УДК 539.3

Гуляєв В. І., д-р техн. наук,
Бєлова М. О., канд. фіз.-мат. наук,
Горбунович І. В.

ДО РОЗРАХУНКУ СТІЙКОСТІ ТА КОЛИВАНЬ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ

Ефективним способом проходки шахтових стволів і свердловин великого діаметра є використання бурильних установок роторного типу. Основною умовою підвищення якості проходки стволів і свердловин є проведення буріння із заданою рейсовою швидкістю та із забезпеченням вертикальності осі ствола. Невиконання цих вимог призводить до звичайних утрат енергетичних ресурсів і часу. Наприклад, для бурових установок роторного типу при проходці шахтових вентиляційних стволів відхилення осі ствола від вертикалі не повинно перевищувати 1м на 100м глибини.

Великі глибини буріння, що визначають значні навантаження, та ефективність проходки стволів і свердловин викликають необхідність проведення розрахунків напружено-деформованого стану бурильної колони (БК), який багато в чому залежить від режимів буріння. Крім того, ефективність проходки стволів часто залежить від тих граничних режимів, які можуть розвинути бурові установки. Усе це вимагає врахування динамічних навантажень, як найбільш небезпечних ускладнень у процесі буріння [4, 7, 9]. Для цього необхідно дослідити напружено-деформований стан БК при динамічних навантаженнях і умови втрати її стійкості, яка є однією з основних причин відхилення буріння від заданого вертикального напрямку. При дослідженні цих проблем виникають певні труднощі, які досі у теорії розрахунку БК не були достатньо вивчені. До основних із них можна віднести вимушені коливання систем із розподіленими і зосередженими масами та вивчення на їх основі процесів у бурових установках, а також стійкості колони як вагомого стержня, що зазнає розтягу-стиску, при різних граничних умовах і великих глибинах буріння. Крім того, значна частина методів розв’язання практичних задач - це наближені методи, точність яких в існуючій літературі не оцінено. Тому розробка нових моделей динамічних процесів, уточнення розрахунків на міцність і стійкість БК та оцінка існуючих наближених розв’язків із визначенням границь їх застосування, що сприяють встановленню ефективних режимів буріння, якості проходки стволів і свердловин, запобіганню аварійних ситуацій, є актуальною і важливою проблемою будівельної механіки та механіки деформованого твердого тіла.

Багаторічний досвід експлуатації бурильних установок свідчить, що від статичного навантаження БК руйнуються рідко. Більшість аварій на бурових установках відбувається від динамічних навантажень, які обумовлюють процеси руйнування конструкцій установок.

Із урахуванням технологічних процесів буріння на БК при роторному способі буріння діють різноманітні види навантажень, основними з яких є:

- розтяг на верхній ділянці колони від власної ваги колони та ваги обважнювачів із долотом;
- стиснення на нижній ділянці колони;
- згин на нижній ділянці колони;
- додаткові динамічні навантаження, що виникають при обертанні колони, при ударних процесах і вимушених коливаннях;
- крутильний момент, необхідний для обертання колони і руйнування породи;
- навантаження, обумовлені наявністю тертя з боку промивної рідини.

У процесі роторного буріння виникають статичні та динамічні навантаження. Якщо врахування статичних навантажень, як правило, особливих труднощів не завдає, то розрахунок на динамічні навантаження вимагає знання певних законів коливань, що викликає ускладнення у проведенні розрахунків.

Нехай бурильна колона обертається з кутовою швидкістю ω. Для побудови рівнянь її руху введемо інерційну систему координат $OXYZ$ з початком у точці підвісу і пов'язану з колоною систему координат $Oxyz$ з ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, яка обертається разом з нею. У вихідному недеформованому стані осі OZ і Oz співпадають із повздовжньою віссю колони. Будемо досліджувати стійкість колони і її коливань у системі координат $Oxyz$, що обертається. Приймемо, що пружні переміщення її елементів вздовж осей Ox і Oy складають u і v, переміщеннями вздовж осі Oz знехтуємо.

Динамічна рівновага колони описується рівняннями згину балки в площинах xOz і yOz відповідно

$$\frac{d^2 M_y}{dz^2} = q_x, \qquad \frac{d^2 M_x}{dz^2} = q_y. \tag{1}$$

Тут M_x, M_y - внутрішні моменти в розглянутому перерізі балки, які діють відносно осей, що проходять через центр перерізу паралельно осям Ox і Oy; q_x і q_y - інтенсивності зовнішніх навантажень, напрямлених паралельно відповідним осей.

Підкреслимо, що у випадку, який розглядається, для функцій M_x, M_y стандартні рівності

$$M_x = EI\frac{d^2v}{dz^2}, \qquad M_y = EI\frac{d^2u}{dz^2}$$

є неприйнятні, оскільки балка попередньо напружена повздовжньою силою Т і зовнішнім крутильним моментом M_z, що викликає додаткові згинаючі моменти у балці при її деформуванні [6, 8]. Тому для згинаючих моментів використовуються формули

$$M_x = EI\frac{d^2v}{dz^2} - Tv + M_z\frac{du}{dz}, \quad M_y = EI\frac{d^2u}{dz^2} - Tu + M_z\frac{dv}{dz}, \tag{2}$$

в яких другі доданки в правих частинах визначають додаткові згинаючи моменти, обумовлені ексцентриситетом повздовжньої сили розтягу Т при деформуванні балки, а треті доданки представляють добавки до згинаючих моментів, спричинені проектуванням зовнішнього крутильного моменту M_z на осі Ox і Oy при скривленні осьової лінії балки.

Для обчислення складових q_x і q_y повздовжнього розподіленого навантаження на балку необхідно враховувати, що в межах 0<z<L, де L - довжина балки, на неї не діють ніякі активні сили і роль цих сил виконують сили інерції, викликані обертанням балки та її пружними коливаннями. Тому вектор $\vec{q}$ цього навантаження знаходиться за допомогою рівності

$$\vec{q} = -\rho F\vec{a}\ , \tag{3}$$

де ρ - густина матеріалу балки, F - площа її поперечного перерізу, $\vec{a}$ - абсолютне прискорення елемента, що розглядається. Знаходячи вектор $\vec{q}$, урахуємо, що механічна поведінка балки розглядається в системі координат Oxyz, яка обертається; у зв’язку з цим рух кожного елемента є складним. У цьому випадку його абсолютне прискорення $\vec{a}$ обчислюють за формулою Коріоліса [2]

$$\vec{a} = \vec{a}^{e} + \vec{a}^{r} + \vec{a}^{c}, \tag{4}$$

де $\vec{a}^{e}$, $\vec{a}^{r}$, $\vec{a}^{c}$ - вектори переносного, відносного та коріолісового прискорення відповідно.

Вектор переносного прискорення $\vec{a}^{e}$ знаходять за формулою

$$\vec{a}^{e} = \vec{\omega}\times(\omega\times\vec{r}), \tag{5}$$

де $\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + z\vec{k}$ - радіус-вектор елемента балки в системі координат *Oxyz*.

Виконавши відповідні векторні операції, дістанемо

$$a_x^e = -\omega^2 u, \;\; a_y^e = -\omega^2 v, \;\; a_z^e = 0. \tag{6}$$

Складові вектора відносного прискорення в напрямах осей координат Oxyz визначаються рівностями

$$a_x^r = \frac{d^2u}{dt^2}, \;\; a_y^r = \frac{d^2v}{dt^2}, \;\; a_z^r = 0. \tag{7}$$

Вектор коріолісового прискорення $\vec{a}^{c}$ елемента балки обчислюється за формулою

$$\vec{a}^{c} = 2\vec{\omega}\times V^{r}, \tag{8}$$

де $\vec{V}^{r}$ - вектор відносної швидкості елемента зі складовими

$$V_x^r = \frac{du}{dt}, \;\; V_y^r = \frac{dv}{dt}, \;\; V_z^r = 0. \tag{9}$$

Враховуючи рівності (7), (8), дістаємо

$$a_x^c = -\omega\frac{dv}{dt}, \;\; a_y^c = \omega\frac{du}{dt}, \;\; a_z^c = 0. \tag{10}$$

Підставляючи знайдені значення компонент прискорень (6), (7), (10) в (4), а потім у (3), отримаємо складові вектора сил інерції

$$q_x = -\rho F(-\omega^2 u - 2\omega\frac{dv}{dt} + \frac{d^2u}{dt^2}),$$

$$q_y = -\rho F(-\omega^2 v - 2\omega\frac{du}{dt} + \frac{d^2v}{dt^2}). \tag{11}$$

Після переходу від звичайних похідних до частинних на основі співвідношень (1), (2), (11) будують рівняння коливань балки, яка обертається і напружена повздовжньою силою Т і крутильним моментом M_z

$$
\begin{aligned}
&EI\,\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}-\frac{\partial}{\partial z}\left(T\,\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(M_z\,\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\rho F\omega^2 u-2\rho F\omega\frac{\partial v}{\partial t}+\rho F\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\\
&EI\,\frac{\partial^4 v}{\partial z^4}-\frac{\partial}{\partial z}\left(T\,\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(M_z\,\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\rho F\omega^2 v+2\rho F\omega\frac{\partial u}{\partial t}+\rho F\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0.
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

За допомогою цієї системи можна досліджувати динамічну поведінку і стійкість бурильної колони. Роль повздовжньої сили Т в цьому випадку виконує внутрішня сила, що викликається дією реакцій на верхньому кінці закріплення і на нижньому кінці спирання ріжучого інструмента, а також силами ваги самої колони. Крутильний момент M_z, що діє на колону спричинено силами опору різанню на нижньому кінці та приводним крутильним моментом на верхньому кінці. У зв’язку з цим звичайно вважають, що величина Т лінійно змінюється вздовж координати *z*, а M_z залишається сталим.

Відзначимо, що система (12), не зважаючи на її лінійність, має досить складну структуру, обумовлену наявністю доданків виду $\partial^2\left(M_z\cdot\partial v/\partial z\right)\partial z^2$, $-\partial^2\left(M_z\cdot\partial u/\partial z\right)\partial z^2$ і $-2\rho F\omega\,\partial v/\partial t$, $-2\rho F\omega\,\partial u/\partial t$ у першому і другому рівняннях. Так, присутність перших двох доданків призводить до того, що система не допускає розв’язку у формі плоскої кривої й осьова лінія зігнутої колони може бути тільки тривимірною кривою (у даному випадку - спіраллю). Наявність інших двох доданків призводить до складнішого закону зміни форми коливань як за просторовою, так і часовою координатами, виключаючи можливість руху елементів колони з однією спільною фазою.

Зазначене ускладнення форм коливань призводить до суттєвого ускладнення і методики дослідження. Оскільки аналітичні методи для розв’язання цієї системи виявляються неприйнятними, при їх теоретичному моделюванні слід орієнтуватися на чисельні підходи. Проте й при їх використанні виникають суттєві труднощі, пов’язані з необхідністю розглядати колони великої довжини. На великих інтервалах інтегрування система (12) набуває так званої “обчислювальної жорсткості”, у результаті чого суттєво погіршується збіжність чисельних методів її інтегрування. У даній роботі для дослідження системи пропонується використати метод початкових параметрів разом з методом Рунге - Кутта і процедурою ортогоналізації за Годуновим.

Розглянемо алгоритм побудови розв'язку системи (12) на прикладі задачі про стійкість бурильної колони. У цьому випадку рівняння (12) зводяться до виду

$$EI\frac{d^4u}{dz^4}-\frac{d}{dz}\left(T\frac{du}{dz}\right)-M_z\frac{d^3v}{dz^3}-\rho F\omega^2u=0,$$
$$EI\frac{d^4v}{dz^4}-\frac{d}{dz}\left(T\frac{dv}{dz}\right)+M_z\frac{d^3u}{dz^3}-\rho F\omega^2v=0. \quad (13)$$

Нехай на кінцях $Z=0$ і $Z=L$ колону шарнірно закріплено і реалізуються крайові умови

$$u(0)=v(0)=0,\qquad \left.\frac{d^2u}{dz^2}\right|_{z=0}=\left.\frac{d^2v}{dz^2}\right|_{z=0}=0,$$
$$u(L)=v(L)=0,\qquad \left.\frac{d^2u}{dz^2}\right|_{z=L}=\left.\frac{d^2v}{dz^2}\right|_{z=L}=0. \quad (14)$$

Будемо вважати кутову швидкість ω параметром і розглянемо задачу про визначення його значення, при якому колона випинається. Тоді для системи (13), (14) потрібно поставити задачу на власні значення. Для цього запишемо її в векторній формі

$$\frac{d^4\vec{y}}{dz^4}=F(z)\vec{y}+\omega^2y, \quad (15)$$

$$A\vec{y}(0)=0,\quad B\vec{y}(L)=0. \quad (16)$$

Тут $\vec{y}(z)$ восьмивимірний вектор невідомих, $F(z)$ змінна матриця коефіцієнтів розміру 8×8, A, B - сталі матриці розміру 4×8.

Розв'язок системи (15) будуємо у формі Коші [1]

$$\vec{y}(z)=Y(z)\cdot\vec{C}, \quad (17)$$

де $Y(z)$ - матриця Коші розміру 8×8 розв'язків системи (15) з початковими умовами

$$Y(0)=\begin{Vmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{Vmatrix},$$

$\vec{C} = (c_1, c_2, ..., c_8)^T$ - шуканий сталий вектор. Його компоненти знаходяться із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка будується підстановкою правої частини (17) у ліві частини умови (16). Значення ω в (15), при якому визначник матриці коефіцієнтів цієї системи дорівнює нулю, є критичним. При цьому значенні кутової швидкості бурильна колона втрачає стійкість. Форма втрати стійкості будується за допомогою рівності (17) підстановкою в її праву частину знайденого вектора $\vec{C}$. Аналогічно розв'язується задача про вільні коливання колони у часі в формі гармонік з шуканою частотою. Система рівнянь(12) з частинними похідними зводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь, яка потім аналізується за наведеним вище алгоритмом.

Відзначимо, що в окремих випадках рівняння (13), що описують стійкість бурильної колони, мають аналітичні розв'язки, які можуть бути використаними для тестування розглянутої методики. Так, якщо кручення й обертання колони відсутні і вона знаходиться під дією повздовжньої стискуючої сили P, прикладеної на краях $Z = 0$ і $Z = L$, рівняння (13) спрощуються і розпадаються на два незв'язні рівняння

$$EI\frac{d^4u}{dz^4} - p\frac{d^2u}{dz^2} = 0, \qquad EI\frac{d^4v}{dz^4} + p\frac{d^2v}{dz^2} = 0.$$

Вони визначають Ейлерову критичну силу [5]

$$P_э = \frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

Задача допускає просте розв'язання і у випадку балки, якщо $T = 0$, $M_z = 0$. Тоді система також розпадається

$$EI\frac{d^4u}{dz^4} - \rho F\omega^2 u = 0, \qquad EI\frac{d^4v}{dz^4} - \rho F\omega^2 v = 0.$$

Із неї можна знайти критичну швидкість [2, 3]

$$\omega_{кр} = \frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho F}}.$$

Проте при навантаженні системи крутильним моментом M_z рівняння (13) є зв'язаними, і задача визначення критичних параметрів системи ускладнюється. У випадку $\omega = 0$, $T = -P = const$ і $M_z = const$, її розв'язання наведено в роботі [6]

$$M_z^{кр} = \pm\sqrt{EI} \cdot \sqrt{P_э + P} .$$

Якщо три фактори навантаження стержня присутні одночасно і сила $T \neq const$, то задача стійкості не має аналітичного розв'язку. Для його побудови в цьому випадку зручно застосувати описаний вище підхід.

1. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теорія коливань і стійкості руху. – К.: Вища школа, 2004. – 526 с.
2. Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А. и др. Устойчивость периодических процессов в нелинейных механических системах. – Львов: Вища школа, 1983. – 287 с.
3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
4. Сароян А.Е. Теория и практика работы бурильной колонны. – М.: Наука 1990. – 264 с.
5. Светлицкий В.А. Механика стержней. М.: Высшая школа, 1987. Ч. 2: Динамика. – 304 с.
6. Федосеев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967. – 237 с.
7. Харченко Е.В. Динамические процессы буровых установок. – Львов: Свиточ, 1991. – 176 с.
8. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – 192 с.
9. Юртаев В.Г. Динамика буровых установок. – М.: Наука, 1987. – 155 с.

Надійшло до редакції 16.10.2006 р.