УДК 621.979.31

Б.М. Пентюк, канд. техн. наук, доцент, Вінницький соціально- економічний інститут університету «Україна»

ОЦІНКА СИЛ ВЗАЄМОДІЇ МІЖ ЧАСТИНКАМИ ПОРОШКОВОГО МАТЕРІАЛУ НА ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК МОДЕЛЕЙ УДАРУ

Вступ. Постановка задач досліджень.

Вібропресування є одним із найпоширених способів при виготовленні виробів із порошкових (дрібнозернистих) матеріалів (ПМ). В роботах [1, 2] були визначені характеристики процесу навантаження, отримані патенти на винахід [3, 4] та сформульовані основні принципи створення машин [5]. Важливим елементом в загальній схемі роботи вібропресового обладнання є оцінка взаємодії між частинками матеріалу, яка дає можливість оцінити процес розподілення щільності по об'єму виробу та визначити характеристики, що впливають на процес формоутворення виробу. В основі рішення задачі лежать класичні положення моделей удару.

Методика та результати досліджень.

В основі побудови моделі удару, що застосовується у даній роботі для аналізу взаємодії частинок ПМ при його вібропресуванні у прес-формі, лежать дві основні концепції. Вважатимемо, по-перше, що при взаємодії частинок ПМ при їх зіткненні суттєвими є лише місцеві деформації у зоні контакту, а загальні деформації частинок ПМ, що зіткнулись між собою, малі у порівнянні з місцевими і тому ними можна знехтувати. Друга концепція полягає в тому, що залежність контактної сили від контактної деформації при ударі залишається такою ж, як і при статичному стискуванні тіл. Використовуючи такі припущення, можна звести задачу удару частинок ПМ між собою звести до задачі дослідження відносного руху твердих тіл, що взаємодіють між собою через пружний елемент.

Властивості пружнього елементу, що моделює контактні деформації частинок ПМ при їх взаємодії, проявляються лише при стискуванні, а на розтяг пружний елемент не працює. Якщо позначити через α зближення центрів мас частинок під час удару, тоді контактна сила визначиться виразом:

$$F(\alpha)=\begin{cases} k\cdot\alpha^{3/2}, якщо\, \alpha\geq 0 \\ 0, якщо\, \alpha<0 \end{cases}, \qquad (1)$$

де к – коефіцієнт пропорціональності, що залежить від кривизни поверхонь частинок ПМ у точці контакту й властивостей матеріалу цих часточок.

Якщо поверхні часточок ПМ є сферичними, то:

$$R=\frac{4}{3\cdot\left[(1-\mu_1^2)/E_1+(1-\mu_2^2)/E_2\right]}\cdot\sqrt{\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}},$$

де R_1, R_2 – радіуси кривизни поверхонь контакту частинок ПМ, що перебувають у зіткненні; μ_1, μ_2 – коефіцієнти Пуассона; E_1, E_2 – модулі пружності цих частинок ПМ.

Якщо частинки ПМ з одного й того ж матеріалу ($\mu_1=\mu_2=\mu$; $E_1=E_2=E$), тоді:

$$R=\frac{2E}{3\cdot(1-\mu^2)}\cdot\sqrt{\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}}.$$

Якщо всі часточки ПМ одного й того ж радіусу ($R1=R2=R$), тоді:

$$R=\frac{2E}{3\cdot(1-\mu^2)}\cdot\sqrt{\frac{R}{2}}=\frac{E\cdot\sqrt{2R}}{3\cdot(1-\mu^2)}.$$

Якщо поверхневий прошарок ПМ (набір сферичних утворень радіусу R) знаходиться з ідеально плоскою поверхнею РОВ, тоді ($R_1=\infty$, $R_2= R$):

$$R = \frac{4}{3\cdot\left[(1-\mu_1^2)/E_1 + (1-\mu_2^2)/E_2\right]}\cdot\sqrt{R_2}\ ,$$

де індекси „1” - відносяться до матеріалу РОВ, а „2” – до матеріалу частинок ПМ сферичної форми.

Складаючи диференціальні рівняння руху для кожної частинки ПМ, можна потім отримати для їх відносного руху:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{(m_1+m_2)}{m_1 m_2}\cdot F(\alpha)\,. \qquad (2)$$

Рівняння (2) слід проінтегрувати за початкових умов:

$$\alpha/_{t=0} = 0\,,\ \frac{d\alpha}{dt}/_{t=0} = V_1 - V_2 = V_0\,.$$

Однократне інтегрування (2) і використання умови перетворення кінетичної енергії відносного руху у роботу контактної сили дозволяють визначити максимальне зближення центрів мас частинок ПМ при зіткненні:

$$\alpha_{\max} = (5\cdot m\cdot\frac{V_0^2}{4R})^{2/5}\,,$$

де $m=m_1m_2/(m_1+m_2)$; $V_0=V_1-V_2$ (При $m_1=m_2$, m стає рівною масі однієї частинки ПМ).

Максимальна сила контактної взаємодії частинки ПМ:

$$F_{\max} = R^{2/5}\cdot(\frac{5}{4}\cdot m\cdot V_0^2)^{3/5}\,.$$

Знаючи $\alpha_{\max}$ й $F_{\max}$, можна знайти тривалість ударної взаємодії частинок ПМ:

$$\tau = 2{,}9432\cdot(\frac{5}{4}\cdot\frac{m}{R})^{2/5}\cdot V_0^{-1/5}\,.$$

Для визначення характеру зміни контактної сили часточок ПМ у період їх ударної взаємодії необхідно проінтегрувати диференціальне рівняння виду:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{V_0^2 - \frac{2}{m}\cdot\int_0^{\alpha} F(\alpha)d\alpha}\ ,$$

розв'язок котрого наближено може бути описаний виразом:

$$\alpha = \alpha_{\max}\cdot\sin\left\{\frac{1{,}06\cdot V_0\cdot t}{\alpha_{\max}}\right\}.$$

Сила контактної взаємодії частинок ПМ при взаємодії визначиться тоді виразом:

$$F = \begin{cases} R\cdot\left(\alpha_{\max}\cdot\sin\left\{\dfrac{1{,}06\cdot V_0\cdot t}{\alpha_{\max}}\right\}\right)^{3/2}, \text{якщо} 0\le t\le\tau \\ 0, \text{якщо} t>\tau \end{cases}. \qquad (3)$$

У роботах І. Я. Штаєрмана сила контактної взаємодії пов'язана із зближенням центрів мас (частинок ПМ) тіл залежністю:

$$F = R\cdot\alpha^{(2n+1)/2n},\ n=1,\ 2,.... \qquad (4)$$

Модель контактної взаємодії Герца є окремим випадком моделі при n=1. Із збільшенням n вираз $\left(\frac{2n+1}{2n}\right)$ прямує до одиниці; при $n\to\infty$ сила контактної взаємодії пропорціональна зближенню частинок ПМ:

$$F = R\cdot\alpha\,.$$

В. Л. Бідерман запропонував лінійну апроксимацію нелінійної функції $F(\alpha)$, засновану на умові балансу енергії деформації при максимальному зближенні центрів

інерції тіл (частинок ПМ) у процесі зіткнення. Контактна сила при цьому відповідає наступній залежності:

$$F = \begin{cases} 0, якщо \alpha < \alpha_0 \\ C \cdot (\alpha - \alpha_0), якщо \alpha \geq \alpha_0 \end{cases},$$

де $\alpha_0 = \frac{1}{5}\alpha_{\max}$; $C = \frac{5}{4} \cdot R^{2/3} \cdot F_{\max}^{1/3}$. При цьому знайдено:

$$\alpha = V_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot \sin\left\{\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t\right\} + \alpha_0,$$

$$F = C \cdot V_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot \sin\left\{\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t\right\}, t < \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (5)$$

Розглянемо оцінку цих же параметрів на основі використання енергетичної моделі удару.

Відомі прийоми наближеної оцінки максимальних зусиль при взаємодії двох тіл, що базуються на використанні теореми про зміну кінетичної енергії тіл й певних припущеннях про характер їх деформації. У подальшому називатимемо такі моделі взаємодії/удару РОВ з ПМ (у прес-формі) енергетичними.

Розглянемо процес при умові приймаючи, що РОВ масою m, рухаючись зі швидкістю V_0, вдаряє по кінцю стрижня, який представляє собою модель процес руху порошкового матеріалу у прес-формі.

Вважатимемо, що кінетична енергія тіла m (РОВ) T до моменту його зупинки перетворюється у потенціальну енергію деформації стрижня V, усі перерізи котрого знаходяться у однаковому напруженому стані (модель ПМ у прес-формі): T=V, або

$$\frac{1}{2} m \cdot V_0^2 = \delta^2 \cdot S \cdot \frac{l}{(2E)} = \frac{F_{\max}^2 \cdot l}{2ES}, \quad (6)$$

де m – маса ударника (РОВ); V_0 – його швидкість перед зіткненням з ПМ; E, S, l – відповідно модуль пружності, площа поперечного перерізу та довжина стрижня; $F_{\max}$ – максимальна ударна сила. Зі співвідношення (6) можна знайти:

$$F_{\max} = V_0 \cdot \sqrt{\frac{m \cdot E \cdot S}{l}}. \quad (7)$$

Цей підхід базується на явно довільному припущенні про рівномірний розподіл деформацій по довжині стрижня (ПМ) у момент зупинки всіх його частин. Якщо, наприклад, прийняти лінійний характер розподілу напружень δ, вважаючи, що найбільші зі значень відповідають ударному перерізу (x=0), а у перерізі x=l напруження δ дорівнює нулю, тоді:

$$\delta = \delta_{\max} \cdot \left[\frac{(l - x)}{l}\right], \frac{1}{2} m \cdot V_0^2 = \delta_{\max}^2 \cdot \frac{S \cdot l}{(6E)},$$

звідки,

$$\delta_{\max} = V_0 \cdot \sqrt{\frac{3mE}{(Sl)}}, F_{\max} = \delta_{\max} \cdot S = V_0 \sqrt{\frac{3m \cdot E \cdot S}{l}} \approx 1{,}73 \cdot V_0 \sqrt{\frac{m \cdot E \cdot S}{l}}, \quad (8)$$

тобто у 1,73 рази більше, ніж результат, отриманий з (7).

У основу метода для оцінки максимальної ударної сили може бути покладена не тільки теорема про зміну кінетичної енергії у системі, але й інші закони механіки, наприклад теорема імпульсів, і умова збереження кількості руху системи тіл, що знаходяться у зіткненні.

У загальному випадку при ударі тіла з розподіленою масою деформації, що виникають у ньому, є функцією координати й часу. Відома модель Релея, у якій переміщення перерізів тіла можуть бути подані у вигляді:

$$x(z,t) = f(t) \cdot \varphi(z), \tag{9}$$

де $x(z,t)$ – переміщення перерізів тіла (наприклад, ПМ); $\varphi(z)$ – деяка задана функція, що залежить тільки від координати z; $f(t)$ – функція, що залежить від часу й повинна бути визначена.

Величину ударної сили при цьому можна знайти як:

$$F = E \cdot S' \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \mathrm{Z}} \right) = E \cdot S' \cdot f(t) \cdot \varphi'(\mathrm{Z}). \tag{10}$$

Розглянемо тіло маси m_1 (РОВ), що рухається зі швидкістю V_0 й завдає удару по нерухомому стрижню (модель ПМ) маси m_2 й довжини l. Знайдемо максимальне значення ударної сили.

Вважатимемо, що координата центру ваги стрижня дорівнює $\mathrm{Z}_c = \frac{l}{2}$, а деформації у стрижні розподілені за лінійним законом $\varphi(\mathrm{Z}) = \lambda \cdot (l - \mathrm{Z})$, де $\lambda = const$. Тоді:

$$\varphi(\mathrm{Z}_c) = \frac{\lambda \cdot l}{2}.$$

Рух стрижня обумовлений впливом ударної сили F (0, t). Використовуючи теорему про рух центру ваги системи, запишемо:

$$m_2 \cdot \left(\frac{d^2 x_c}{dt^2} \right) = F(0,t), \tag{11}$$

де x_c – переміщення центру ваги стрижня при ударі.

Підставляючи (9) – (10) у вираз (11), отримаємо наступне рівняння:

$$f''(t) + p^2 \cdot f(t) = 0,$$

де $p^2 = 2ES \cdot \frac{[-\varphi(0)]}{(m_2 l \lambda)} = \frac{2E}{\rho l^2}$, ρ – щільність ПМ.

Розв'язок рівняння має вигляд:

$$f(t) = A \cdot \cos pt + B \cdot \sin pt. \tag{12}$$

Постійне інтегрування А і В визначається із початкових умов:

$$x(\mathrm{Z},0) = f(0) \cdot \varphi(\mathrm{Z}) = 0; \tag{13}$$

$$\dot{x}(\mathrm{Z},0) = f'(0) \cdot \varphi(\mathrm{Z}) = V_0. \tag{14}$$

Перша умова (13) призводить до того, що $f(0)=0$, а відповідно, з рівняння (12) А=0.

Друга умова не може бути тотожно виконана для будь-яких значень z. Вимагатимемо, щоб рівність (14) задовольнялась при z=0: $f'(0) \cdot \varphi(0) = V_0$, звідки $B = \frac{V_0}{p\lambda l}$, $f(t) = \frac{V_0}{p\lambda l} \cdot \sin pt$. Тоді з виразу (11) випливає, що:

$$\begin{aligned} F &= -E \cdot S \cdot \left(\frac{V_0}{p\lambda l} \right) \cdot (\sin pt) \cdot \lambda \\ F_{\max} &= -E \cdot S \cdot \left(\frac{V_0}{pl} \right) = \frac{a\rho S \cdot V_0}{\sqrt{2}} \end{aligned}. \tag{15}$$

Отже, отримані залежності (15) дають можливість визначити силу взаємодії РОВ з ПМ у відповідних перерізах ПМ.

Важливим аспектом при дослідженні взаємодії РОВ з ПМ є оцінка взаємодії прямих й зворотніх хвиль. Нові хвильові стани утворюються на границях ділянок РОВ і ПМ, де відбувається зміна їх ударної жорсткості (зміна площі поперечного перерізу, щільності матеріалу; торцевих елементів РОВ і ПМ), яка представляє собою вираз:

$$C_{óä.} = \frac{ES}{a}, C_{óä.} = \rho Sa, \qquad (16)$$

де E – модуль пружності даного перерізу, S – його площа, a – швидкість розповсюдження поздовжніх хвиль (у даному $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, ρ – щільність матеріалу у даному, конкретному перерізі). У складних уданих системах вібропресування ПМ стан будь-якого перерізу визначається накладанням станів, які виникли при проходженні усіх попередніх прямих та зворотних (обернених, відбитих) хвиль.

Висновки:

1. Отримані аналітичні залежності, що враховують силові співвідношення в дрібнозернистих матеріалах при взаємодії частинок між собою.
2. Запропонована формула для визначення ударної жорсткості, яка враховує хвильові характеристики дрібнозернистого матеріалу.
3. Виявлені основні параметри їх впливу на процес взаємодії силових характеристик, які необхідно враховувати при розрахунках робочих параметрів вібропресів.

Література

1. *Пентюк Б.М.* Особливості вібропрасування пустотних вогнетривких заготовок у прес-формі закритого типу. // Техніка будівництва. – 2002. – № 12. – С. 32–37.
2. *Пентюк Б.Н.* Вибропресс для переработки отходов огнеупорного производства. Зб. наукових праць «Проблеми та перспективи розвитку процесів і машин обробки тиском». Краматорськ: ДДМА. – 2002. – С.21–22.
3. Патент України 60513. Пристрій для вібропрасування вогнетривких виробів /Пентюк Б.М., Дмітрієв М.Д. (Україна); опубл. Бюл. № 10, 2003 р. – 2 с.
4. Патент України 73840. Спосіб виготовлення заготовок із дрібнозернистих матеріалів /Пентюк Б.М., Назаренко І.І., Дмітрієв М.Д. (Україна); опубл. Бюл. № 9, 2005 р. – 3 с.
5. *Пентюк Б.М.* Високоефективні машини і процеси у керамічному виробництві: Монографія. – К.: МП «Леся», 2005. – 240 с.