



УДК 621.87

*В.С. Ловейкін, д-р техн. наук, професор КНУБА,**Ю.В. Човнюк, канд. техн. наук, Вища школа економіки та ділової адміністрації
"АЖІО–Коледж" (м. Київ),**М.Г. Діктерук, канд. техн. наук, доцент КНУБА*

КОМПЛЕКСНИЙ КРИТЕРІЙ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РЕЖИМІВ РУХУ МОСТОВИХ КРАНІВ: МОДЕЛЬ КРАНОВОГО ВІЗКА З ГНУЧКИМ ПІДВІСОМ ВАНТАЖУ

У [1–3] розглянута модель мостового крану і його візка у вигляді кранового візка з гнучким підвісом вантажу. До такої універсальної моделі можна звести й задачі аналізу динаміки механізмів зміни вильоту вантажу баштового крана при нерухомій стрілі, перевантажувачів і т.д. Роботі таких механізмів властиві значні коливання вантажу, які суттєво впливають на точність виконання перевантажувальних операцій, їх продуктивність, втомленісну зношеність металоконструкцій кранів, приводних механізмів вантажопідйомних машин, фізіологічний стан кранівника (і, як наслідок, – схильність до вібраційних хвороб), бо власні частоти організму останнього можуть співпадати з характерними частотами коливань (крану, конструкцій, вантажопідйомних машин) й викликати небажані для людини (шкідливі для її здоров'я) вібраційні резонанси. Хоча й існує значна кількість робіт [4–9], які присвячені аналізу цих проблем, однак проблема є актуальною, бо повністю позбутись коливань вантажу поки що не вдається.

Відомо [2], що основною фізичною причиною розгойдування вантажу при пускові чи гальмуванні кранів є так звані маятникові коливання вантажу, котрі викликають нерівно мірний рух кранів чи вантажних візків, додаткові навантаження на силові елементи кранів, створюють несприятливі умови при їх експлуатації, що, безумовно, слід враховувати при уточнених розрахунках динаміки кранів.

Для мостових, козлових та деяких інших кранів стандартних параметрів, які переміщуються вздовж рейкового шляху, частота маятникових коливань вантажу відносно крану суттєво нижче частоти пружних коливань кранової металоконструкції та трансмісії механізму руху [2]. Навіть за малої довжини виска канатів (не більше 3 м) частота маятникових коливань 2...2,6 рад/с, у той час як частота пружних коливань кранів у декілька разів, а то, навіть, й у десятки разів вища !

Ця обставина дозволяє вважати, що маятникові коливання вантажу є практично незалежними від пружних коливань крану й при їх розрахунку металоконструкцію та трансмісію механізму руху (переміщення) можна прийняти абсолютно жорсткими. При визначенні динамічних навантажень, діючих на металоконструкцію та трансмісію механізму переміщення, закон зміни горизонтальної складової натягу канатів, що виникає у результаті маятникових коливань вантажу, можна задавати у вигляді відомої функції часу, яка визначена за схемою абсолютно жорсткого крану. Цей прийом дозволяє знизити порядок рівнянь руху кранової динамічної системи на дві одиниці [2, 10].

У відповідності з викладеним вище розрахунок маятникових коливань вантажу на канатах можна звести до простої схеми двохмасової системи (рис.1).

На рис.1.: m_1 – маса крана чи вантажного візка, яка зведена до поступального переміщення (крана чи візка); m_2 – маса вантажу; g – прискорення вільного падіння; $G = m_2g$ – вага вантажу; P – сумарне тягове (чи гальмівне) зусилля приводних коліс крану чи візка; W – сила опору переміщенню крану чи візка (моделюється за законом тертя Кулона–Амонтона, тобто $W = k_{\text{терп.}} \cdot N$, де $k_{\text{терп.}}$ – коефіцієнт тертя приводних коліс крану чи візка з рейками рейкового шляху, N – реакція опори, що діє на кран чи візок); x_1, x_2 – горизонтальні переміщення мас m_1, m_2 ; S – сумарний натяг канатів; m_1g – вага

візка (чи крану); φ – кут відхилення канатів від вертикалі; T – горизонтальна складова зусиль у канатах; l – довжина виска канатів.

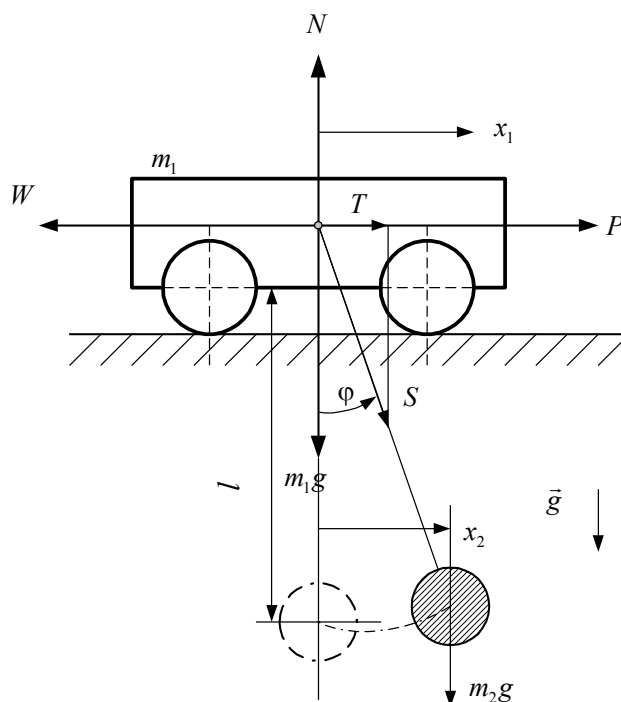


Рис.1. Схема маятникових коливань вантажу у динамічній моделі руху кранового візка

Основні співвідношення та система диференціальних рівнянь руху вказаної системи мають вигляд

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = P - W + S \sin \varphi; \\ 0 = +N - m_1 g - S \cos \varphi; \\ m_2 \ddot{x}_2 = -S \sin \varphi; \\ 0 = -m_2 g + S \cos \varphi; \\ x_2 = x_1 + l \sin \varphi. \end{cases} \quad (1)$$

Систему диференціальних рівнянь (1) можна звести до

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = P - k_{мерт.} N + S \sin \varphi; \\ N = m_1 g + S \cos \varphi; \\ \ddot{x}_2 = -g \cdot \operatorname{tg} \varphi. \end{cases} \quad (2)$$

У (1) й (2) крапки над x_i , $i = \overline{(1,2)}$, означають, як завжди, диференціювання по часу t ($\dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt}$, $\ddot{x}_i \equiv \frac{d^2 x_i}{dt^2}$ й т.д.). Враховуючи зв'язок x_2 й x_1 , наведений у (1), можна (2) звести до

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = P - k_{мерт.} (m_1 g + S \cos \varphi) + S \sin \varphi; \\ \ddot{x}_1 + l \{ (-\sin \varphi)(\dot{\varphi})^2 + \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} \} = -g \cdot \operatorname{tg} \varphi. \end{cases} \quad (3)$$

Оскільки максимальні відхилення канатів від вертикалі не перевищують за [2] $10 \dots 12^\circ$, то приймаємо: $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$; $\cos \varphi \approx 1,0$; $\varphi \ll 1$; $S \approx G = m_2 g$. Тоді (3) набуває вигляду:



$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = P - k_{\text{мерп.}}(m_1 g + m_2 g) + m_2 g \varphi; \\ \ddot{x}_1 + l \{(-\varphi)(\dot{\varphi})^2 + \ddot{\varphi}\} = -g \varphi. \end{cases} \quad (4)$$

У межах наведених вище наближень можна вважати

$$\sin \varphi \approx \text{tg } \varphi \approx \varphi \approx \frac{x_2 - x_1}{l}. \quad (5)$$

Тоді (2) можна представити у вигляді:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = P - k_{\text{мерп.}}(m_1 + m_2)g + m_2 g \left(\frac{x_2 - x_1}{l}\right); \\ \ddot{x}_2 = -g \left(\frac{x_2 - x_1}{l}\right). \end{cases} \quad (6)$$

Система диференціальних рівнянь (6) може бути зведена до одного рівняння для x_2

$$[1] \quad \frac{l}{g} m_1 x_2^{IV} + (m_1 + m_2) \ddot{x}_2 = P - k_{\text{мерп.}}(m_1 + m_2)g. \quad (7)$$

Якщо ввести позначення різниці зміщень мас $\tilde{m} = x_1 - x_2$, то (6) можна надати

$$\text{вигляду: } \ddot{\tilde{x}} + \omega^2 \tilde{x} = \frac{P - k_{\text{мерп.}}(m_1 + m_2)g}{m_1}. \quad (8)$$

У (8) \tilde{x} – горизонтальне переміщення вантажу відносно точки підвісу, що

$$\text{рухається, а } \omega = \left\{ \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

– частота власних маятникових коливань вантажу відносно крану у період його пуску. Використовуючи (8), можна розглянути рух крану із гнучким підвісом вантажу у період його розгону. Оскільки період маятникових коливань вантажу $\left(\tilde{T} = \frac{2\pi}{\omega}\right)$ більше або одного порядку із часом розгону крану (t_{II}), то при розв'язковій системі (6) можна вважати, що зусилля руху привідного двигуна механізму переміщення постійне ($P = \text{const}$) й дорівнює його середньопусковому значенню. Саме для цього випадку доцільно розглядати рівняння (8).

Розв'язуючи рівняння (8) за нульових початкових умов ($\tilde{x}|_{t=0} = \dot{\tilde{x}}|_{t=0} = 0$), знайдемо:

$$\tilde{x} = A(1 - \cos \omega t), \quad (10)$$

де $A = \frac{[P - k_{\text{мерп.}}(m_1 + m_2)g]l}{[g(m_1 + m_2)]}$ – амплітуда відносних коливань вантажу.

У відповідності до формули (10) горизонтальна складова натягу канатів, що діє на кран, як і у [2], має вигляд:

$$T = -T_a(1 - \cos \omega t), \quad (11)$$

де $T_a = A \frac{m_2 g}{l}$ – амплітудне значення зусилля T .

Значення T змінюється від $T_{\min} = 0$ до $T_{\max} = -2T_a$ й ніколи не стає додатнім. Це означає, що у розглядуваному випадку воно має напрямок дії той самий, що й сила опору рухові візка/крану W .

Таким чином, при розрахунках динамічних навантажень у силових елементах кранів під дією постійно рухливого зусилля вплив вантажу на канатах, що розгойдуються, можна врахувати за допомогою (11), де T_a має вигляд:

$$T_a = \frac{[P - k_{\text{мерт.}}(m_1 + m_2)g]m_2}{(m_1 + m_2)}. \quad (12)$$

Аналогічним чином можна знайти вираз для горизонтального зусилля T за інших законів зміни рухових зусиль приводних двигунів механізму переміщення/пересування кранів.

Відомо [1, 3], що для зменшення коливань вантажу необхідно до мінімуму скоротити відхилення координат візка і вантажу \tilde{x} , їх швидкостей $\dot{\tilde{x}}$, прискорень $\ddot{\tilde{x}}$ і ривків $\ddot{\tilde{x}}$. Для цього із (10) визначимо ці відхилення:

$$\dot{\tilde{x}} = A\omega \sin \omega t; \quad \ddot{\tilde{x}} = A\omega^2 \cos \omega t; \quad \ddot{\tilde{x}} = -A\omega^3 \sin \omega t. \quad (13)$$

Взагалі, для похідної $\tilde{x}(t)$ n -го порядку з (10) маємо:

$$\{\tilde{x}^{(n)}\}^2 = A^2 \omega^{2n} \begin{cases} \sin^2 \omega t, & \text{якщо } n - \text{непарне} \\ \cos^2 \omega t, & \text{якщо } n - \text{парне} \end{cases}. \quad (14)$$

Залежностями (13), (14) можна, як і у [1], оцінити коливальний процес вантажу відносно візка в кожний момент часу t . Зменшити коливання (небажані) в системі можна, наприклад, шляхом зведення до мінімуму максимальних або середньоквадратичних значень відхилень переміщень \tilde{x} , швидкостей $\dot{\tilde{x}}$, прискорень $\ddot{\tilde{x}}$ і ривків $\ddot{\tilde{x}}$ за певний проміжок часу руху кранового візка з вантажем (пуску, гальмування або всього циклу руху). Саме такий підхід й реалізований у [1].

На відміну від [1], у даній роботі розглянутий комплексний критерій, що слугує для визначення оптимальних режимів руху (пуску, гальмування або всього циклу руху), який забезпечує мінімальні відхилення розглянутих вище кінематичних характеристик візка і вантажу (одночасно для всіх їх, а не окремо для кожної, як у [1]).

Для того, щоб реалізувати цей підхід, слід спочатку здійснити перехід до змінних, які не мають розмірностей, тобто

$$t \rightarrow \tau = \omega t, \quad \tilde{x} \rightarrow x^* = \frac{\tilde{x}}{l}. \quad (15)$$

У термінах змінних (τ, x^*) маємо:

$$\dot{\tilde{x}} = \omega l \frac{dx^*}{d\tau} \equiv \omega l x_{\tau}^*; \quad \ddot{\tilde{x}} = \omega^2 l x_{\tau\tau}^*; \quad \ddot{\tilde{x}} = \omega^3 l x_{\tau\tau\tau}^*; \quad \dots \quad \tilde{x}^{(n)} = \omega^n l x_{\tau^n}^*. \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \omega \frac{d}{d\tau}, \quad \frac{d^n}{dt^n} \rightarrow \omega^n \frac{d^n}{d\tau^n}. \quad (17)$$

Оскільки система "візок-вантаж" знаходиться у полі земного тяжіння, то у комплексному критерії "основою" є квадрат відхилення $(\ddot{\tilde{x}})^2$, який має розмірність g^2 , а саме $\frac{M^2}{c^4}$. Саме для цього масштабу слід звести всі складові квадратів відхилень $(\tilde{x})^2$, $(\dot{\tilde{x}})^2$, $(\ddot{\tilde{x}})^2$, $(\ddot{\tilde{x}})^2$ й т.д. У змінних (t, \tilde{x}) коливальний критерій, який мінімізує середню за час руху системи t , суму квадратів відхилень вказаних кінематичних характеристик, має вид:

$$I = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \left\{ \omega^4 (\tilde{x})^2 + \omega^2 (\dot{\tilde{x}})^2 + (\ddot{\tilde{x}})^2 + \frac{1}{\omega^2} (\ddot{\tilde{x}})^2 \right\} dt \rightarrow \min. \quad (18)$$

де t_1 – тривалість циклу руху кранового візка з вантажем, а "вага" кожної складової цього комплексного критерію (у розмірних змінних) визначається певним ступенем власної частоти ω маятникових коливань системи.

Переходячи до змінних (τ, x^*) , замість (18) маємо:



$$I = \frac{1}{\omega t_1} \int_0^{\omega t_1} (\omega^4 l^2) \left\{ (x^*)^2 + (\dot{x}^*)^2 + (\ddot{x}^*)^2 + (\ddot{\ddot{x}}^*)^2 \right\} d\tau \rightarrow \min. \quad (19)$$

Враховуючи (10), (15), маємо:

$$I = \frac{\omega^3 A^2}{t_1} \int_0^{\omega t_1} \left\{ (1 - \cos \tau)^2 + \sin^2 \tau + \cos^2 \tau + \sin^2 \tau \right\} d\tau \rightarrow \min, \quad (20)$$

З (20) легко одержати умову

$$\frac{1}{t_1} \int_0^{\omega t_1} \{3 - 2 \cos \tau\} d\tau \rightarrow \min, \quad (21)$$

або
$$\frac{3\omega t_1 - 2 \sin \omega t_1}{t_1} \rightarrow \min, \quad \frac{\sin \omega t_1}{t_1} \rightarrow \max. \quad (22)$$

Задовольнити останню з умов (22) можна тоді, коли

$$tg \omega t_1 = \omega t_1, \quad \mu \equiv \omega t_1. \quad (23)$$

Саме корені цього трансцендентного рівняння визначають параметр t_1 за відомого значення ω системи "візок-вантаж". Як вказано у [11], рівняння типу (23) має нескінченну кількість коренів $\mu_k = (\omega t_1)_k$, $k \in \tilde{N}$, де \tilde{N} – множина натуральних чисел, що знаходяться у точках перетину графіків функцій $y = tg \mu$ й $y = \mu$. Зі збільшенням k корені μ_k нескінченно зростають за абсолютною величиною, причому різниця $\mu_k - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ прямує до нуля. Звідси випливає, що за достатньо великих значень k

можна вважати
$$\mu_k \cong \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (24)$$

а, отже, маємо:

$$(t_1)_k \cong \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{\omega}. \quad (25)$$

Що стосується перших коренів (23), то їх можна визначити наступним способом [11]. Нехай

$$\mu_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - \xi_k. \quad (26)$$

Підставляючи у рівняння (23) співвідношення (26), отримаємо:

$$ctg \xi_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - \xi_k. \quad (27)$$

Візьмемо тепер у розкладі у ряд

$$ctg \xi_k = \frac{1}{\xi_k} - \frac{1}{3} \xi_k - \frac{1}{45} \xi_k^2 + \dots \quad (28)$$

два перших члени; тоді рівняння (27) матиме вигляд:

$$\xi_k = \frac{2}{(2k+1)\pi} + \frac{4\xi_k^2}{3(2k+1)\pi}, \quad k \in \tilde{N}. \quad (29)$$

Застосовуючи до останнього рівняння метод ітерацій, знаходимо наближене значення ξ_k , а відповідно, за формулою (26), наближене значення коренів μ_k ($k = 1, 2, \dots$).

Так, наприклад, з точністю до четвертого знаку маємо [11]:

$$\mu_1 = 4,4935; \quad \mu_2 = 7,7250; \quad \mu_3 = 10,9044. \quad (30)$$

Тому загальна формула, що визначає проміжки часу t_1 , за яких реалізується критерій (22), має вигляд:

$$(t_1)_k = \begin{cases} \frac{4,4935}{\omega}, k=1; \frac{7,7250}{\omega}, k=2; \frac{10,9044}{\omega}, k=3; \\ \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \\ \frac{\quad}{\omega}, k \geq 4; \quad k \in \tilde{N}. \end{cases} \quad (31)$$

Перший корінь ($k=1$) у (31) дає значення $t_1 < \tilde{T}$, а всі інші, починаючи з другого ($k \geq 2$) мають $t_1 > \tilde{T}$. Слід зазначити, що корінь ($k=1$) у (31) визначає глобальний, а всі інші ($k \geq 2$) – локальні екстремуми критерію (22).

У тих випадках, коли величина t_1 задана наперед (з міркувань існуючих технологій, дозволених режимів функціонування, різноманітних обмежень і т. ін.), слід накласти більш жорстку умову на функцію, що стоїть під інтегралом у (20):

$$3 - 2 \cos \tau \rightarrow \min, \text{ при } \tau > 0. \quad (32)$$

Вона реалізується за наступних обставин (умов):

$$\cos \tau = 1, \tau = 2n\pi, n \in \tilde{N}. \quad (33)$$

Цікаво зазначити, що ця умова (33) зберігається й у тому випадку, коли комплексний критерій типу (20) враховує й похідні x^* по τ й більш високого, ніж третій, порядку (скажімо, четвертого, п'ятого, як у [1]).

Отже, мінімум мінімум (для будь-якої суми квадратів відхилень x^* й їх похідних по τ до p -го порядку включно) за заданого значення t_1 реалізується тоді, коли

$$t_1 = n\tilde{T}, n \in \tilde{N}. \quad (34)$$

Саме за умови (34), де \tilde{T} – період власних маятникових коливань системи "візок–вантаж", можливою є мінімізація відхилень кінематичних характеристик руху, що описують його гладкість (довільного ступеню).

$$m_1 = 415520 \text{ кг}$$

Для мостового крана [1] вантажопідйомністю $m_2 = 10000 \text{ кг}$, при масі моста $m_1 = 20000 \text{ кг}$ й довжині підвіску вантажу $l = 10 \text{ м}$ частота ω (власних маятникових коливань вантажу відносно крану у період його пуску) складає $1,212 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ ($\tilde{T} = 5,182 \text{ с}$).

У таблиці 1 наведені значення t_1 за формулою (31) для перших п'яти ($1 \leq k \leq 5$) коренів рівняння (23), а також значення $k\tilde{T}$.

Таблиця 1

k	$t_1, \text{с}$	$k\tilde{T}, \text{с}$
1	3,708	5,182
2	6,374	10,364
3	8,997	15,546
4	11,664	20,728
5	14,256	25,910

Таким чином, розглянута методика визначення оптимальних режимів руху мостових кранів за комплексним критерієм (у межах моделі кранового візка з гнучким підвісом вантажу), що мінімізує суму квадратів відхилень та прискорень більш високих порядків, й приводить до мінімального відхилення відповідних кінематичних характеристик руху системи "візок–вантаж". Визначені тривалості циклу руху t_1 кранового візка з вантажем, за яких може бути реалізований оптимальний (з точки зору мінімізації відхилень й коливань вантажу) режим. На величину t_1 суттєво впливає власна частота маятникових коливань вантажу ω (або, відповідно, період \tilde{T} вказаних коливань).

*Література*

1. Ловейкін В.С. Синтез оптимальних режимів руху кранового візка з гнучким підвісом вантажу // Техніка будівництва. – 2000. – №8. – С.15 – 23.
2. Лобов Н.А. Динамика грузоподъемных кранов. – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с.
3. Ловейкин В.С. Расчеты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин. – Киев: УМК ВО, 1990. – 168 с.
4. Зарецкий А.А., Портной Н.И. Оптимизация управления механизмами грузоподъемных кранов в переходных режимах // Вестник машиностроения. – 1969. – №8. – С.14 – 18.
5. Перельмутер М.М., Поляков Л.Н. Устранение колебаний груза, подвешенного к крановой тележке, воздействием на него электроприводом // Известия вузов. Электромеханика. – 1971. – №7. – С. 769 – 774.
6. Алейнер А.Л., Орлов А.Н. Моделирование системы ограничения раскачивания груза при работе механизма передвижения крановой тележки //Подъемно-транспортные машины. – Тула, 1975. – Вып. 4. –С.17–23.
7. Рунов М.Н. Гашение колебаний груза при торможении крановой тележки ступенчатым тормозным моментом // Известия вузов. Машиностроение. – 1970. – №12. – С.121 – 125.
8. Григоров О.В., Свиргун В.П. Синтез оптимальных по быстродействию законов управления движением грузовой тележки крана мостового типа// Известия вузов. Машиностроение. – 1986. – №11. – С. 98 – 102.
9. Смехов А.А., Ерофеев Н.И. Оптимальное управление подъемно-транспортными механизмами. – М.: Машиностроение, 1975. – 239 с.
10. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. – М.: Наука, 1972. – 418 с.
11. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.

УДК 621.87

*Л.М.Бондаренко, канд. техн. наук, доцент Придніпровської державної академії будівництва і архітектури,
В.С.Ловейкін, д-р техн. наук, професор КНУБА*

РОЗПОДІЛ МІЖ ОПОРОМ РУХУ КОЧЕННЯ ТА КОВЗАННЯ В КОНІЧНИХ КОЛЕСАХ ТА ПРИ РУСІ ЦИЛІНДРИЧНОГО ПО КОЛУ

Розподіл опору руху в конічних колесах на складові кочення і ковзання виявляється досить складною задачею як при теоретичних, так і експериментальних дослідженнях. При перших це пов'язано з тим, що відсутні більш – менш прийнятні теоретичні залежності для визначення складової кочення, а при експериментальних – з труднощами по їх розподілу.

Задача декілька спрощується якщо складний процес тертя конічного колеса, чи при русі циліндричного по колові описати аналітично як кочення циліндричного колеса по прямій поверхні при умові, що загальна величина тертя буде однаковою. Така формула дозволить проводити аналіз опорів і робити попередні висновки відносно заходів по їх зменшенню.

Як відомо [1], кочення конічного колеса по похилій поверхні, або циліндричного по колу супроводжується витратами як на кочення, так і на ковзання внаслідок нерівності швидкостей по лінії контакту.