdot x_i + a_2 = 1,06425 \cdot 0,50 + 0,572 = 1,1041$
$a_1 = -2,343$	$b_1 = b_2 \cdot x_i + a_1 = 1,1041 \cdot 0,50 - 2,343 = -1,7909$
$a_0 = 1,158$	$b_0 = b_1 \cdot x_i + a_0 = -1,7909 \cdot 0,50 + 1,158 = 0,2625$

Отже $P(0,50) = b_0 = 0,2625$.

Аналогічно розраховуємо значення многочлена при інших значеннях аргумента:

$$P(0,75) = 0,1595; P(1,00) = 0,5050; P(1,25) = 2,3731; \\ P(1,50) = 4,3752; P(1,75) = 9,6699; P(2,00) = 19,1600.$$

Округлюючи результати до тисячної, матимемо наступну відповідь (табл.2.3).

Таблиця 2.3

x_i	$P(x_i)$	x_i	$P(x_i)$
0,5	0,263	1,50	4,375
0,75	0,160	1,75	9,670
1,00	0,505	2,00	19,160
1,25	1,682		

Реалізація прикладу 2.1 в середовищі MATLAB наведена на рис. 2.1.

Оскільки при обчисленнях неодноразово виконуються однакові розрахунки за схемою Горнера, то була окремо написана програма `gorner(x)`, де x - значення аргументу многочлена (рис. 2.2). На початку програми має бути присутнім обов'язково слово `function`.

Коефіцієнти многочлена вводяться у вигляді матриці-рядка A . Для позначки матриці використовуються квадратні дужки, а між елементами ставляться пробіли. Щоб позначити відповідний елемент матриці, після її позначки в круглих дужках вказуються індекси відповідного елементу матриці. Назагал елементи матриці розділяються пробілами (або комами), а рядки матриці відокремлюються знаком «;».

В програмі було використано цикл `for`, який має наступний синтаксис:

```
for count=start:step:final
    «команди»
end
```

Вираз `count` означає позначку змінної циклу, `start` – початкове значення змінної циклу, `step` – крок, на який збільшується значення змінної циклу, `final` – кінцеве значення змінної циклу. За замовчуванням `step=1`.

Для обчислення значення многочлена за заданим значенням його аргументу передбачена в MATLAB функція `y=polyval(p,x)`, де p - заданий вектор коефіцієнтів многочлена, а x - значення аргументу многочлена. Програмна реалізація прикладу 2.1 з використанням функції `polyval` наведена на рис. 2.3.

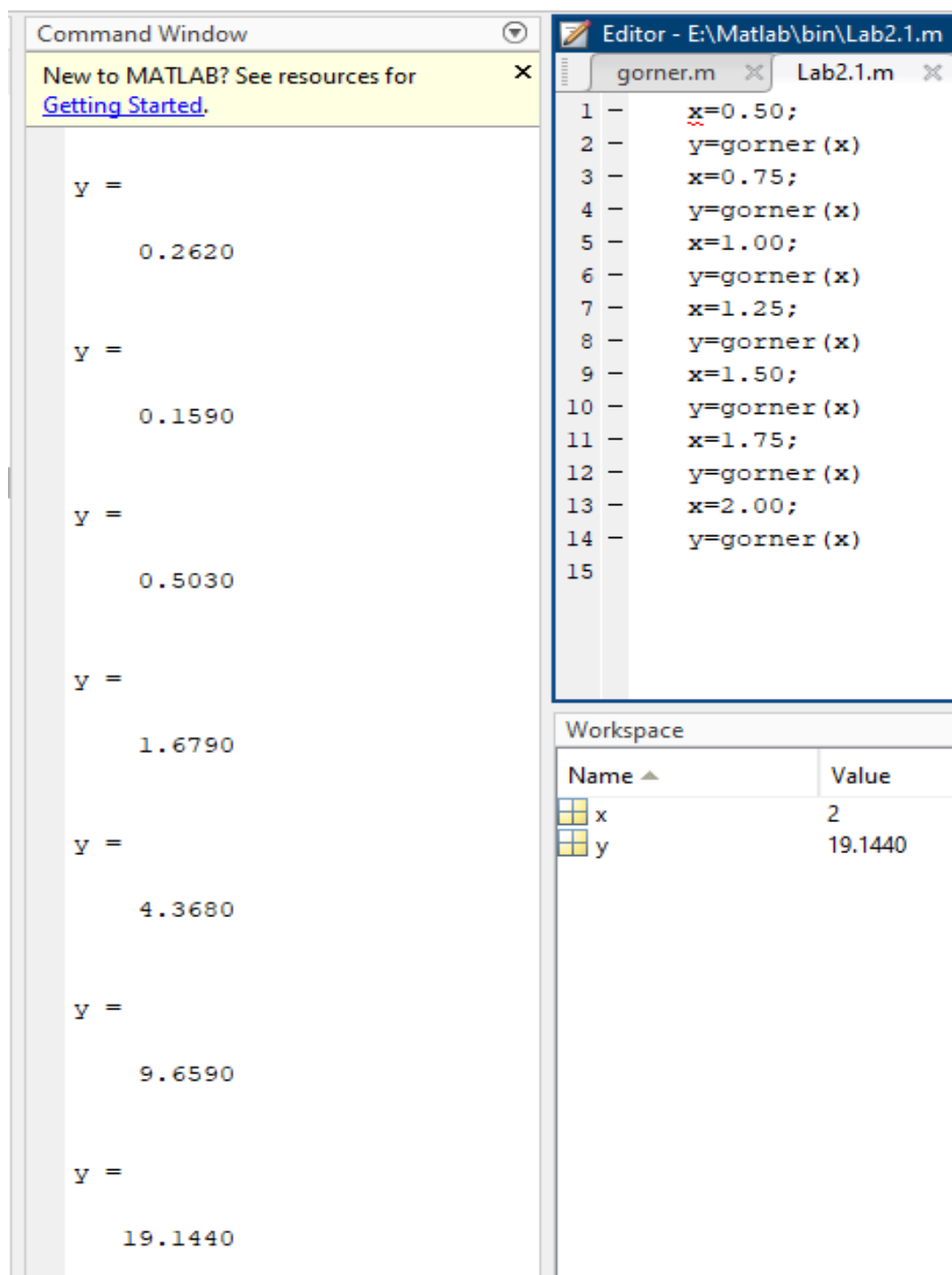


Рис. 2.1. Реалізація прикладу 2.1 в середовищі MATLAB

```

Editor - E:\Matlab\bin\gorner.m
gorner.m  x Lab2.1.m  +
1  function y=gorner(x)
2  A=[0.883 -1.217 1.45 0.572 -2.343 1.158];
3  n=6;
4  z(1,1)=A(1,1);
5  for i=2:n
6  z(1,i)=z(1,i-1)*x+A(1,i);
7  end
8  y=round(z(1,n),3);
9

```

Рис. 2.2. Реалізація програми gorner в середовищі MATLAB

Приклад 2.2. Обчислити значення функції $y = e^x$ при значенні аргументу $x = 0,826$ за методом розкладу в ряд з точністю до 10^{-6} .

Розв'язування. Ряд Маклорена для функції $y = e^x$ має вигляд

$$e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}x^4 + \dots,$$

який можна розглянути як суму доданків z_k ($k = 0, 1, \dots, n$), де $z_0 = 1$, $z_1 = x$, ..., $z_k = \frac{x}{k} z_{k-1}$, ..., $z_n = \frac{x}{n} z_{n-1}$. Обчислення доданків продовжується доти, поки черговий доданок не виявиться меншим за задану точність. Складемо таблицю 2.4, яка міститиме проміжні результати:

Таблиця 2.4

k	z_k	k	z_k
0	1	5	0,003200420
1	0,826	6	0,00044111
2	0,341138	7	0,00005205
3	0,09392666	8	0,00000537
4	0,01939586	9	0,00000049
		10	0,00000004

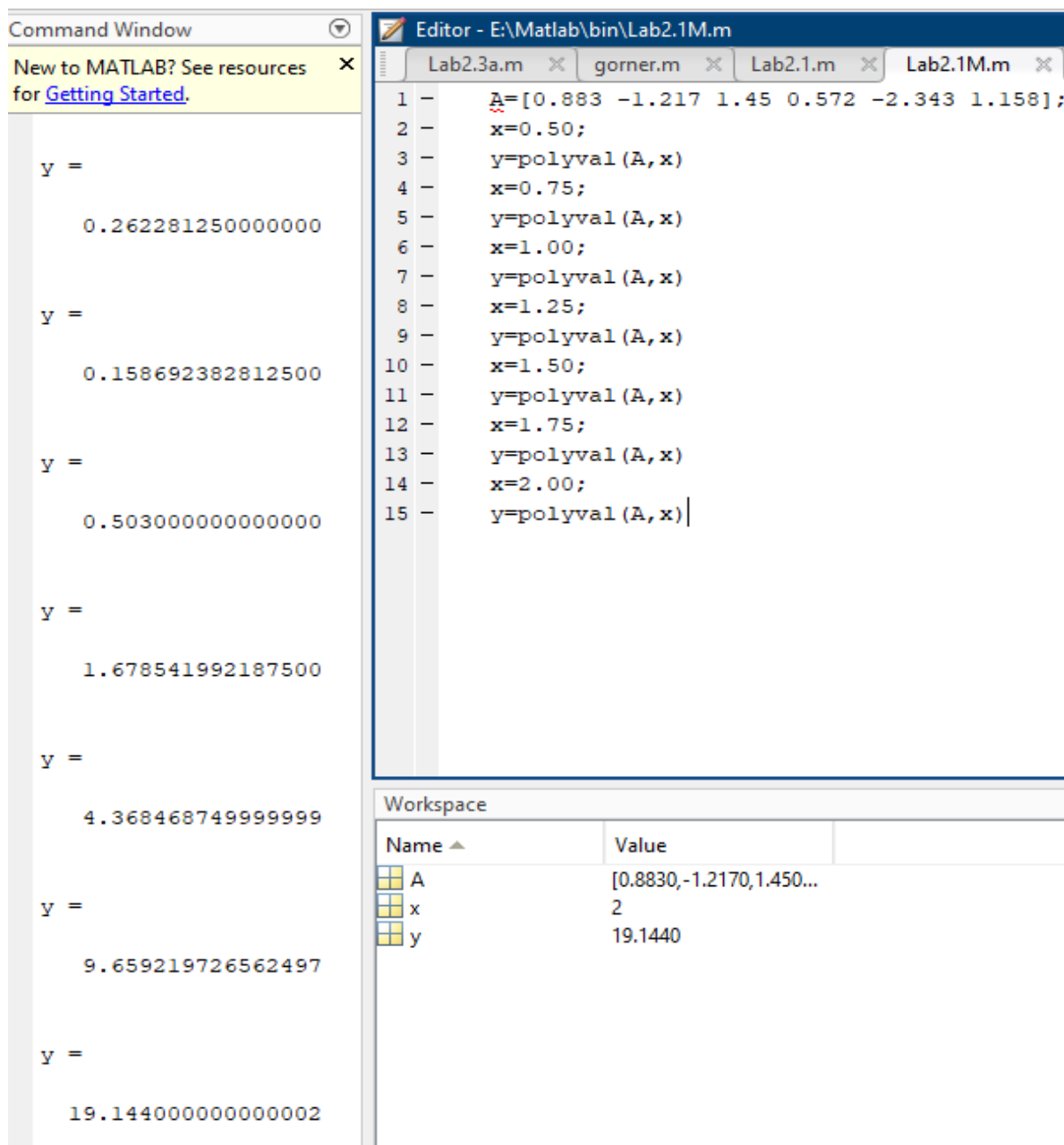


Рис. 2.3. Реалізація прикладу 2.1 з використанням функції `polyval`

На десятому кроці отримали доданок, що є меншим за 10^{-6} , тому обчислення складових таблиці припиняються. Шукане значення функції отримаємо шляхом додавання проміжних результатів таблиці:

$$e^{0.826} \approx 2,284164.$$

Реалізація прикладу 2.2 в середовищі MATLAB наведена на рис. 2.4.

При написанні програми було застосовано цикл `while`, який використовується для організації повторюваних операцій доки виконується умова циклу. Цикл `while` має наступний синтаксис:

```

while «умова»
    «команди»
end

```

При порушенні «умови» працюють команди після слова end.

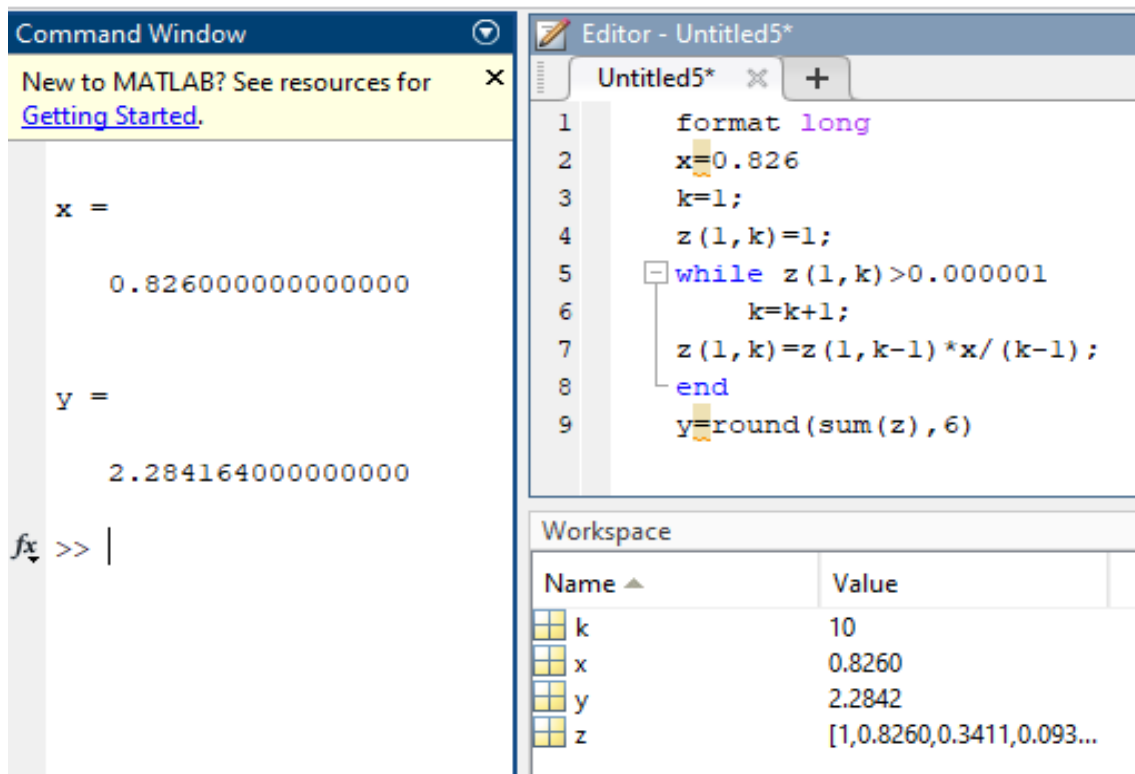


Рис. 2.4. Реалізація прикладу 2.2 в середовищі MATLAB

Приклад.2.3. Знайти наближене значення функції в точці x_0 за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа, якщо функція задана:

а) у нерівновіддалених вузлах (табл. 2.5)

Таблиця 2.5

x	y
0,05	0,050042
0,10	0,100335
0,17	0,171657
0,25	0,255342
0,30	0,309336
0,36	0,376403

$x_0=0,263$.

Розв'язування. Скористаємося формулою інтерполяційного многочлена Лагранжа для нерівновіддалених вузлів у вигляді:

$$L_n(x) = R_n \cdot \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{D_i},$$

де $R_n = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$;

$D_i = (x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)$.

Результати обчислень занесемо в таблицю 2.6.

Таблиця 2.6

i	Різниці						D_i	$\frac{y_i}{D_i}$
1	0,213	-0,05	-0,12	-0,20	-0,25	-0,31	$-0,19809 \cdot 10^{-4}$	-2526,2
2	0,05	0,163	-0,07	-0,15	-0,20	-0,26	$-0,44499 \cdot 10^{-5}$	25547,7
3	0,12	0,07	0,093	-0,08	-0,13	-0,19	$-0,154365 \cdot 10^{-5}$	-111202
4	0,20	0,15	0,08	0,013	-0,05	-0,11	$0,1716 \cdot 10^{-6}$	1488007
5	0,25	0,20	0,13	0,05	-0,037	-0,06	$0,7215 \cdot 10^{-6}$	428740,0
6	0,31	0,26	0,19	0,11	0,06	-0,097	$-0,980402 \cdot 10^{-6}$	-38392,7

Отже, $R_n = 0,1506492 \cdot 10^{-6}$ (добуток елементів головної діагоналі),

$$\sum_{i=1}^6 \frac{y_i}{D_i} = 1790173,8,$$

а $L_n(0,263) = 0,1506492 \cdot 10^{-6} \cdot 1790173,8 = 0,269678$.

Реалізація прикладу 2.3а в середовищі MATLAB наведена на рис. 2.5.

В програмі була використана функція `sum(k)`, яка сумує всі елементи матриці `k`.

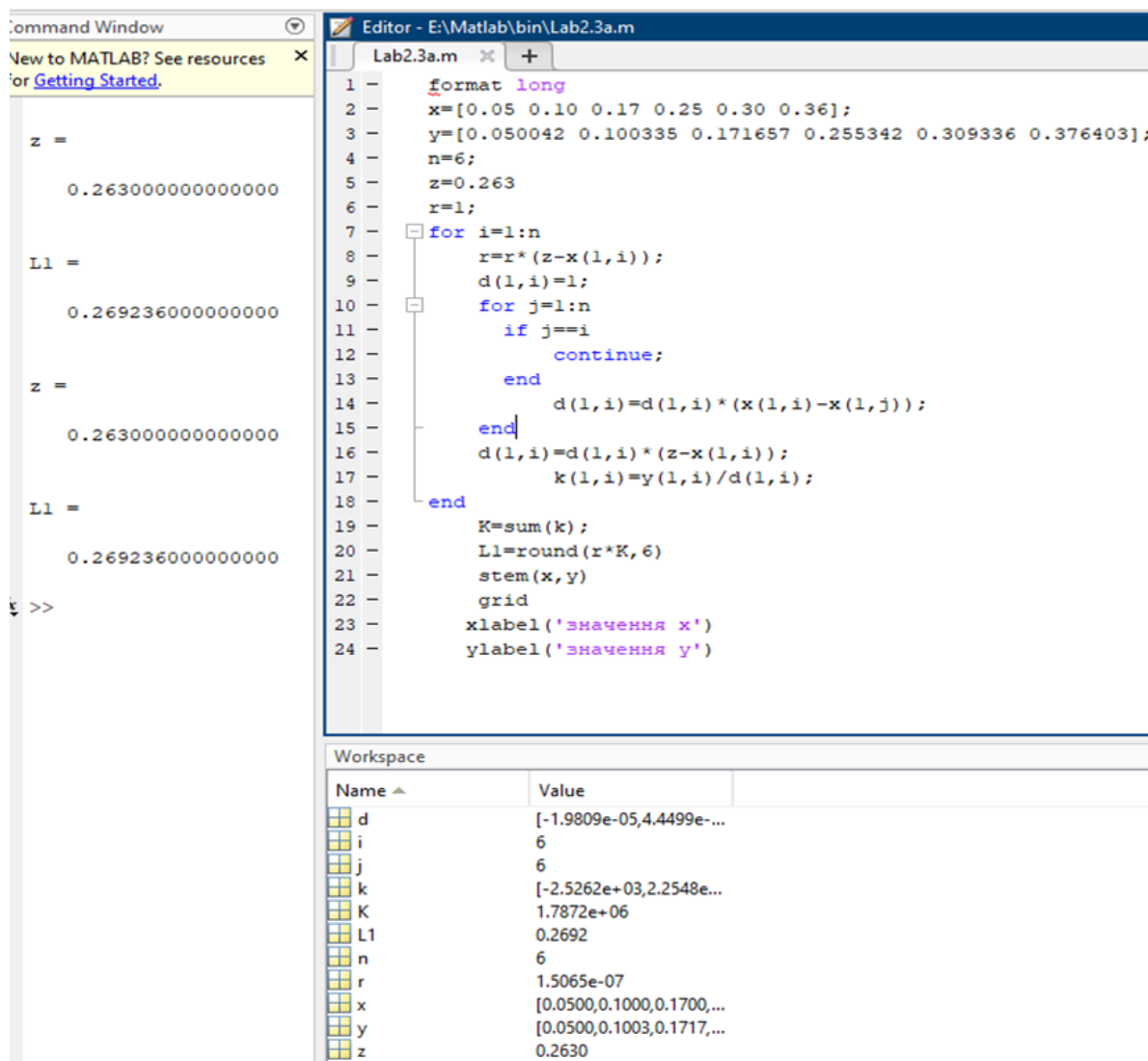


Рис. 2.5. Реалізація прикладу 2.3а в середовищі MATLAB

Останні чотири рядки програми реалізують графічне зображення результуючої функції, що задана таблично (рис. 2.6).

Процедура `stem(x,y)` забезпечує зображення дискретної функції у вигляді окремих вертикальних ліній, де x - значення аргументу, y - відповідні значення функції.

Графіки в MATLAB виводяться у графічне вікно, яке називається фігурою. Функція `grid` забезпечує нанесення координатної сітки, а `xlabel` та `ylabel` - підписи до горизонтальної та вертикальної осей відповідно. Детальніше про роботу з графіками в MATLAB буде розказано нижче.

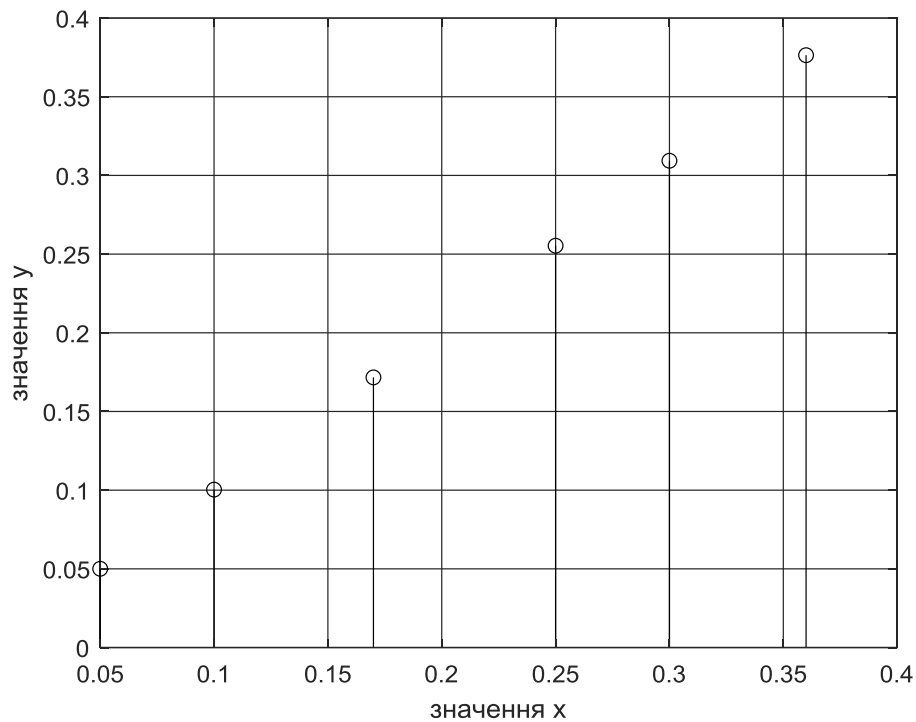


Рис. 2.6. Результируюча функція з прикладу 2.3а

б) у рівновіддалених вузлах (табл. 2.7)

Таблиця 2.7

x	y
0,101	1,26183
0,106	1,27644
0,111	1,29122
0,116	1,30617
0,121	1,32130
0,126	1,32660

$$x_0=0,1157.$$

Розв'язування. Скористаємося формулою інтерполяційного многочлена Лагранжа для рівновіддалених вузлів у вигляді:

$$L_n(x) = R_n(q) \cdot \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{(q-i)C_i'}$$

де $q = \frac{x-x_0}{h}$;

$$R_n(q) = q(q-1)(q-2) \dots (q-n-1);$$

$$C_i = (-1)^{n-i} \cdot i! \cdot (n-i)!.$$

Відповідне значення змінної

$$q = \frac{0,1157 - 0,101}{0,005} = 2,94.$$

Результати обчислень занесемо в табл.2.8.

Таблиця 2.8

i	x_i	$q-i$	C_i	$(q-i)C_i$	$\frac{y_i}{(q-i)C_i}$
0	0,101	2,94	-120	-352,8	-0,0035766
1	0,106	1,94	24	46,56	0,0274149
2	0,111	0,94	-12	-11,28	-0,1144691
3	0,116	-0,06	12	-0,72	-1,8141250
4	0,121	-1,06	-24	25,44	0,0519379
5	0,126	-2,06	120	-247,2	-0,0054069

Отже,

$$R_n(q) = -0,7024271 \text{ (добуток елементів третього стовбця),}$$

$$\sum_{i=0}^5 \frac{y_i}{(q-i)C_i} = -1,858225,$$

$$L_n(0,1157) = (-0,7024271)(-1,858225) = 1,30527.$$

Реалізація прикладу 2.3б в середовищі MATLAB наведена на рис. 2.7. В програмі була використана функція factorial(k), яка обчислює значення k!.

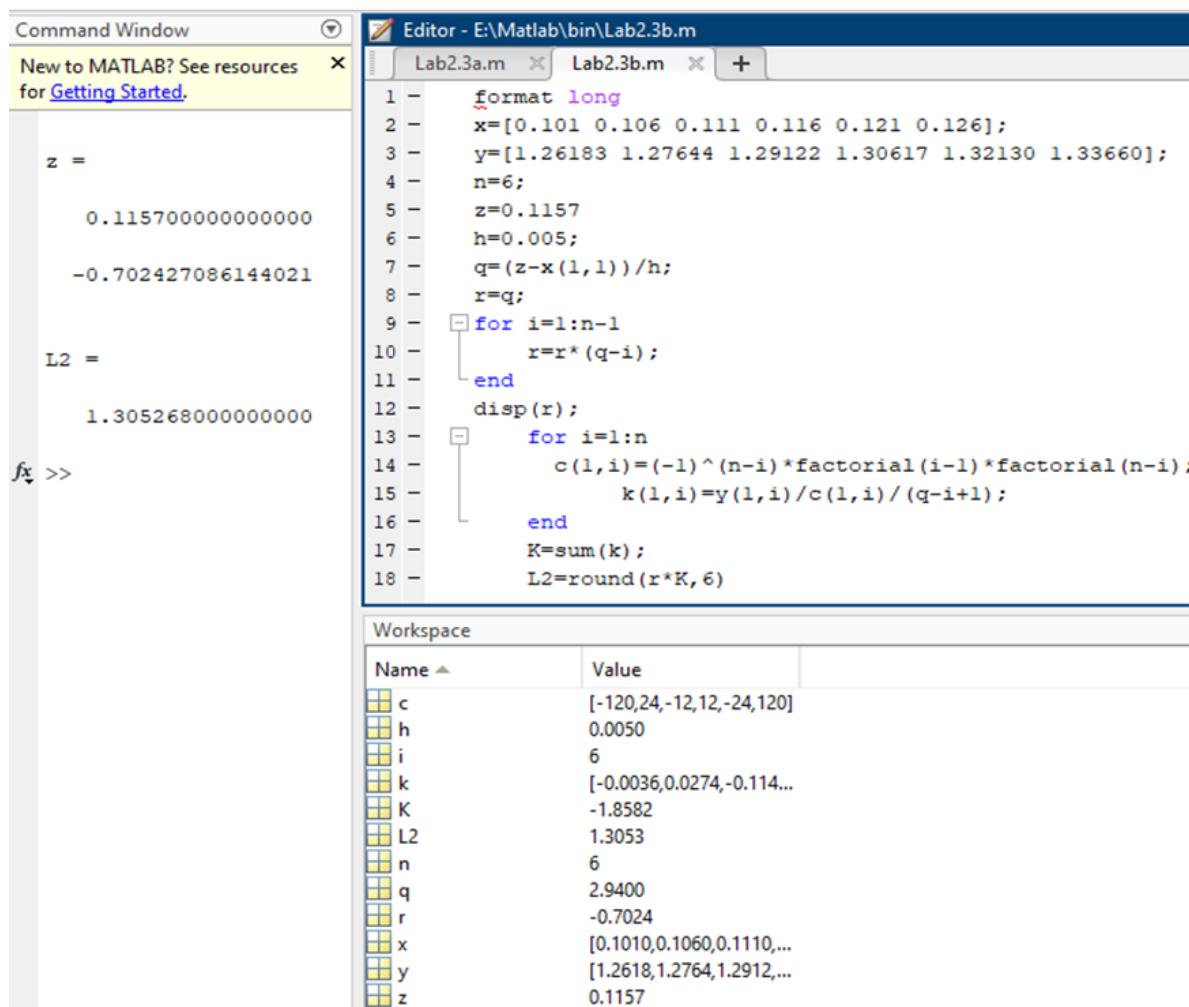


Рис. 2.7. Реалізація прикладу 2.3б в середовищі MATLAB

Завдання до лабораторної роботи №2

Завдання 2.1. Використовуючи схему Горнера, скласти таблицю значень многочлена на проміжку $[0,5; 2,0]$ з кроком 0,25. Обчислення виконувати з точністю до 0,0001, відповідь округлити до тисячної. Варіанти завдань наведені в табл. 2.9.

Таблиця 2.9

Варіант	Многочлен
1	$1,823x^5 + 0,147x^4 - 0,801x^3 + 2,359x^2 - 1,186x + 3,971$
2	$1,572x^5 + 0,253x^4 - 0,749x^3 + 1,278x^2 - 2,176x + 3,998$
3	$1,498x^5 - 0,137x^4 - 0,576x^3 + 3,194x^2 - 1,132x + 2,281$
4	$0,421x^5 - 0,598x^4 + 0,562x^3 + 1,154x^2 - 1,196x - 1,587$

5	$0,823x^5 - 1,537x^4 - 0,126x^3 + 1,312x^2 - 2,178x + 2,387$
6	$0,586x^5 + 1,176x^4 - 0,215x^3 + 1,322x^2 - 3,176x - 1,962$
7	$1,286x^5 + 0,121x^4 - 0,354x^3 + 3,087x^2 - 1,196x + 0,421$
8	$0,323x^5 - 1,187x^4 + 1,088x^3 + 0,756x^2 - 3,122x + 2,762$
9	$0,763x^5 - 0,337x^4 + 1,214x^3 - 2,464x^2 + 1,276x + 0,912$
10	$1,128x^5 + 0,137x^4 - 0,314x^3 + 1,164x^2 - 2,276x - 1,162$
11	$0,323x^5 + 0,232x^4 - 1,414x^3 + 0,764x^2 + 3,176x - 0,766$
12	$1,025x^5 - 0,142x^4 + 0,513x^3 + 1,189x^2 - 3,151x + 1,599$
13	$0,498x^5 - 0,841x^4 + 1,214x^3 + 2,462x^2 - 1,778x - 0,911$
14	$1,103x^5 - 1,237x^4 + 0,643x^3 - 0,784x^2 + 2,576x + 0,487$
15	$0,703x^5 + 1,139x^4 - 0,574x^3 + 1,868x^2 - 2,167x + 1,468$
16	$1,783x^5 + 0,151x^4 - 0,791x^3 + 2,362x^2 - 1,196x + 3,891$
17	$1,572x^5 + 0,253x^4 - 0,749x^3 + 1,278x^2 - 2,176x + 3,998$
18	$1,518x^5 - 0,139x^4 - 0,582x^3 + 3,187x^2 - 1,141x + 2,301$
19	$0,391x^5 - 0,618x^4 + 0,558x^3 + 1,164x^2 - 1,206x - 1,592$
20	$0,783x^5 - 1,542x^4 - 0,118x^3 + 1,292x^2 - 2,188x + 2,417$
21	$0,578x^5 + 1,206x^4 - 0,208x^3 + 1,292x^2 - 3,181x - 1,956$
22	$1,277x^5 + 0,091x^4 - 0,366x^3 + 3,103x^2 - 1,211x + 0,433$
23	$0,298x^5 - 1,199x^4 + 1,102x^3 + 0,744x^2 - 3,118x + 2,805$
24	$0,758x^5 - 0,342x^4 + 1,208x^3 - 2,459x^2 + 1,288x + 0,897$
25	$1,133x^5 + 0,128x^4 - 0,307x^3 + 1,159x^2 - 2,301x - 1,145$
26	$0,328x^5 + 0,228x^4 - 1,408x^3 + 0,758x^2 + 3,188x - 0,788$
27	$1,025x^5 - 0,145x^4 + 0,515x^3 + 1,185x^2 - 3,155x + 1,595$
28	$0,502x^5 - 0,842x^4 + 1,212x^3 + 2,468x^2 - 1,788x - 0,908$
29	$1,098x^5 - 1,228x^4 + 0,655x^3 - 0,802x^2 + 2,568x + 0,501$
30	$0,699x^5 + 1,141x^4 - 0,582x^3 + 1,871x^2 - 2,202x + 1,503$
31	$1,723x^5 + 0,147x^4 - 0,821x^3 + 2,369x^2 - 1,183x + 3,961$
32	$1,57\ddot{x}x^5 + 0,313x^4 - 0,699x^3 + 1,274x^2 - 2,166x + 3,978$
33	$1,468x^5 - 0,147x^4 - 0,581x^3 + 3,189x^2 - 1,128x + 2,278$
34	$0,427x^5 - 0,593x^4 + 0,559x^3 + 1,161x^2 - 1,188x - 1,591$

Завдання 2.2. Обчислити значення функції $y = e^x$ при значенні аргументу $x = 0,669 + 0,023n$ за методом розкладу в ряд з точністю до 10^{-6} , де n – номер варіанта.

Завдання 2.3. Знайти наближене значення функції в точці x_0 за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа, якщо функція задана:

1) у нерівновіддалених вузлах, $x_0 = 0,1 + 0,0033n$, де n – номер варіанта. Варіанти завдань наведені в табл. 2.10.

Таблиця 2.10

x	y
0,02	$1,02316+0,00001n$
0,08	$1,09590+0,00001n$
0,12	$1,14725+0,00001n$
0,17	$1,21483+0,00001n$
0,23	$1,30120+0,00001n$
0,30	$1,40976+0,00001n$

2) у рівновіддалених вузлах, $x_0 = 0,12 + 0,0033n$, де n – номер варіанта. Варіанти завдань наведені в таблиці 2.11.

Таблиця 2.11

x	y
0,115	$8,65729+0,00001n$
0,120	$8,29329+0,00001n$
0,125	$7,95829+0,00001n$
0,130	$7,64893+0,00001n$
0,135	$7,36235+0,00001n$
0,140	$7,09613+0,00001n$

3. Застосування інтерполяційного многочлена Ньютона

Приклад 3.1. Використовуючи першу та другу інтерполяційні формули Ньютона для рівновіддалених вузлів, обчислити значення функції (табл. 3.1) при значеннях аргументу $x_1=1,2273$; $x_2=1,253$; $x_3=1,210$; $x_4=1,2638$.

Таблиця 3.1

Функція	
x	y
1,215	0,106044
1,220	0,113276
1,225	0,119671
1,230	0,125324
1,235	0,130328
1,240	0,134776
1,245	0,138759
1,250	0,142367
1,255	0,145688
1,260	0,148809

Розв'язування. Побудуємо табл. 3.2 кінечних різниць, де

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, $\Delta y_2 = y_3 - y_2$, $\Delta y_3 = y_4 - y_3$, $\Delta y_4 = y_5 - y_4$,
 $\dots$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$, $\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$, $\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$, $\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3$,
 $\dots$, $\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2$,
 $\dots$, $\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0$, $\Delta^4 y_1 = \Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1$, $\Delta^4 y_2 = \Delta^3 y_3 - \Delta^3 y_2$,
 $\dots$, $\Delta^5 y_0 = \Delta^4 y_1 - \Delta^4 y_0$, $\Delta^5 y_1 = \Delta^4 y_2 - \Delta^4 y_1$, $\Delta^5 y_2 = \Delta^4 y_3 - \Delta^4 y_2$,
 $\dots$, $\Delta^6 y_0 = \Delta^5 y_1 - \Delta^5 y_0$, $\Delta^6 y_1 = \Delta^5 y_2 - \Delta^5 y_1$, $\Delta^6 y_2 = \Delta^5 y_3 - \Delta^5 y_2$,
 $\dots$

Таблиця 3.2

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1,215	0,106044	0,007232	-0,000837	0,000095
1,220	0,113276	0,006395	-0,000742	0,000093
1,225	0,119671	0,005653	-0,000649	0,000093
1,230	0,125324	0,005004	-0,000556	0,000091
1,235	0,130328	0,004448	-0,000465	0,000090
1,240	0,134776	0,003983	-0,000375	0,000088
1,245	0,138759	0,003608	-0,000287	0,000087
1,250	0,142367	0,003321	-0,000200	-
1,255	0,145688	0,003121	-	-
1,260	0,148809	-	-	-

Оскільки різниці третього порядку майже сталі, то при обчисленнях обмежимося ними.

Для пошуку значення функції в точках $x_1=1,2273$ та $x_3=1,210$ скористаємося першою інтерполяційною формулою Ньютона

$$p_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + q(q-1)\dots(q-n+1)\frac{\Delta^n y_0}{n!},$$

де $q = \frac{x-x_0}{h}$.

Якщо $x_1=1,2273$, то за x_0 приймемо 1,225. У цьому випадку

$$q = \frac{1,2273 - 1,225}{0,005} = 0,46,$$

а значення многочлена -

$$\begin{aligned} p_n(1,2273) &= 0,119671 + 0,46 \cdot 0,005653 + \frac{0,46 \cdot (0,46 - 1)}{2!} \\ &\cdot (-0,000649) + \frac{0,46 \cdot (0,46 - 1) \cdot (0,46 - 2)}{3!} \cdot 0,000093 \\ &\approx 0,122358. \end{aligned}$$

Якщо $x_3=1,210$, то за x_0 приймемо 1,215. У цьому випадку

$$q = \frac{1,210 - 1,215}{0,005} = -1,$$

а значення многочлена -

$$\begin{aligned} p_n(1,210) &= 0,106044 + (-1) \cdot 0,007232 + \frac{(-1) \cdot (-1 - 1)}{2!} (-0,000649) \\ &+ \frac{(-1) \cdot (-1 - 1) \cdot (-1 - 2)}{3!} \cdot 0,000095 \approx 0,097880. \end{aligned}$$

Для пошуку значення функції в точках $x_2=1,253$ та $x_4=1,2638$ скористаємося другою інтерполяційною формулою Ньютона

$$p_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + q(q+1)\dots(q+n-1)\frac{\Delta^n y_0}{n!},$$

де $q = \frac{x-x_n}{h}$.

Якщо $x_2=1,253$, то за x_0 приймемо 1,255. У цьому випадку

$$q = \frac{1,253 - 1,255}{0,005} = -0,4,$$

а значення многочлена -

$$p_n(1,253) = 0,145688 + (-0,4) \cdot 0,003321 + \frac{(-0,4) \cdot (-0,4 + 1)}{2!} \times (-0,000287) + \frac{(-0,4) \cdot (-0,4 + 1) \cdot (-0,4 + 2)}{3!} \cdot 0,000089 \approx 0,144388.$$

Якщо $x_4=1,2638$, то за x_0 приймемо 1,260. У цьому випадку

$$q = \frac{1,2638 - 1,260}{0,005} = 0,7,$$

а значення многочлена -

$$p_n(1,2638) = 0,148809 + 0,76 \cdot 0,003121 + \frac{0,76 \cdot (0,76 + 1)}{2!} \times (-0,000200) + \frac{0,76 \cdot (0,76 + 1) \cdot (0,76 + 2)}{3!} \cdot 0,000087 \approx 0,151101.$$

Реалізація прикладу 3.1 в середовищі MATLAB наведена на рис. 3.1, 3.2, 3.3 та 3.4.

```

1 format long
2 x=[1.215 1.220 1.225 1.230 1.235 1.240 1.245 1.250 1.255 1.260];
3 y=[0.106044 0.113276 0.119671 0.125324 0.130328 0.134776 0.138759 0.142367 0.145688 0.148809];
4 n=10;
5 toch=10^(-4);
6 for i=1:n-1
7     for j=1:n-1
8         D(i,j)=0;
9     end
10 end
11 for i=1:n-1
12     D(i,1)=y(1,i+1)-y(1,i);
13 end
14 for j=2:n-1
15     for i=1:n-j
16         D(i,j)=D(i+1,j-1)-D(i,j-1);
17     end
18     for i=1:n-j
19         M=abs(max(D(i,j)));
20     end
21     if M<toch
22         break
23     end
24 end
25 h=0.005;
26 z=1.2273
27 m=3;
28 q=(z-x(1,m))/h;
29 k=y(1,m);
30 t(1,1)=1;
31 for i=1:j
32     t(i+1,1)=t(i,1)*(q-i+1)/i;
33     k=k+t(i+1,1)*D(m,i);
34 end
35 N1=round(k,6)
  
```

Command Window:

```

z =
1.227300000000000

N1 =
0.122358000000000
  
```

Workspace:

Name	Value
D	9x9 double
h	0.0050
i	3
j	3
k	0.1224
m	3
N1	0.122358

Рис. 3.1. Реалізація прикладу 3.1 для $x_1=1,2273$ в середовищі MATLAB

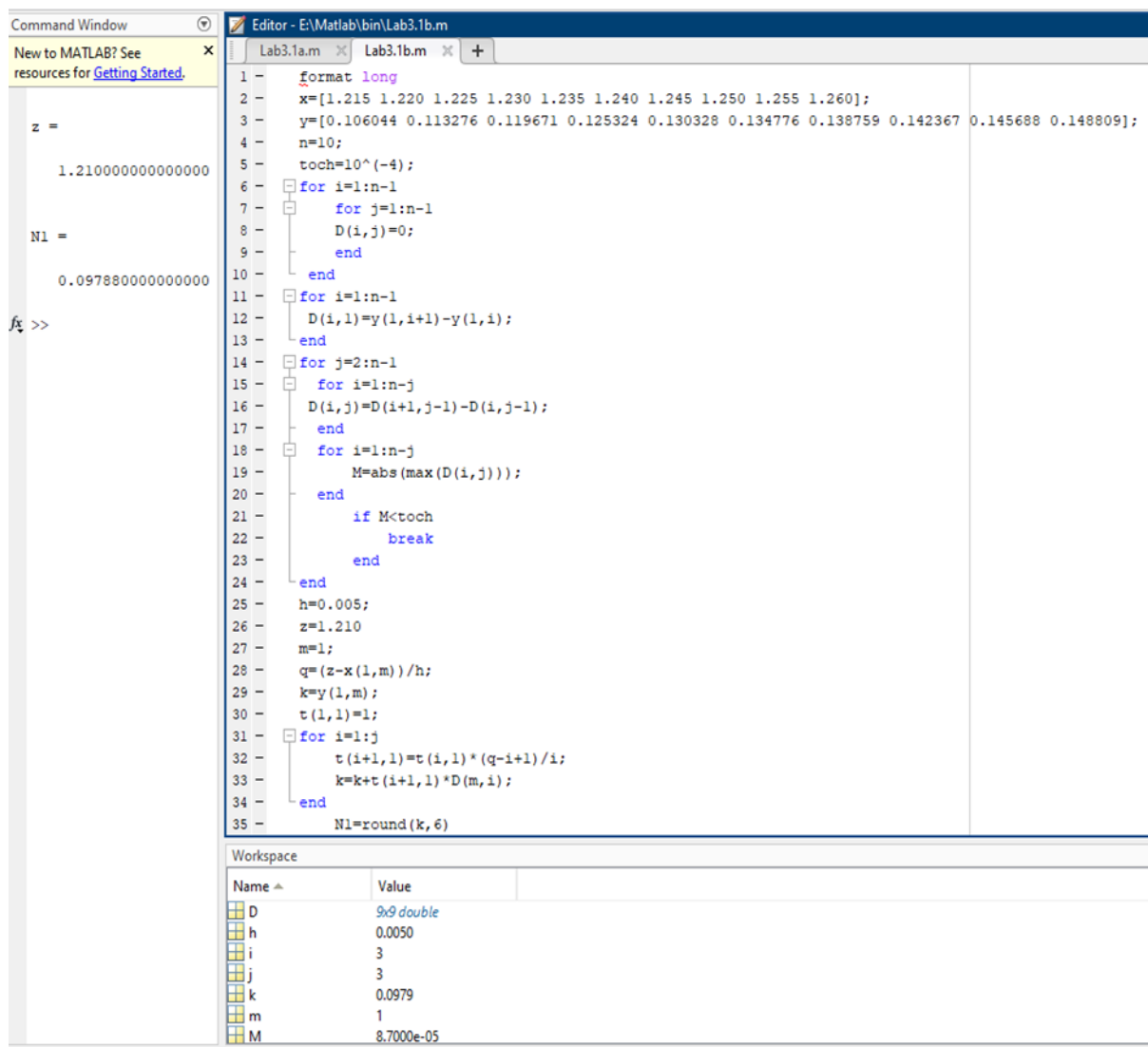


Рис. 3.2. Реалізація прикладу 3.1 для $x_3=1,210$ в середовищі MATLAB

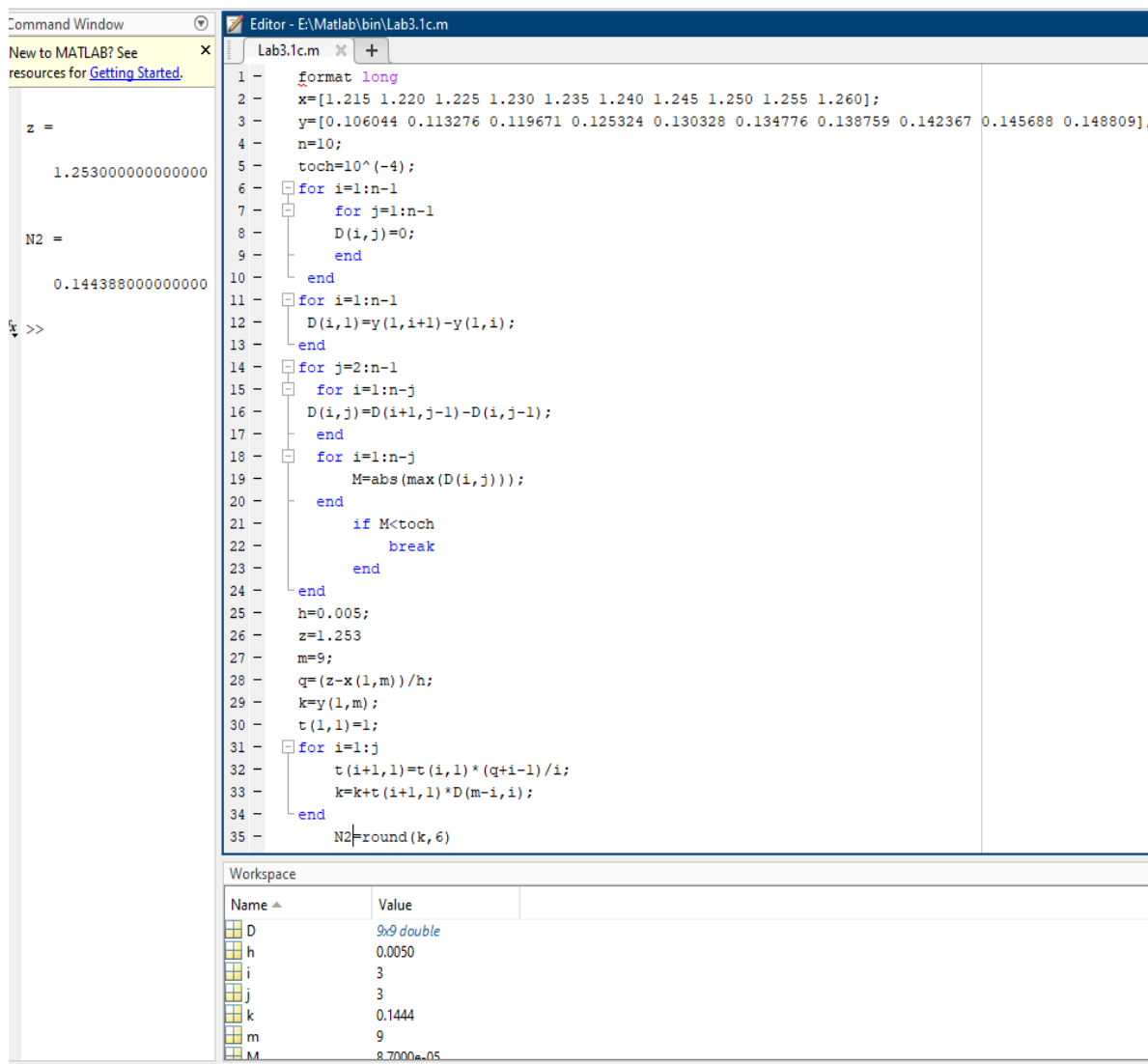


Рис. 3.3. Реалізація прикладу 3.1 для $x_2=1,253$ в середовищі MATLAB

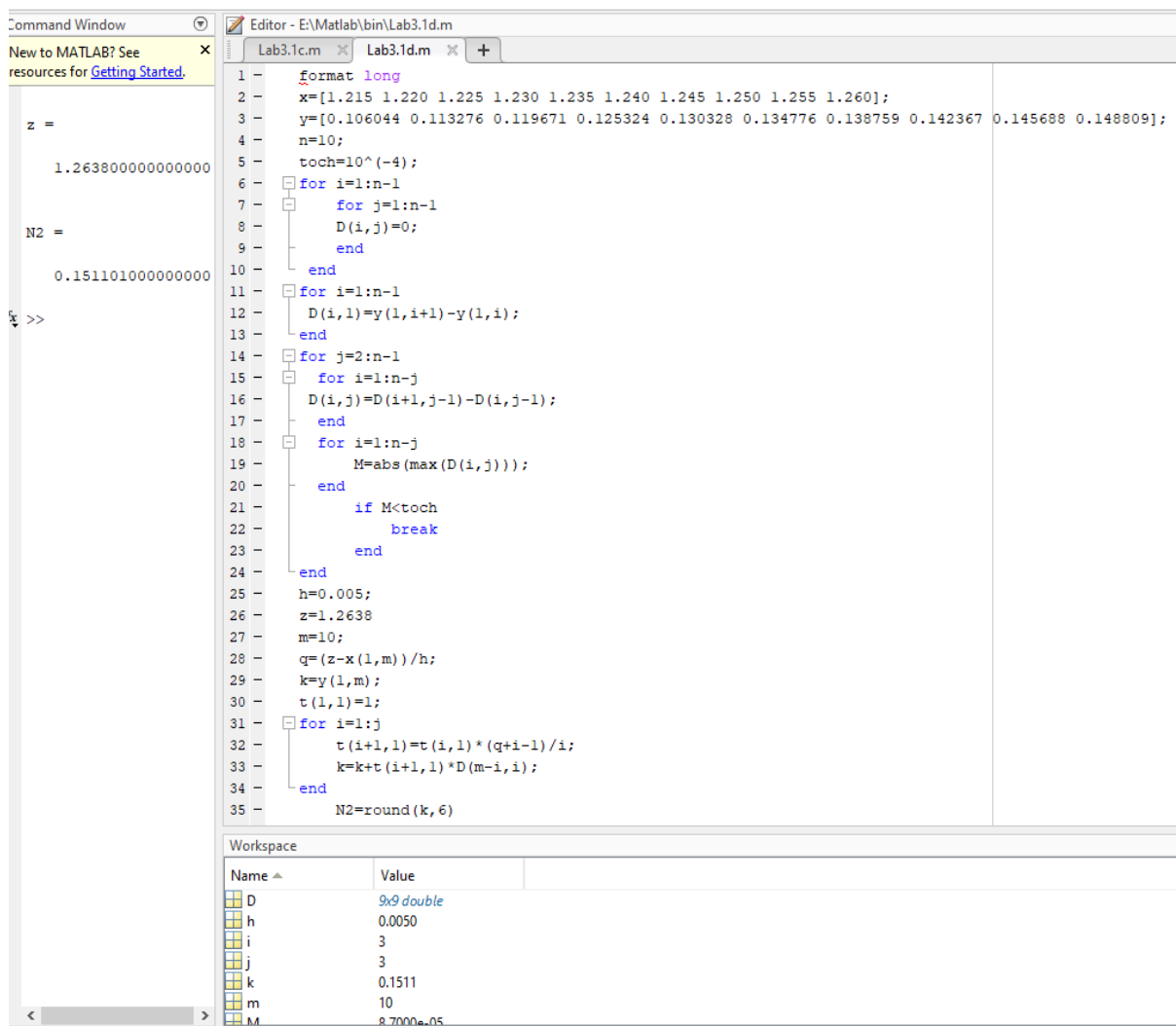


Рис. 3.4. Реалізація прикладу 3.1 для $x_4=1, 2638$ в середовищі MATLAB

Приклад 3.2. Використовуючи першу та другу інтерполяційні формули Ньютона для нерівновіддалених вузлів, обчислити значення функції (табл. 3.3) при значеннях аргументу $x = 0,112$; $x=0,133$.

Таблиця 3.3

Функція	
x	y
0,103	2,01284
0,108	2,03342
0,115	2,06070
0,120	2,07918
0,128	2,10721
0,136	2,13354
0,141	2,14922
0,150	2,17609

Розв'язування. Побудуємо табл. 3.4 розподілених різниць за формулами

$$f(x_i, x_{i-1}) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}; f(x_i, x_{i-1}, x_{i-2}) = \frac{f(x_i, x_{i-1}) - f(x_{i-1}, x_{i-2})}{x_i - x_{i-2}}.$$

Таблиця 3.4

x_i	y_i	$f(x_i, x_{i-1})$	$f(x_i, x_{i-1}, x_{i-2})$
0,103	2,01284	4,116	-18,238095
0,108	2,03342	3,897143	-16,761905
0,115	2,06070	3,696	-14,788462
0,120	2,07918	3,503750	-13,281250
0,128	2,10721	3,291250	-11,942308
0,136	2,13354	3,136	-
0,141	2,14922	-	-

Обчислення значень функції відбуватимуться за формулою:

$$y(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_1, x_0) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_2, x_1, x_0).$$

При знаходженні значення функції в точці $x = 0,112$ візьмемо за x_0 спочатку 0,103, а потім 0,108:

$$y(0,112) = 2,01284 + (0,112 - 0,103) \cdot 4,116 + (0,112 - 0,103) \cdot (0,112 - 0,108) \cdot (-18,238095) \approx 2,04923;$$

$$y(0,112) = 2,03342 + (0,112 - 0,108) \cdot 3,897143 + (0,112 - 0,108) \cdot (0,112 - 0,115) \cdot (-16,761905) \approx 2,04921.$$

Середнє арифметичне результатів дає $y(0,112) \approx 2,04922$.

При обчисленні значення функції в точці $x = 0,133$ візьмемо за x_0 спочатку 0,120, а потім 0,128:

$$y(0,133) = 2,07918 + (0,133 - 0,120) \cdot 3,503750 + (0,133 - 0,120) \cdot (0,133 - 0,128) \cdot (-13,281250) \approx 2,12387;$$

$$y(0,133) = 2,10721 + (0,133 - 0,128) \cdot 3,291250 + (0,133 - 0,128) \cdot (0,133 - 0,136) \cdot (-11,942308) \approx 2,12385.$$

Середнє арифметичне результатів дає $y(0,133) \approx 2,12386$.

Відповідь. $y(0,112) \approx 2,04922$; $y(0,133) \approx 2,12386$.

Реалізація прикладу 3.2 в середовищі MATLAB наведена на рис. 3.5 з використанням програми Newton (рис. 3.6).

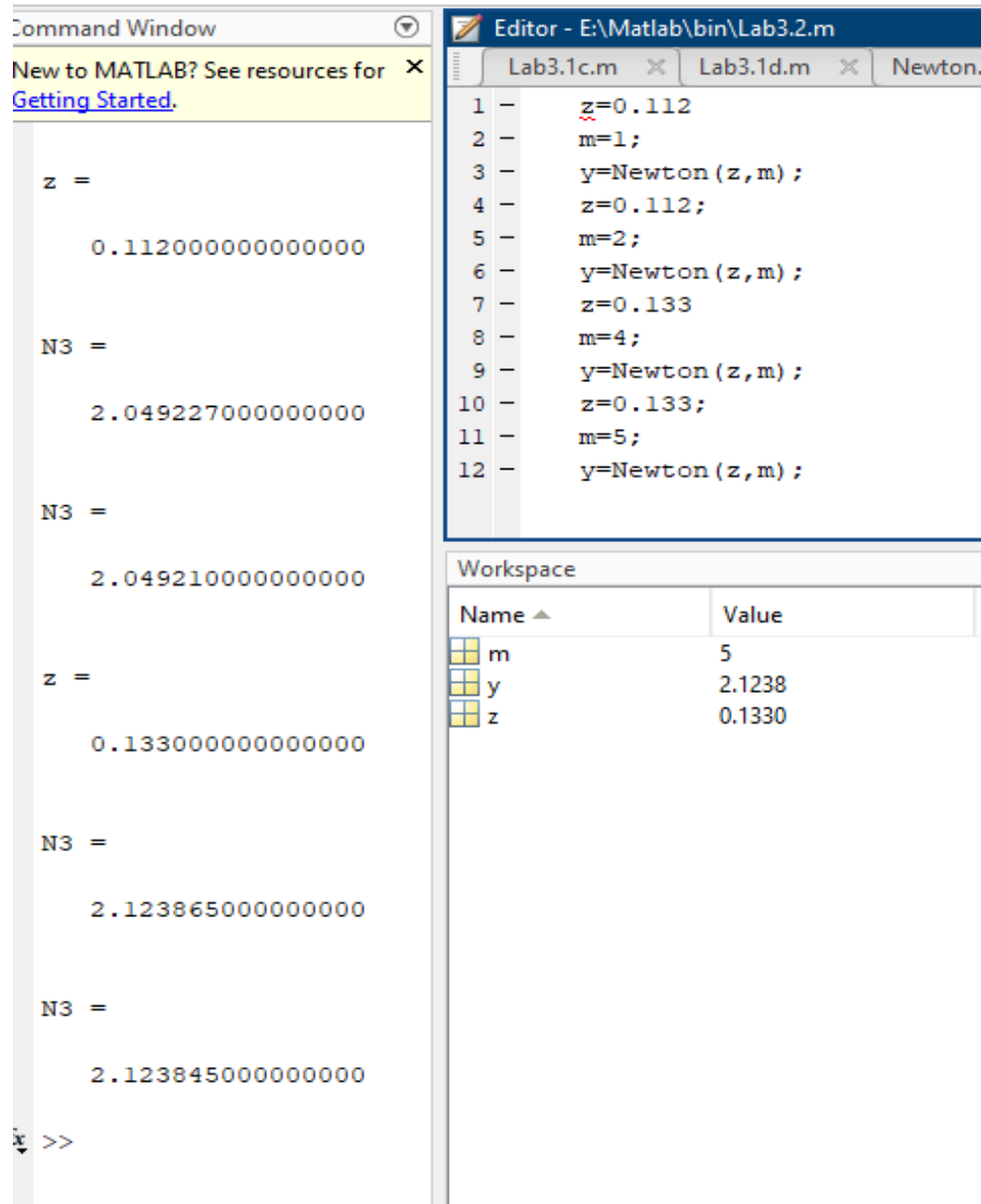


Рис. 3.5. Реалізація прикладу 3.2 в середовищі MATLAB

```

1 function N3=Newton(z,m)
2     format long
3     x=[0.103 0.108 0.115 0.120 0.128 0.136 0.141];
4     y=[2.01284 2.03342 2.06070 2.07918 2.10721 2.13354 2.14922];
5     n=7;
6     for i=1:n-1
7         for j=1:2
8             D(i,j)=0;
9         end
10    end
11    for i=1:n-1
12        D(i,1)=(y(1,i+1)-y(1,i))/(x(1,i+1)-x(1,i));
13    end
14    for i=1:n-2
15        D(i,2)=(D(i+1,1)-D(i,1))/(x(1,i+2)-x(1,i));
16    end
17    k=y(1,m);
18    t(1,1)=1;
19    for i=1:2
20        t(i+1,1)=t(i,1)*(z-x(1,m+i-1));
21        k=k+t(i+1,1)*D(m,i);
22    end
23    N3=round(k,6)

```

Рис. 3.6. Програма Newton

Завдання до лабораторної роботи №3

Завдання 3.1. Використовуючи першу та другу інтерполяційні формули Ньютона, обчислити значення функції при вказаних значеннях аргументу з таблиць 3.5, 3.6 та 3.7.

Таблиця 3.5

Функція		№	Значення аргументу			
x	y		x_1	x_2	x_3	x_4
1,415	0,888551	1	1,4161	1,4566	1,410	1,470
1,420	0,889599	4	1,4244	1,4578	1,4111	1,4665
1,425	0,890637	7	1,4174	1,4583	1,4114	1,4667
1,430	0,891667	10	1,4267	1,4591	1,4117	1,4661
1,435	0,892687	13	1,4181	1,4615	1,4121	1,4665
1,440	0,893698	16	1,4185	1,4623	1,4124	1,4668
1,445	0,894700	19	1,4192	1,4636	1,4128	1,4663

1,450	0,895693	22	1,4197	1,4641	1,4132	1,4669
1,455	0,896677	25	1,4216	1,4648	1,4136	1,4662
1,460	0,897653	28	1,4223	1,4554	1,4141	1,4664
1,465	0,898619	31	1,4232	1,4563	1,4147	1,4666

Таблиця 3.6

Функція		№	Значення аргументу			
x	y		x_1	x_2	x_3	x_4
0,101	1,26183	2	0,1012	0,1441	0,0991	0,152
0,106	1,27644	5	0,1018	0,1448	0,1006	0,162
0,111	1,29122	8	0,1074	0,1467	0,0992	0,153
0,116	1,30617	11	0,1068	0,1473	0,1007	0,161
0,121	1,32130	14	0,1036	0,1438	0,0993	0,154
0,126	1,33660	17	0,1041	0,1449	0,1008	0,160
0,131	1,35207	20	0,1062	0,1457	0,0994	0,155
0,136	1,36773	23	0,1078	0,1493	0,1009	0,159
0,141	1,38353	26	0,1053	0,1484	0,0995	0,156
0,146	1,39959	29	0,1058	0,1462	0,1005	0,158
0,151	1,41579	32	0,1047	0,1489	0,0996	0,157

Таблиця 3.7

Функція		№	Значення аргументу			
x	y		x_1	x_2	x_3	x_4
0,15	0,860708	3	0,1503	0,6532	0,1033	0,7513
0,20	0,818731	6	0,1593	0,7043	0,1465	0,7585
0,25	0,778801	9	0,1511	0,7314	0,1145	0,8155
0,30	0,740818	12	0,1588	0,6672	0,1076	0,8234
0,35	0,704688	15	0,1527	0,7123	0,1367	0,7555
0,40	0,670320	18	0,1576	0,7325	0,1289	0,7674
0,45	0,637628	21	0,1534	0,6782	0,1154	0,7766
0,50	0,606531	24	0,1569	0,7433	0,1068	0,8065
0,55	0,576950	27	0,1507	0,7224	0,1355	0,7843
0,60	0,548812	30	0,1595	0,6638	0,1054	0,8314
0,65	0,522046	34	0,1521	0,7145	0,1411	0,7934
0,70	0,496585	35	0,1583	0,7387	0,1234	0,8024
0,75	0,4722367	36	0,1537	0,7482	0,1321	0,7784

Завдання 3.2. Обчислити значення функції при заданих значеннях аргументу з таблиць 3.8, 3.9, 3.10 та 3.11, використовуючи інтерполяційну формулу Ньютона для нерівновіддалених вузлів. При обчисленнях

враховувати тільки розділені різниці першого та другого порядків. Обчислення провести двічі, використовуючи різні вузли, якщо це можливо.

Таблиця 3.8

Функція		№	Значення аргументу	
x	y		x_1	x_2
0,593	0,532050	1	0,604	0,620
0,596	0,535625	5	0,599	0,626
0,605	0,540578	9	0,603	0,621
0,613	0,546235	13	0,600	0,625
0,619	0,550431	17	0,597	0,622
0,628	0,555983	21	0,602	0,624
0,632	0,559428	25	0,601	0,623
0,636	0,560433	29	0,598	0,627
		33	0,597	0,626

Таблиця 3.9

Функція		№	Значення аргументу	
x	y		x_1	x_2
0,298	3,25578	2	0,309	0,331
0,303	3,17639	6	0,316	0,338
0,308	3,12180	10	0,310	0,332
0,317	3,04819	14	0,315	0,337
0,323	2,98755	18	0,311	0,333
0,330	2,91950	22	0,314	0,336
0,339	2,83598	26	0,312	0,334
0,344	2,78756	30	0,313	0,335
		33	0,310	0,336

Таблиця 3.10

Функція		№	Значення аргументу	
x	y		x_1	x_2
0,628	2,22336	3	0,707	0,748
0,705	2,24382	7	0,713	0,758
0,714	2,26446	11	0,708	0,749
0,727	2,29841	15	0,712	0,757
0,736	2,32221	19	0,709	0,751
0,747	2,35164	23	0,711	0,756
0,760	2,38690	27	0,710	0,753
0,769	2,41162	31	0,706	0,755
		35	0,713	0,756

Таблиця 3.11

Функція		№	Значення аргументу	
x	y		x_1	x_2
0,100	1,532050	4	0,109	0,147
0,108	1,535625	8	0,118	0,155
0,119	1,540578	12	0,110	0,149
0,127	1,546235	16	0,117	0,153
0,135	1,550431	20	0,113	0,148
0,146	1,555983	24	0,116	0,151
0,157	1,559428	28	0,112	0,156
0,169	1,560433	32	0,114	0,152
		36	0,113	0,155

4. Сплайн-інтерполяція

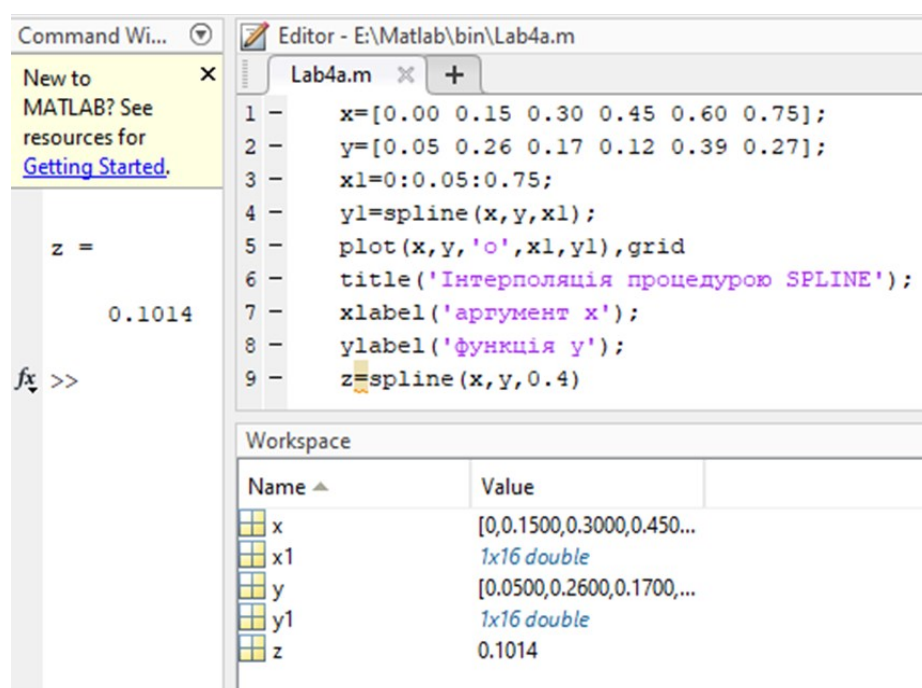
Приклад 4.1. Застосувати до заданої функції (табл. 4.1) сплайн-інтерполяцію, використовуючи функції MATLAB. Обчислити прогнозоване значення функції в точці 0,4.

Таблиця 4.1

x	y
0,00	0,05
0,15	0,26
0,30	0,17
0,45	0,12
0,60	0,39
0,75	0,27

Розв'язування. Функція `spline(x,y,xi)` здійснює інтерполяцію кубічними сплайнами, повертаючи значення інтерпольованої функції, яка задана векторами x та y , у вигляді вектору при значеннях аргументу xi .

Реалізація прикладу 4.1 з використанням функції `spline` наведена на рис. 4.1.

Рис. 4.1. Реалізація прикладу 4.1 за допомогою функції `spline`

Основною функцією для побудови графіків функцій в MATLAB є функція `plot(x1,y1,s1,x2,y2,s2,...)`, де $x1,y1$ – вектори значень аргументів та функцій, що відповідають першій кривій, а $s1$ – символьна змінна (не є обов'язковою, до трьох символів), що характеризує цю криву (тип лінії, за

замовчуванням – відрізок прямої, тип точки графіка, за замовчуванням – піксель, колір, за замовчуванням – синій), x_2, y_2, s_2 – характеристики другої кривої тощо.

При описі результуючого графіка (рис.4.2) була використана функція `title`, що містить назву графіка.

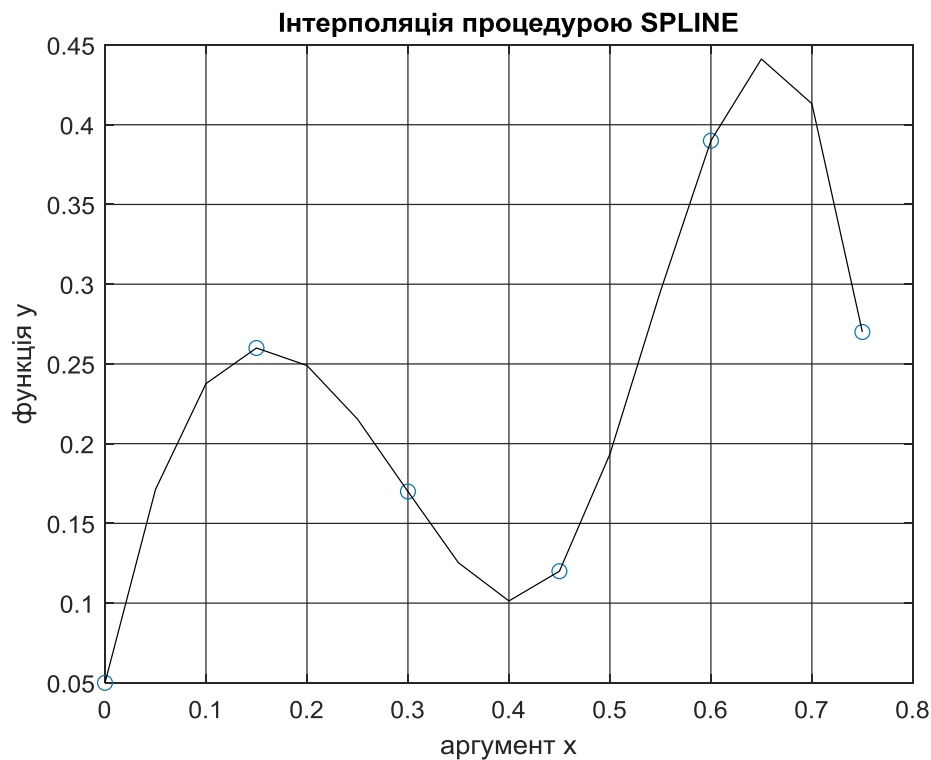


Рис. 4.2. Графік, що побудований за допомогою функції `spline`

Одновимірну табличну інтерполяцію виконує процедура `interp1(x,y,xi,'метод')`. Вона повертає значення інтерпольованої функції, яка задана векторами x та y , у вигляді вектору при значеннях аргументу x_i залежно від вказаного методу інтерполяції.

Реалізація прикладу 4.1 з використанням функції `interp1` та метода `'nearest'` (ступінчаста інтерполяція) наведена на рис. 4.3, а результуючий графік – на рис.4.4.

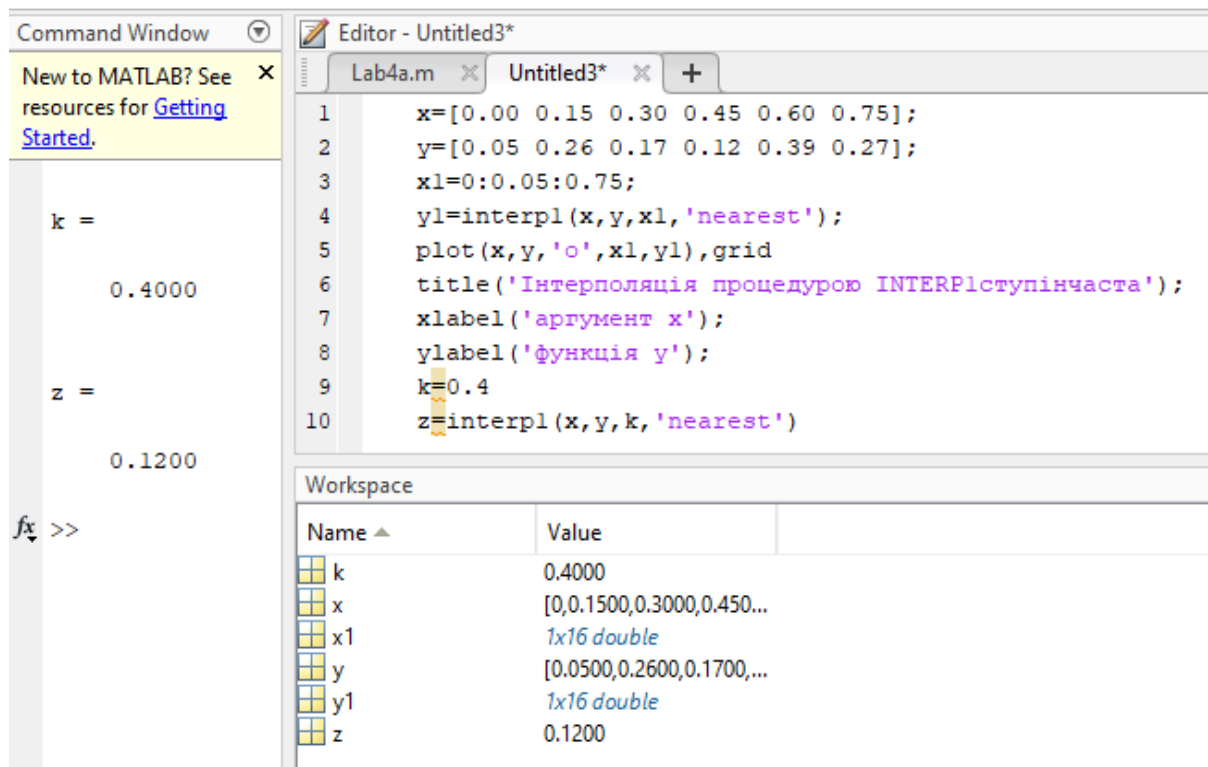


Рис. 4.3. Реалізація прикладу 4.1 за допомогою функції `interp1`, 'nearest'

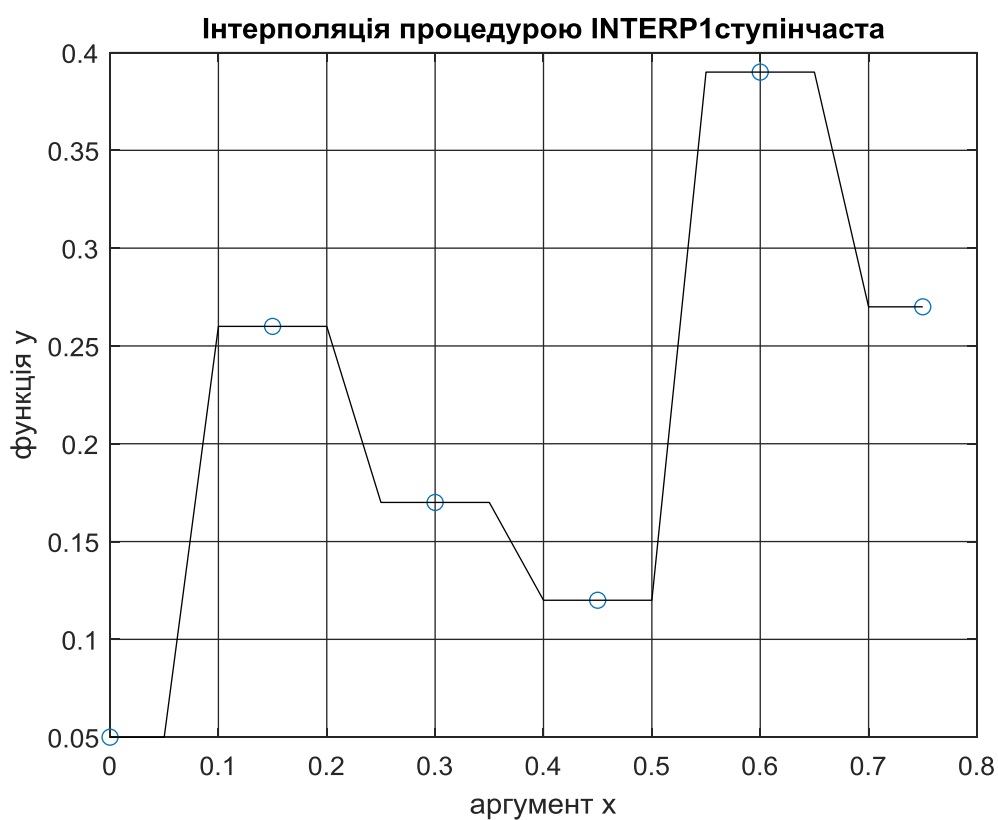


Рис. 4.4. Графік, що побудований за допомогою функції `interp1`, 'nearest'

Метод 'linear' (лінійна інтерполяція) базується на лінійній інтерполяції значень у сусідніх точках функції. Реалізація прикладу 4.1 з використанням функції `interp1` та метода 'linear' наведена на рис. 4.5, а результуючий графік – на рис. 4.6.

The screenshot shows the MATLAB environment. The Command Window on the left displays the results of the interpolation: `k = 0.4000` and `z = 0.1367`. The Editor window on the right shows the script `Lab4c.m` with the following code:

```

1 - x=[0.00 0.15 0.30 0.45 0.60 0.75];
2 - y=[0.05 0.26 0.17 0.12 0.39 0.27];
3 - x1=0:0.05:0.75;
4 - y1=interp1(x,y,x1,'linear');
5 - plot(x,y,'o',x1,y1),grid
6 - title('Інтерполяція процедурою INTERP1лінійна');
7 - xlabel('аргумент x');
8 - ylabel('функція y');
9 - k=0.4
10 - z=interp1(x,y,k,'linear')

```

Рис. 4.5. Реалізація прикладу 4.1 за допомогою функції `interp1`, 'linear'

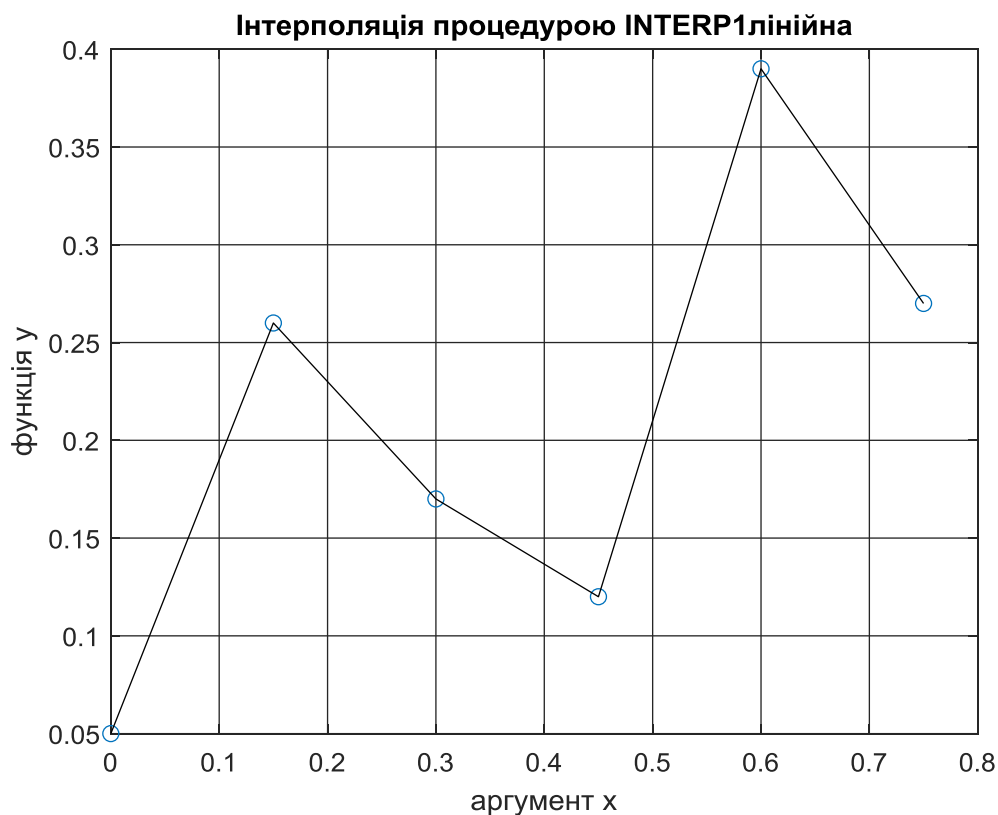


Рис. 4.6. Графік, що побудований за допомогою функції `interp1`, 'linear'

Метод 'pchip' (кусово-кубічна інтерполяція зі збереженням форми) базується на кусково-кубічній інтерполяції значень у сусідніх точках функції зі збереженням форми. Реалізація прикладу 4.1 з використанням функції `interp1` та метода 'pchip' наведена на рис. 4.7, а результуючий графік – на рис. 4.8.

The screenshot shows the MATLAB environment. The Command Window on the left displays the results of the interpolation: `k = 0.4000` and `z = 0.1282`. The Editor window on the right shows the script `Lab4d.m` with the following code:

```

1 - x=[0.00 0.15 0.30 0.45 0.60 0.75];
2 - y=[0.05 0.26 0.17 0.12 0.39 0.27];
3 - x1=0:0.05:0.75;
4 - y1=interp1(x,y,x1,'pchip');
5 - plot(x,y,'o',x1,y1),grid
6 - title('Інтерполяція процедурою INTERP1кубічна');
7 - xlabel('аргумент x');
8 - ylabel('функція y');
9 - k=0.4
10 - z=interp1(x,y,k,'pchip')

```

Рис. 4.7. Реалізація прикладу 4.1 за допомогою функції `interp1`, 'pchip'

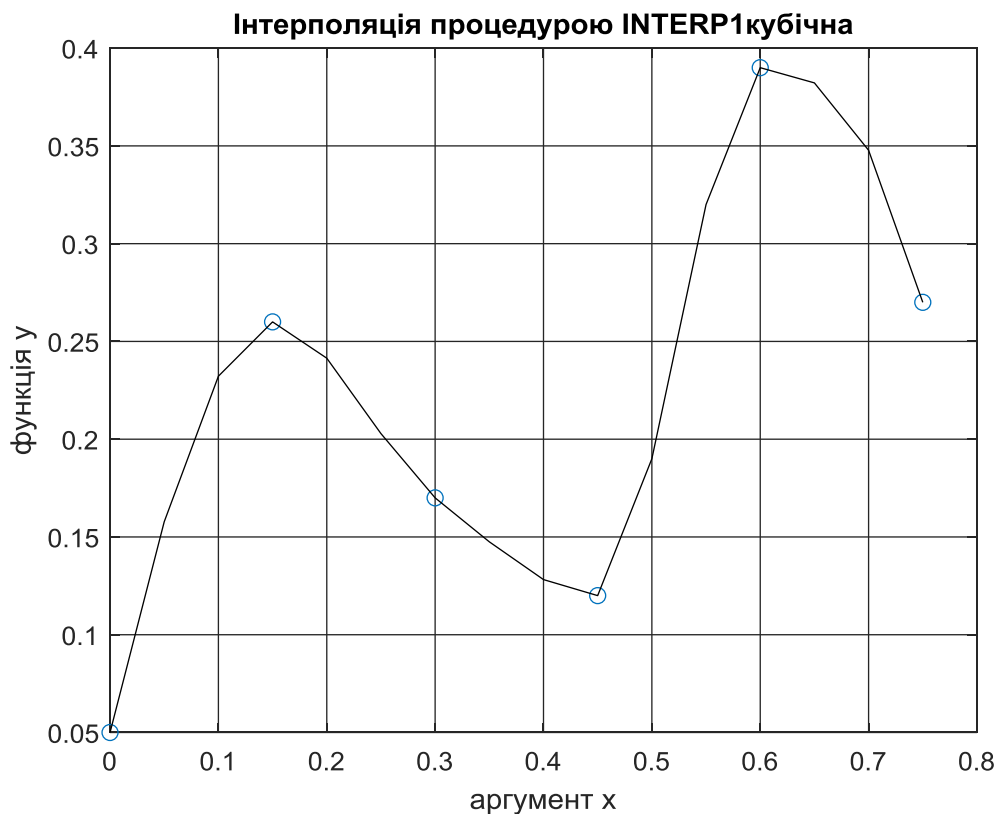


Рис. 4.8. Графік, що побудований за допомогою функції `interp1`, 'pchip'

Метод 'makima' (модифікована кубічна інтерполяція) базується на кусковій функції поліномів зі ступенем не більше трьох. Реалізація прикладу 4.1 з використанням функції `interp1` та метода 'makima' наведена на рис. 4.9, а результуючий графік – на рис. 4.10.

The screenshot shows the MATLAB environment. The Command Window on the left displays the results of the interpolation: `k = 0.4000` and `z = 0.1260`. The Editor window on the right shows the script `Lab4f.m` with the following code:

```

1 x=[0.00 0.15 0.30 0.45 0.60 0.75];
2 y=[0.05 0.26 0.17 0.12 0.39 0.27];
3 x1=0:0.05:0.75;
4 y1=interp1(x,y,x1,'makima');
5 plot(x,y,'o',x1,y1),grid
6 title('Інтерполяція процедурою INTERP1кубічна модифікована');
7 xlabel('аргумент x');
8 ylabel('функція y');
9 k=0.4
10 z=interp1(x,y,k,'makima')

```

Рис. 4.9. Реалізація прикладу 4.1 за допомогою функції `interp1`, 'makima'

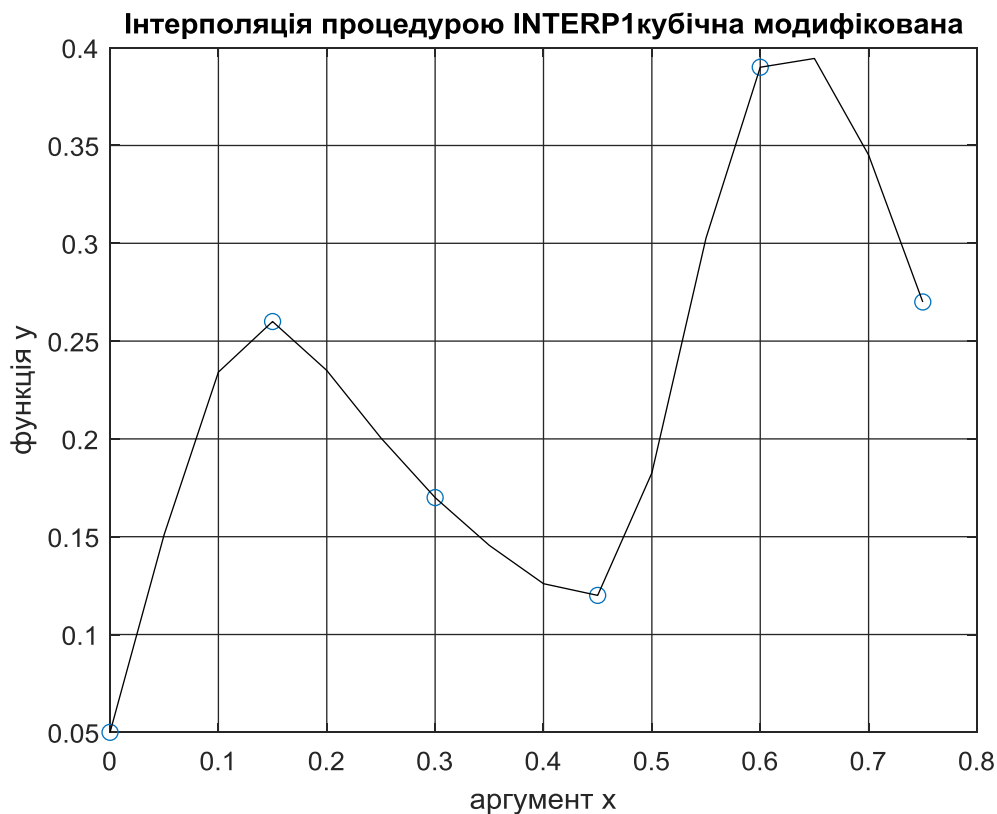


Рис. 4.10. Графік, що побудований за допомогою функції `interp1`, 'makima'

Метод 'spline' (кубічними сплайнами) базується на кубічній інтерполяції значень у сусідніх точках функції. Реалізація прикладу 4.1 з використанням функції `interp1` та метода 'spline' наведена на рис. 4.11, арезультуючий графік – на рис. 4.12.

The screenshot shows the MATLAB environment. The Command Window on the left displays the results of the interpolation: `k = 0.4000` and `z = 0.1014`. The Editor window on the right shows the following code in `Lab4f.m`:

```

1 - x=[0.00 0.15 0.30 0.45 0.60 0.75];
2 - y=[0.05 0.26 0.17 0.12 0.39 0.27];
3 - x1=0:0.05:0.75;
4 - y1=interp1(x,y,x1,'spline');
5 - plot(x,y,'o',x1,y1),grid
6 - title('Інтерполяція процедурою INTERP1кубічні сплайни');
7 - xlabel('аргумент x');
8 - ylabel('функція y');
9 - k=0.4
10 - z=interp1(x,y,k,'spline')

```

Рис. 4.11. Реалізація прикладу 4.1 за допомогою функції `interp1`, 'spline'

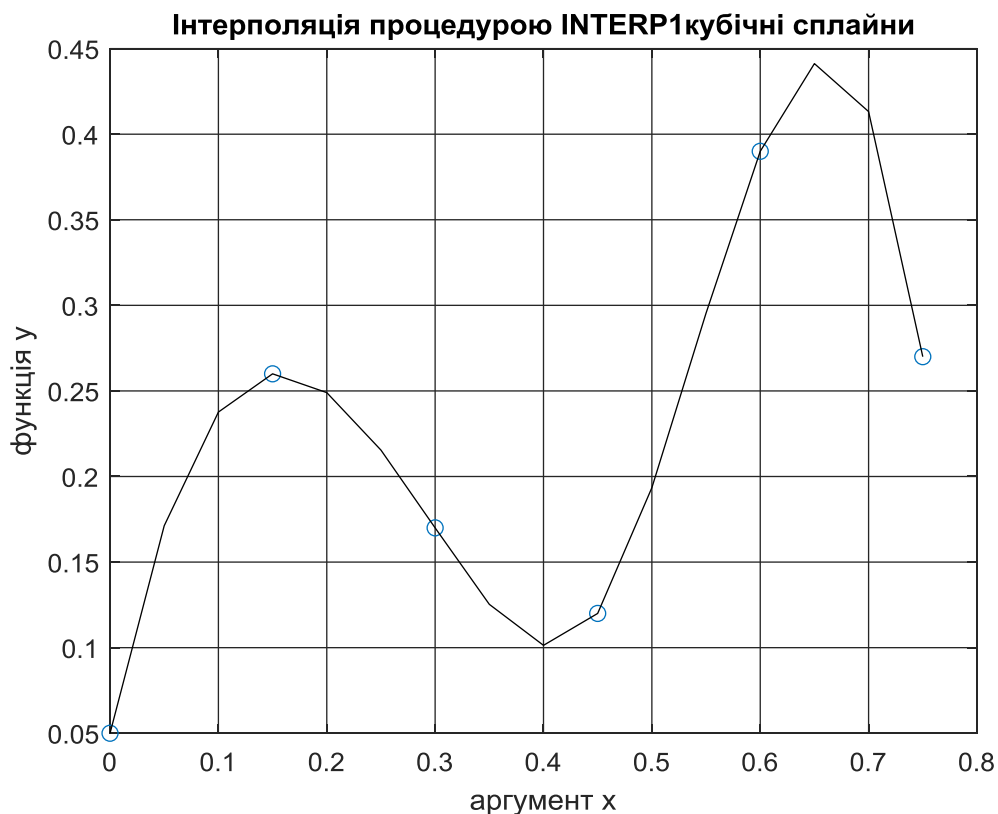


Рис. 4.12. Графік, що побудований за допомогою функції `interp1`, 'spline'

Завдання до лабораторної роботи №4

Завдання 4.1. Застосувати до заданої функції (таблиця 4.2), де n – номер варіанту, сплайн-інтерполяцію, використовуючи функції MATLAB. Обчислити прогнозоване значення функції в точці 0,27.

Таблиця 4.2

x	y
0,15	$0,6+0,1 \cdot n$
0,20	$1,2+0,1 \cdot n$
0,25	$3,9+0,1 \cdot n$
0,30	$2,6+0,1 \cdot n$
0,35	$3,3+0,1 \cdot n$
0,40	$0,1+0,1 \cdot n$

5. Застосування методів апроксимації

Апроксимація – заміна одних математичних об'єктів іншими, що є наближеними за тим чи іншим критерієм до початкового. Якщо інтерполяційна функція проходить через вузлові точки таблиці, якою задається функція, то при апроксимації наближена функція проходить не через вузли функції, а, як правило, між ними.

Приклад 5.1. Розрахувати параметри лінійної апроксимації за методом найменших квадратів для функції (табл. 5.1), що задана вузлами.

Таблиця 5.1

x	0,05	0,10	0,17	0,25	0,30	0,36
y	0,050042	0,100335	0,171657	0,255342	0,309336	0,376403

Порівняти результати з функцією MATLAB. Побудувати графік.

Розв'язування. Якщо умова задачі допускає опис експериментальних даних лінійною залежністю $g(x) = a \cdot x + b$, то за методом найменших квадратів параметри обчислюємо за формулами:

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=0}^n (x_i y_i) - \sum_{i=0}^n x_i \cdot \sum_{i=0}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=0}^n x_i^2 - (\sum_{i=0}^n x_i)^2},$$

$$b = \frac{\sum_{i=0}^n y_i - a \cdot \sum_{i=0}^n x_i}{n} = \frac{\sum_{i=0}^n y_i \cdot \sum_{i=0}^n x_i^2 - \sum_{i=0}^n x_i \cdot \sum_{i=0}^n (x_i y_i)}{n \cdot \sum_{i=0}^n x_i^2 - (\sum_{i=0}^n x_i)^2}.$$

Розрахуємо значення сум:

$$S_1 = 0,05 + 0,10 + 0,17 + 0,25 + 0,30 + 0,36 = 1,23;$$

$$S_2 = 0,05^2 + 0,10^2 + 0,17^2 + 0,25^2 + 0,30^2 + 0,36^2 = 0,3235;$$

$$S_3 = 0,050042 + 0,100335 + 0,171657 + 0,255342 + 0,309336 + 0,376403 = 1,263115;$$

$$S_4 = 0,05 \cdot 0,050042 + 0,10 \cdot 0,100335 + 0,17 \cdot 0,171657 + 0,25 \cdot 0,255342 + 0,30 \cdot 0,309336 + 0,36 \cdot 0,376403 = 0,333859.$$

Будуємо систему на основі розрахованих сум:

$$a = \frac{n \cdot S_4 - S_1 \cdot S_3}{n \cdot S_2 - (S_1)^2} = \frac{6 \cdot 0,333859 - 1,23 \cdot 1,263115}{6 \cdot 0,3235 - (1,23)^2} = 1,050036;$$

$$b = \frac{S_3 - a \cdot S_1}{n} = \frac{1,263115 - 1,050036 \cdot 1,24}{6} = -0,004738.$$

Отже

$$g(x) = -0,004738 + 1,050036 \cdot x.$$

Поліноміальна апроксимація в системі MATLAB здійснюється функцією `polyfit(x,y,n)`, де x, y – вхідні вектори одного розміру, а n – порядок полінома.

При лінійній апроксимації $n=1$. Реалізація прикладу 5.1 з використанням функції `polyfit(x,y,1)` наведена на рис. 5.1, а результуючий графік – на рис. 5.2.

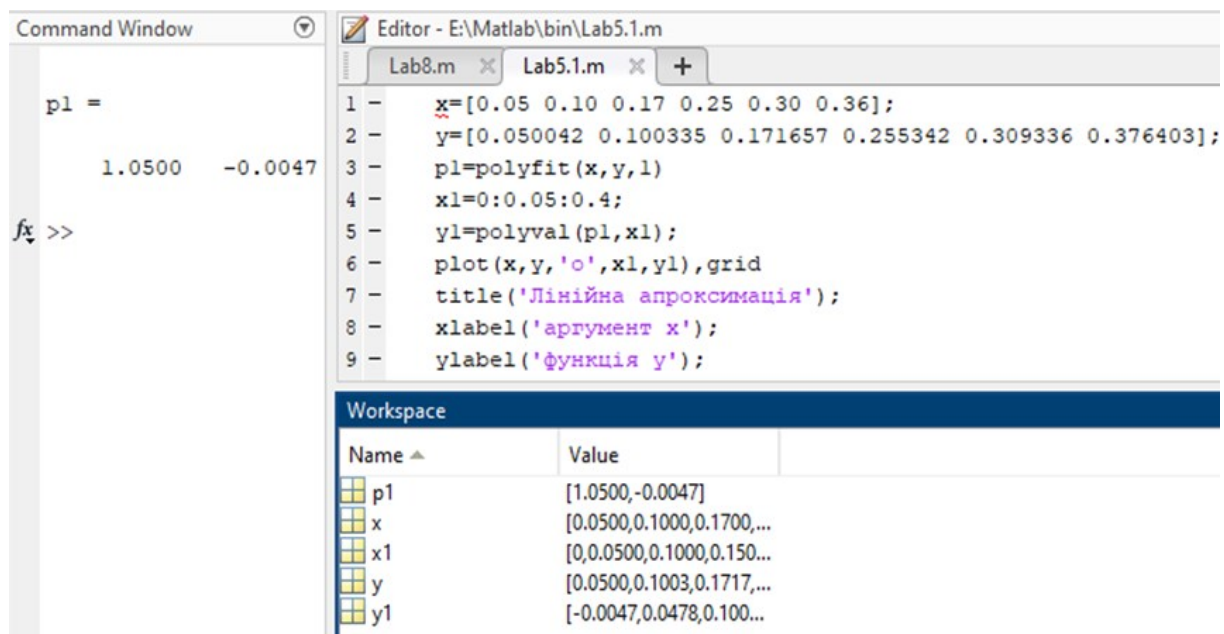


Рис. 5.1. Реалізація прикладу 5.1 за допомогою функції `polyfit(x,y,1)`

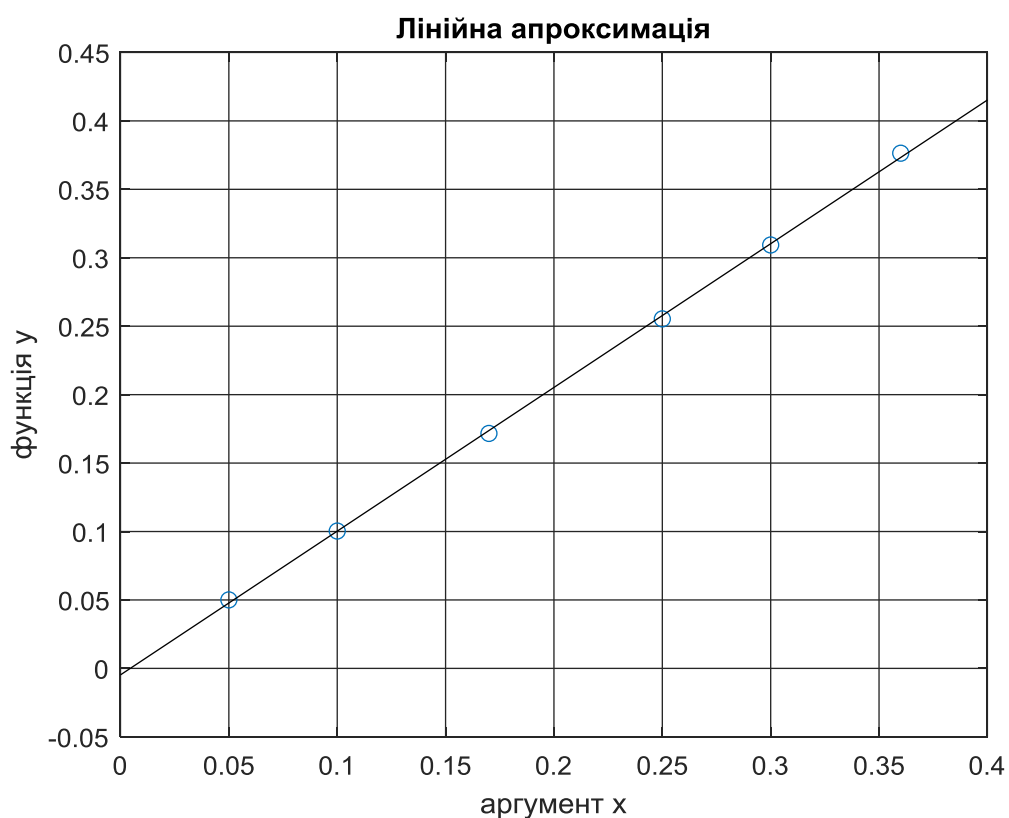


Рис. 5.2. Графік, що побудований за допомогою функції `polyfit(x,y,1)`

Приклад 5.2. Розрахувати параметри параболічної апроксимації за методом найменших квадратів для функції (табл. 5.2), що задана вузлами.

Таблиця 5.2

x	0,05	0,10	0,17	0,25	0,30	0,36
y	0,350042	0,200335	0,061657	0,055342	0,209336	0,376403

Побудувати графік. Порівняти результати з функцією MATLAB.

Розв'язування. Якщо умова задачі допускає опис експериментальних даних квадратичною залежністю $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$, то за методом найменших квадратів параметри обчислюємо за формулами:

$$S_1 = \sum_{i=1}^n x_i; S_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2; S_3 = \sum_{i=1}^n x_i^3; S_4 = \sum_{i=1}^n x_i^4;$$

$$S_5 = \sum_{i=1}^n y_i; S_6 = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i); S_7 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 \cdot y_i);$$

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_2 = S_5, \\ a_0 \cdot S_1 + a_1 \cdot S_2 + a_2 \cdot S_3 = S_6, \\ a_0 \cdot S_2 + a_1 \cdot S_3 + a_2 \cdot S_4 = S_7. \end{cases}$$

Розрахуємо значення сум:

$$S_1 = 0,05 + 0,10 + 0,17 + 0,25 + 0,30 + 0,36 = 1,23;$$

$$S_2 = 0,05^2 + 0,10^2 + 0,17^2 + 0,25^2 + 0,30^2 + 0,36^2 = 0,3235;$$

$$S_3 = 0,05^3 + 0,10^3 + 0,17^3 + 0,25^3 + 0,30^3 + 0,36^3 = 0,095319;$$

$$S_4 = 0,05^4 + 0,10^4 + 0,17^4 + 0,25^4 + 0,30^4 + 0,36^4 = 0,029744;$$

$$S_5 = 0,350042 + 0,200335 + 0,061657 + 0,055342 + 0,209336 + 0,376403 = 1,253115;$$

$$S_6 = 0,05 \cdot 0,350042 + 0,10 \cdot 0,200335 + 0,17 \cdot 0,061657 + 0,25 \cdot 0,055342 + 0,30 \cdot 0,209336 + 0,36 \cdot 0,376403 = 0,260159;$$

$$S_7 = 0,05^2 \cdot 0,350042 + 0,10^2 \cdot 0,200335 + 0,17^2 \cdot 0,061657 + 0,25^2 \cdot 0,055342 + 0,30^2 \cdot 0,209336 + 0,36^2 \cdot 0,376403 = 0,075741.$$

Будуємо систему на основі розрахованих сум:

$$\begin{cases} a_0 \cdot 6 + a_1 \cdot 1,23 + a_2 \cdot 0,3235 = 1,253115, \\ a_0 \cdot 1,23 + a_1 \cdot 0,3235 + a_2 \cdot 0,095319 = 0,260159, \\ a_0 \cdot 0,3235 + a_1 \cdot 0,095319 + a_2 \cdot 0,029744 = 0,075741. \end{cases}$$

Коефіцієнти a_0, a_1, a_2 знаходимо, розв'язавши систему лінійних рівнянь:

$$a_0 = 0,591566, a_1 = -5,373534, a_2 = 13,332819.$$

Сама функція має вигляд

$$f(z) = 0,591566 - 5,373534 \cdot z + 13,332819 \cdot z^2.$$

Параболічна апроксимація в системі MATLAB здійснюється функцією `polyfit(x,y,2)`. Реалізація прикладу 5.2 з використанням функції `polyfit(x,y,2)` наведена на рис. 5.3, а результуючий графік – на рис. 5.4.

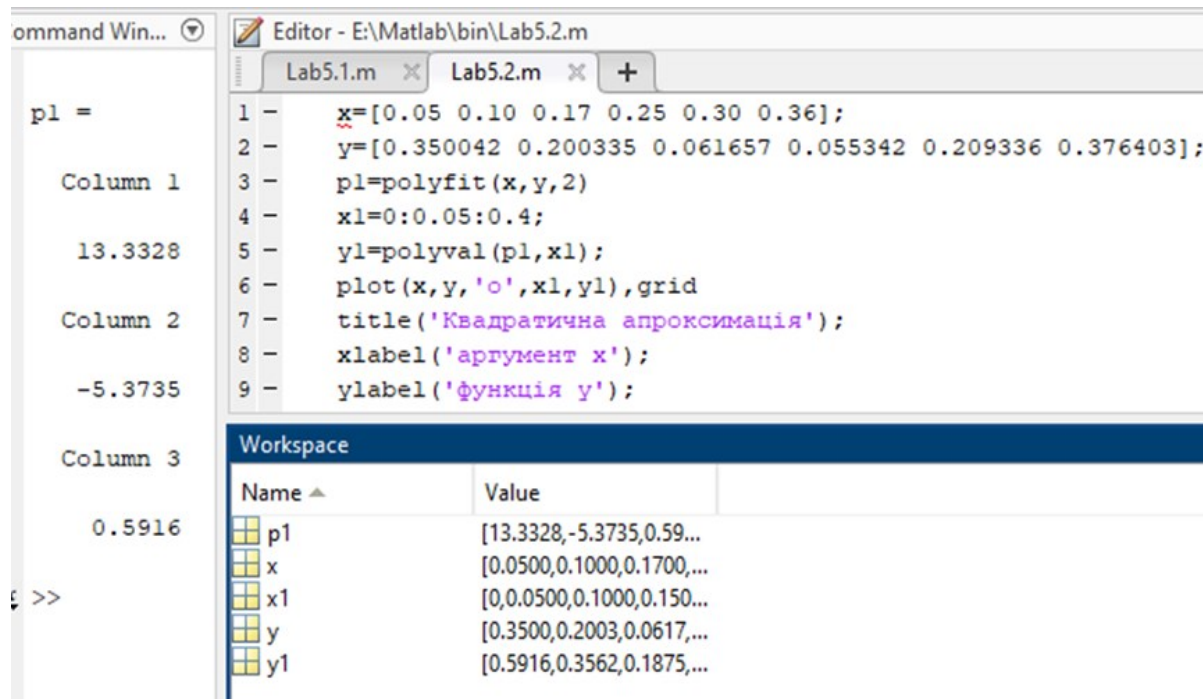


Рис. 5.3. Реалізація прикладу 5.2 за допомогою функції `polyfit(x,y,2)`

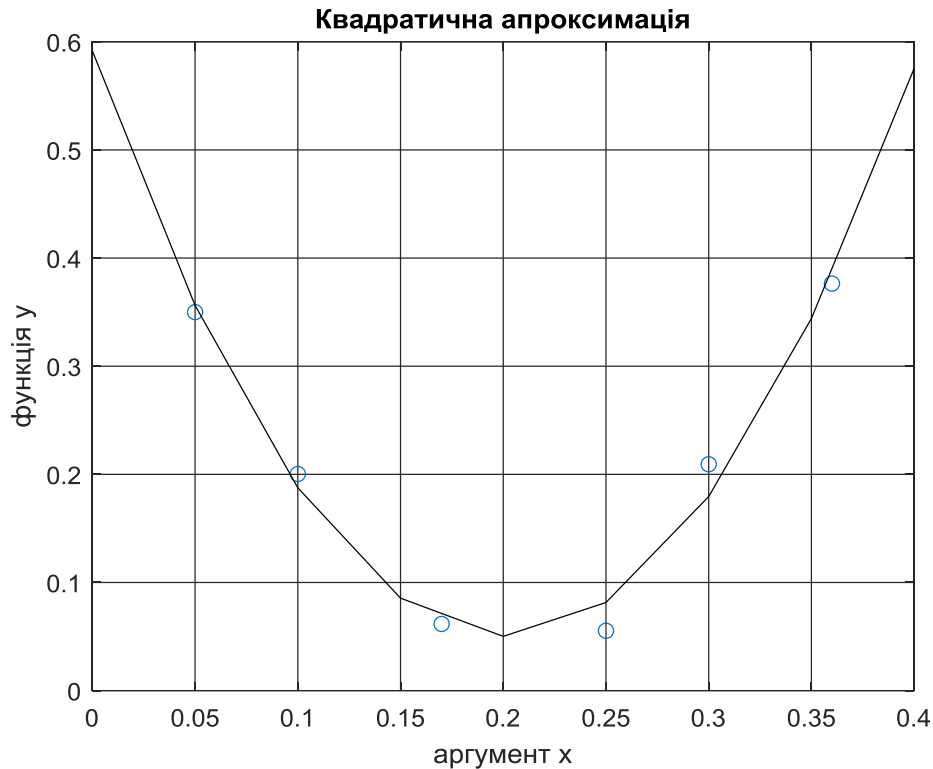


Рис. 5.4. Графік, що побудований за допомогою функції `polyfit(x,y,2)`

Приклад 5.3. Розрахувати параметри експоненціальної апроксимації за методом найменших квадратів для функції (табл. 5.3), що задана вузлами, засобами MATLAB:

Таблиця 5.3

x	0,00	0,20	0,37	0,55	0,70	1,06
y	1,000000	1,100335	1,271657	1,355342	1,609336	2,776403

Побудувати графік.

Розв'язування. В середовищі MATLAB скористаємося вбудованою функцією `lsqcurvefit(fun,x0,xdata,ydata)`, яка за методом найменших квадратів повертає коефіцієнти кривої, що апроксимує вхідні дані векторів `xdata,ydata`. Так як характер кривої довільний, то в першій позиції треба вказати рівняння кривої, а в другій – початкові значення коефіцієнтів кривої. Реалізація прикладу 5.3 з використанням функції `lsqcurvefit` наведена на рис. 5.5, а результуючий графік - на рис. 5.6.

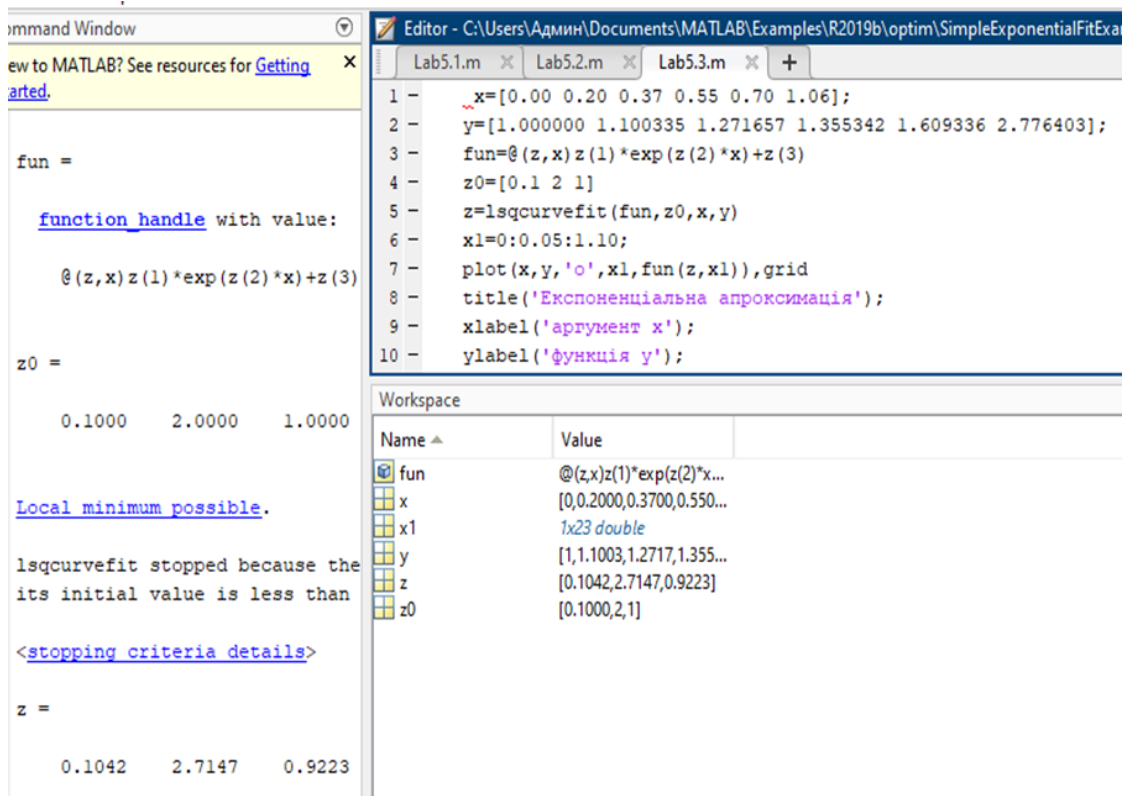


Рис. 5.5. Реалізація прикладу 5.3 за допомогою функції lsqcurvefit

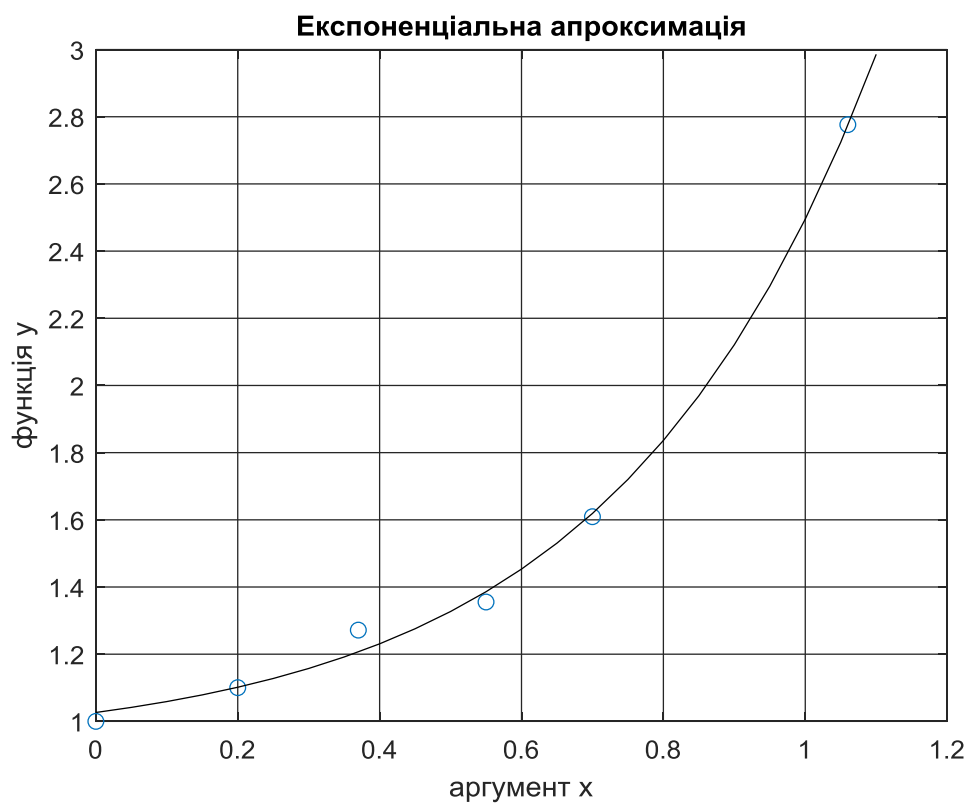


Рис. 5.6. Графік, що побудований за допомогою функції lsqcurvefit

Завдання до лабораторної роботи №5

Завдання 5.1. Розрахувати параметри лінійної апроксимації за методом найменших квадратів для функції (табл. 5.4), що задана вузлами. Побудувати графік. Порівняти результати з функцією MATLAB.

Таблиця 5.4

1	0.06	0.11	0.16	0.26	0.31	0.36
	0.058042	0.109335	0.170657	0.259342	0.309336	0.366403
2	0.16	0.21	0.26	0.36	0.43	0.45
	0.158041	0.209635	0.270752	0.359642	0.409136	0.466405
3	0.06	0.22	0.45	0.67	0.81	0.97
	0.058041	0.209637	0.470756	0.659641	0.809139	0.966401
4	0.06	0.10	0.16	0.25	0.32	0.36
	0.128041	0.207635	0.290752	0.559642	0.609136	0.766405
5	0.16	0.21	0.27	0.36	0.41	0.46
	0.350041	0.409615	0.520758	0.729644	0.809137	0.936408
6	0.06	0.10	0.16	0.26	0.31	0.36
	0.038042	0.059635	0.080752	0.139643	0.159139	0.186404
7	0.01	0.11	0.21	0.31	0.41	0.51
	0.058033	0.219687	0.420744	0.659652	0.809131	0.996335
8	0.05	0.15	0.30	0.45	0.60	0.75
	0.158041	0.459635	0.900752	1.359642	1.809136	2.266409
9	0.02	0.14	0.19	0.28	0.34	0.46
	0.048043	0.279638	0.370753	0.559644	0.689139	0.926408
10	0.10	0.21	0.31	0.40	0.51	0.62
	0.108041	0.209635	0.299772	0.409672	0.509137	0.616407
11	0.01	0.11	0.26	0.36	0.51	0.76
	0.038044	0.329638	0.770756	1.059612	1.499186	2.266495
12	0.11	0.22	0.33	0.44	0.55	0.66
	0.218041	0.419635	0.670752	0.879649	1.109135	1.366401
13	0.03	0.06	0.12	0.24	0.48	0.96

	0.028033	0.059732	0.120457	0.259542	0.479836	0.960405
14	0.05	0.12	0.17	0.28	0.35	0.46
	0.158022	0.119695	0.170752	0.300621	0.349121	0.460412
15	0.05	0.12	0.16	0.25	0.32	0.36
	0.057042	0.110335	0.169657	0.258742	0.308936	0.365903
16	0.15	0.21	0.25	0.36	0.43	0.45
	0.158039	0.209642	0.270749	0.359639	0.409129	0.466411
17	0.06	0.23	0.46	0.66	0.82	0.96
	0.058042	0.209642	0.470749	0.659638	0.809142	0.966412
18	0.06	0.11	0.15	0.24	0.31	0.36
	0.128042	0.206835	0.291152	0.559639	0.609142	0.765705
19	0.17	0.22	0.26	0.35	0.42	0.46
	0.350141	0.409525	0.520818	0.728744	0.808637	0.936398
20	0.05	0.11	0.15	0.24	0.30	0.36
	0.037942	0.058635	0.080682	0.139583	0.158139	0.186405
21	0.01	0.11	0.21	0.31	0.41	0.51
	0.059032	0.229672	0.420754	0.658752	0.808631	0.986335
22	0.05	0.15	0.30	0.45	0.60	0.75
	0.168041	0.458635	0.900748	1.358643	1.808144	2.267407
23	0.03	0.14	0.18	0.27	0.34	0.46
	0.048045	0.279598	0.370683	0.558744	0.688639	0.925801
24	0.10	0.22	0.30	0.41	0.51	0.61
	0.108141	0.209645	0.298772	0.408672	0.508137	0.618401
25	0.02	0.10	0.25	0.35	0.51	0.76
	0.038039	0.329641	0.770748	1.059608	1.499178	2.266525
26	0.11	0.22	0.33	0.44	0.55	0.66
	0.219042	0.418636	0.670852	0.879659	1.108135	1.365402
27	0.04	0.07	0.13	0.24	0.48	0.96
	0.028043	0.059742	0.120447	0.259442	0.479436	0.960445
28	0.05	0.12	0.17	0.28	0.35	0.46
	0.158122	0.119615	0.170712	0.300121	0.349111	0.460112
29	0.06	0.12	0.16	0.25	0.31	0.36
	0.058048	0.109385	0.170658	0.259348	0.309386	0.366483

30	0.15	0.21	0.27	0.36	0.42	0.45
	0.158042	0.209625	0.270722	0.359242	0.409236	0.466425
31	0.06	0.11	0.16	0.26	0.31	0.36
	0.058021	0.109343	0.170622	0.259367	0.309391	0.366445
32	0.16	0.21	0.26	0.36	0.43	0.45
	0.158056	0.209644	0.270739	0.359542	0.409236	0.466875
33	0.06	0.22	0.45	0.67	0.81	0.97
	0.058023	0.209686	0.470667	0.659633	0.809187	0.966521
34	0.06	0.10	0.16	0.25	0.32	0.36
	0.128038	0.2076554	0.290744	0.559342	0.609446	0.766365
35	0.16	0.21	0.27	0.36	0.41	0.46
	0.350037	0.409621	0.520761	0.729652	0.809141	0.936411

Завдання 5.2. Розрахувати параметри параболічної апроксимації за методом найменших квадратів для функції (табл. 5.5), що задана вузлами. Побудувати графік. Порівняти результати з функцією MATLAB.

Таблиця 5.5

1	0.06	0.11	0.16	0.26	0.31	0.36
	0.367403	0.309336	0.270657	0.259342	0.309336	0.366403
2	0.16	0.21	0.26	0.36	0.43	0.45
	0.476405	0.419136	0.370752	0.359642	0.409136	0.466405
3	0.06	0.22	0.45	0.67	0.81	0.97
	0.946401	0.819139	0.670756	0.659641	0.809139	0.966401
4	0.06	0.10	0.16	0.25	0.32	0.36
	0.776405	0.619136	0.490752	0.559642	0.609136	0.766405
5	0.16	0.21	0.27	0.36	0.41	0.46
	0.946408	0.819137	0.720758	0.729644	0.809137	0.936408
6	0.06	0.10	0.16	0.26	0.31	0.36
	0.196404	0.161139	0.120752	0.139643	0.159139	0.186404
7	0.01	0.11	0.21	0.31	0.41	0.51
	0.986335	0.819131	0.620744	0.659652	0.809131	0.996335
8	0.05	0.15	0.30	0.45	0.60	0.75

	2.276409	1.819136	0.340752	1.359642	1.809136	2.266409
9	0.02	0.14	0.19	0.28	0.34	0.46
	0.936408	0.699139	0.570753	0.559644	0.689139	0.926408
10	0.10	0.21	0.31	0.40	0.51	0.62
	0.626407	0.519137	0.399772	0.409672	0.509137	0.616407
11	0.01	0.11	0.26	0.36	0.51	0.76
	2.276495	1.509186	0.990756	1.059612	1.499186	2.266495
12	0.11	0.22	0.33	0.44	0.55	0.66
	1.376401	1.110135	0.870752	0.879649	1.109135	1.366401
13	0.03	0.06	0.12	0.24	0.48	0.96
	0.950405	0.489836	0.220457	0.259542	0.479836	0.960405
14	0.05	0.12	0.17	0.28	0.35	0.46
	0.470412	0.350121	0.270752	0.300621	0.349121	0.460412
15	0.05	0.12	0.16	0.25	0.32	0.36
	0.157042	0.110335	0.079657	0.068742	0.128936	0.165903
16	0.15	0.21	0.25	0.36	0.43	0.45
	0.458039	0.209642	0.170749	0.159639	0.209129	0.466411
17	0.06	0.23	0.46	0.66	0.82	0.96
	0.958042	0.709642	0.470749	0.459638	0.709142	0.966412
18	0.06	0.11	0.15	0.24	0.31	0.36
	0.728042	0.606835	0.291152	0.259639	0.609142	0.765705
19	0.17	0.22	0.26	0.35	0.42	0.46
	0.950141	0.609525	0.420818	0.428744	0.608637	0.936398
20	0.05	0.11	0.15	0.24	0.30	0.36
	0.177942	0.158635	0.120682	0.139583	0.158139	0.186405
21	0.01	0.11	0.21	0.31	0.41	0.51
	0.959032	0.729672	0.420754	0.458752	0.708631	0.986335
22	0.05	0.15	0.30	0.45	0.60	0.75
	2.248041	1.858635	0.900748	1.058643	1.808144	2.267407
23	0.03	0.14	0.18	0.27	0.34	0.46
	0.948045	0.679598	0.370683	0.358744	0.688639	0.925801
24	0.10	0.22	0.30	0.41	0.51	0.61
	0.608141	0.509645	0.298772	0.308672	0.508137	0.618401
25	0.02	0.10	0.25	0.35	0.51	0.76
	2.238039	1.329641	0.970748	1.059608	1.499178	2.266525

26	0.11	0.22	0.33	0.44	0.55	0.66
	1.219042	1.018636	0.670852	0.719659	1.108135	1.365402
27	0.04	0.07	0.13	0.24	0.48	0.96
	0.928043	0.459742	0.220447	0.259442	0.479436	0.960445
28	0.05	0.12	0.17	0.28	0.35	0.46
	0.458122	0.319615	0.170712	0.200121	0.349111	0.460112
29	0.06	0.12	0.16	0.25	0.31	0.36
	0.358048	0.199385	0.050658	0.059348	0.209386	0.366483
30	0.15	0.21	0.27	0.36	0.42	0.45
	0.458042	0.209625	0.170722	0.159242	0.209236	0.466425
31	0.06	0.11	0.16	0.26	0.31	0.36
	0.367423	0.309322	0.270643	0.259378	0.309343	0.366422
32	0.16	0.21	0.26	0.36	0.43	0.45
	0.476412	0.419142	0.370747	0.359639	0.409145	0.466411
33	0.06	0.22	0.45	0.67	0.81	0.97
	0.946412	0.819154	0.670762	0.659639	0.809141	0.966421
34	0.06	0.10	0.16	0.25	0.32	0.36
	0.776413	0.619141	0.490749	0.559639	0.609144	0.766411
35	0.16	0.21	0.27	0.36	0.41	0.46
	0.946414	0.819141	0.720761	0.729638	0.809141	0.936412

Завдання 5.3. Розрахувати параметри експоненціальної апроксимації за методом найменших квадратів для функції (табл. 5.6), що задана вузлами, засобами системи MATLAB. Побудувати графік.

Таблиця 5.6

1	0.00	0.21	0.46	0.66	0.81	1.06
	1.058042	1.109335	1.470657	1.959342	2.559336	3.166403
2	0.00	0.21	0.36	0.56	0.73	0.95
	1.158041	1.299635	1.470752	1.959642	2.409136	2.866405
3	0.00	0.22	0.45	0.67	0.81	0.97
	1.058041	1.209637	1.470756	1.959641	2.809139	2.966401
4	0.00	0.10	0.39	0.71	0.87	1.12

	1.128041	1.207635	1.390752	1.959642	2.789136	3.026405
5	0.00	0.21	0.37	0.66	0.91	1.08
	1.050041	1.309615	1.520758	2.029644	2.809137	2.936408
6	0.00	0.19	0.36	0.76	0.89	0.99
	1.038042	1.259635	1.480752	2.139643	2.859139	3.116404
7	0.00	0.22	0.51	0.71	0.91	1.01
	1.058033	1.219687	1.420744	1.959652	2.809131	2.996335
8	0.00	0.25	0.44	0.75	0.90	1.05
	1.058041	1.259635	1.400752	1.859642	2.809136	2.986409
9	0.00	0.24	0.49	0.68	0.84	0.96
	1.048043	1.279638	1.370753	1.959644	2.689139	2.926408
10	0.00	0.21	0.51	0.70	0.89	0.98
	1.108041	1.209635	1.399772	1.909672	2.509137	3.016407
11	0.00	0.22	0.56	0.66	0.81	0.96
	1.038044	1.329638	1.570756	1.959612	2.499186	3.066495
12	0.00	0.22	0.43	0.64	0.85	0.96
	1.018041	1.419635	1.670752	1.879649	2.409135	2.966401
13	0.00	0.26	0.52	0.74	0.98	1.16
	1.028033	1.259732	1.520457	1.959542	2.479836	2.960405
14	0.00	0.23	0.47	0.68	0.85	0.96
	1.058022	1.419695	1.970752	2.300621	2.749121	3.060412
15	0.00	0.22	0.46	0.75	0.92	1.07
	1.057042	1.410335	1.869657	2.358742	2.808936	3.025903
16	0.00	0.21	0.45	0.76	0.83	0.99
	1.058039	1.409642	1.870749	2.359639	2.709129	2.066411
17	0.00	0.23	0.56	0.76	0.92	1.13
	1.058042	1.209642	1.670749	2.059638	2.509142	2.966412
18	0.00	0.21	0.45	0.64	0.81	0.98
	1.028042	1.406835	1.891152	2.259639	2.909142	3.065705
19	0.00	0.22	0.46	0.55	0.72	0.96
	1.050141	1.409525	1.820818	2.328744	2.808637	2.936398
20	0.00	0.21	0.45	0.64	0.80	1.21
	1.037942	1.258635	1.580682	2.139583	2.558139	2.986405
21	0.00	0.21	0.51	0.72	0.88	0.98
	1.059032	1.429672	1.920754	2.358752	2.808631	3.086335

22	0.00	0.25	0.50	0.65	0.80	1.01
	0.968041	1.358635	1.900748	2.358643	2.608144	2.967407
23	0.00	0.24	0.48	0.67	0.84	0.97
	0.948045	1.279598	1.570683	1.958744	2.388639	2.925801
24	0.00	0.22	0.50	0.71	0.81	1.01
	1.008141	1.209645	1.598772	2.108672	2.508137	2.818401
25	0.00	0.30	0.55	0.75	0.91	1.16
	1.038039	1.329641	1.770748	2.059608	2.499178	2.866525
26	0.00	0.22	0.43	0.64	0.75	0.96
	1.019042	1.418636	1.670852	1.879659	2.108135	2.765402
27	0.00	0.27	0.53	0.74	0.88	1.14
	1.028043	1.459742	1.820447	2.259442	2.679436	2.960445
28	0.00	0.22	0.47	0.68	0.85	0.99
	1.058122	1.419615	1.870712	2.300121	2.649111	2.960112
29	0.00	0.24	0.46	0.65	0.81	0.97
	1.058048	1.409385	1.770658	2.259348	2.709386	2.966483
30	0.00	0.21	0.47	0.66	0.82	1.05
	1.038042	1.409625	1.670722	2.159242	2.409236	2.766425
31	0.00	0.21	0.46	0.66	0.81	1.06
	1.058034	1.109341	1.470662	1.959338	2.559341	3.166411
32	0.00	0.21	0.36	0.56	0.73	0.95
	1.158039	1.299642	1.470747	1.959638	2.409142	2.866412
33	0.00	0.22	0.45	0.67	0.81	0.97
	1.058038	1.209641	1.470762	1.959637	2.809143	2.966413
34	0.00	0.10	0.39	0.71	0.87	1.12
	1.128037	1.207643	1.390749	1.959638	2.789141	3.026412
35	0.00	0.21	0.37	0.66	0.91	1.08
	1.050036	1.309621	1.520761	2.029639	2.809144	2.936415

Список літератури

1. Практикум із чисельних методів: навч. посіб. / Н. І. Полтораченко, С. А. Теренчук, Ю. Н. Убайдуллаєв. – Київ: КНУБА, 2023. – 160 с.
2. Овчинников П.П., Міхайленко В.М. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч.2. – Київ: Техніка, 2004 – 792 с.
3. Фельдман Л. П. Чисельні методи в інформатиці: підручник для студ. вищ. навч. закл. / За ред. М.З. Згуровського. – Київ : Вид. група BNV, 2006. – 479 с.
4. Ісаханов Г.В., Чорний С.М. Чисельні методи розв’язання задач будівництва. – Київ :Вища школа, 1995р. – 374 с.
5. Сплайн-функції та їх застосування: навч. посіб. / Б.П. Довгий, А.В. Ловейкін, Є.С. Вакал, Ю.Є. Вакал. – Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2016. – 117 с.
6. Чисельні методи: методичні вказівки до практичних занять / О.І. Баліна, І.С. Безклубенко, О. В. Горда, Н.І. Полтораченко. – Київ: КНУБА, 2011. – 44 с.
7. Чисельні методи. Чисельне диференціювання та інтегрування: методичні вказівки до практичних занять / О. В. Горда, Н.І. Полтораченко. – Київ: КНУБА, 2012. – 36 с.

Навчально-методичне видання

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Методи обробки експериментальних даних

Методичні вказівки та завдання

до виконання лабораторних робіт
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності G3 «Електрична інженерія»

Укладач **ПОЛТОРАЧЕНКО** Наталія Іванівна

Комп'ютерне верстання *Ю.М. Долгополової*

Ум. друк. арк. 3,95. Обл.-вид. арк. 4,25
Електронний документ. Вид № 43/V-26.

Виконавець і виготовлювач

Київський національний університет будівництва і архітектури
Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002