

УДК 528

к.т.н., доцент Егоров А.И.,  
к.т.н., доцент Исаев А.П., Гандерук В.Л.,  
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

## МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

*По итогам исследования расчетной модели определена функциональная зависимость между величинами, которые характеризуют прочность конструкции, и величинами деформаций, которые определяются в процессе выполнения геодезических работ.*

Основная задача, возникающая в инженерной практике, в настоящее время состоит не в том, чтобы создать подходящую математическую модель, а больше связана с расчетами на основании уже имеющихся теорий. Условия совместности деформаций и равновесия внутренних напряжений в форме дифференциальных уравнений давно уже установлены.

Любые сооружения, в том числе и сооружения башенного типа, могут быть представлены совокупностью элементарных элементов конструкций, таких как балки и стержни, которые определенным образом скреплены между собой. Из этих простых элементов – после установления основных зависимостей для каждого из них – можно составить достаточно сложные конструкции [ 2, 3, 4].

Рассмотрим пример создания математической модели для двух пролетной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой  $q$ . Для установления зависимости между смещением по высоте  $S$  средней опоры 1, которое является искомой величиной при геодезических наблюдениях за осадками сооружений, и изменением опорного момента  $M$ , вызванного этим смещением, можно воспользоваться уравнением трех моментов, которое широко применяется в строительной механике и сопротивлении материалов:

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6EI(\Theta_1 + \Theta_2) \quad (1)$$

где  $E$  – модуль упругости;  $I$  – момент инерции площади соответствующего сечения на опоре 1;  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  – взаимные углы поворота торцевых сечений балки на опоре 1;  $l$  – расстояние между опорами двух пролетной балки.

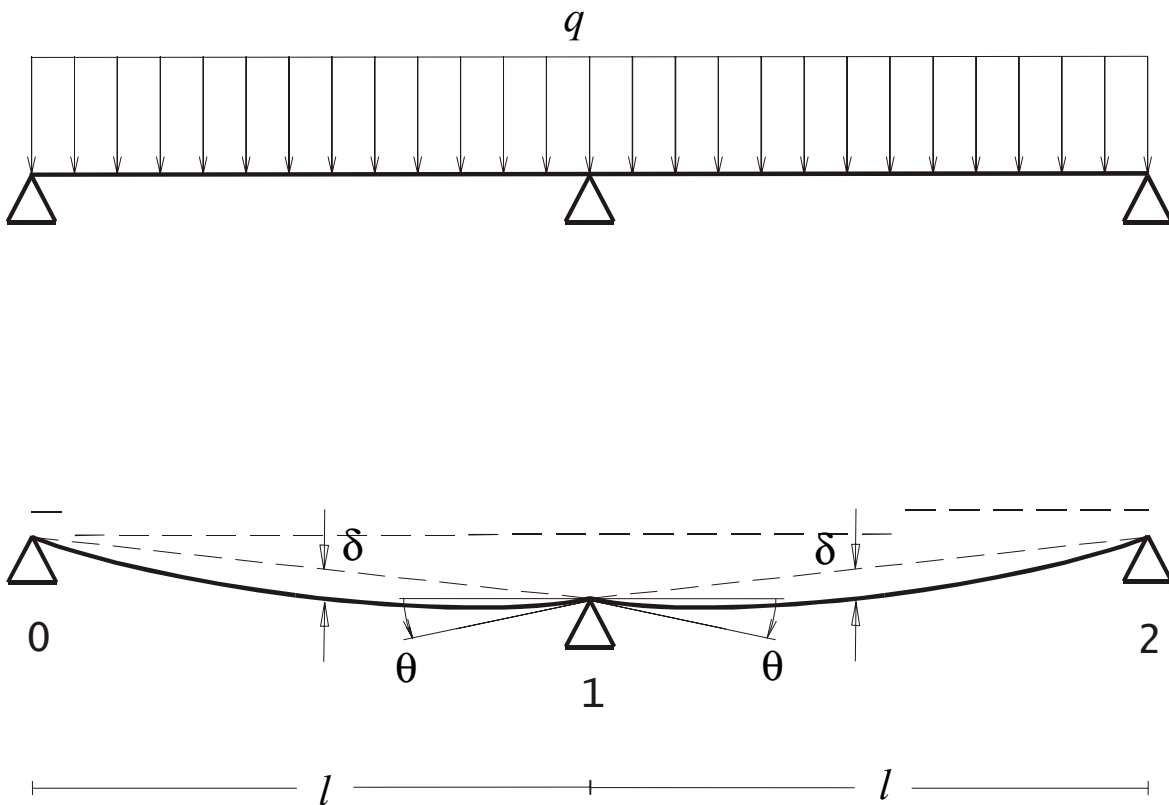


Рис 1. Расчетная схема двухпролетной неразрезной балки:  
 а) – схема загрузки;   
 б) – влияние смещения средней опоры по высоте.

Для балки (рис.1 б)  $M_0=0$ ;  $M_2=ql^2/2$ ;  $l_1=l_2=l$ , углы  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  можно представить как отношение  $S/l$ , причем значение угла принимается положительным, если смещение происходит по часовой стрелке, тогда выражение (1) примет вид:

$$M_1 = -\frac{ql^2}{8} \left( 1 - \frac{24EIS}{ql^4} \right) = -\frac{ql^4}{8} \left( 1 - \frac{15S}{16\delta} \right), \quad (2)$$

где  $S$  – смещение средней опоры по высоте;  $\delta$  – прогиб балки длиной  $l$ , который равен:

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \quad (3)$$

Нетрудно заметить, что величина осадки и величина  $S$  линейно зависимы, тогда продифференцировав выражение (2), после подстановки в него значения прогибов, получим [5]:

$$\delta_S = 0.11 \frac{\Delta M l^2}{EI}. \quad (4)$$

Анализ выражения (4) дает возможность дифференцировано подходить к назначению точности геодезических работ, в зависимости от величины приведенной жесткости балки на изгиб  $EI$  и величины дополнительного опорного момента  $\Delta M$ .

В случае воздействия динамической нагрузки рассмотрим задачу колебания упругой балки на упругом основании под действием сосредоточенной пульсирующей силы частоты  $\omega$ , приложенной в произвольной точке балки  $x = \xi$ .

Для вертикальной компоненты деформации  $S(x,t)$  выполняется дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - 2r^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + S_1^4 \rho + m^* \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{P_0}{EI} l^{i\omega t} \delta(x - \xi) \quad (5)$$

где  $\delta(x - \xi)$  – мера Дирака, сосредоточенная в точке  $x - \xi$  ;  
 $P_0$  – интенсивность сосредоточенной силы;  
 $\xi$  – ее частота.

При выборе функции вертикального перемещения упругого основания, которое зависит от рассматриваемой модели, в виде  $\Psi(y) = H - y/H$  получим:

$$S_1^4 = \frac{E_0 \delta}{HEI(1 - \nu_0^2)}; \quad r^2 = \frac{E_0 \delta H}{12EI(1 + \nu_0)}; \quad m^* = \left( \frac{\gamma \delta}{g} h + \frac{\gamma_0 \delta}{3g} H \right) \frac{1}{EI}, \quad (6)$$

где  $\delta$  – ширина балки;  $EI$  – жесткость балки;  $\gamma_0$  – объемный вес грунта;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $\gamma$  – объемный вес балки;  $H$  – толщина сжимаемого грунта под фундаментом сооружения;  $m^*$  – присоединенная масса.

Подбирая решение уравнения (6) в виде:

$$S(x,t) = l^{i\omega y} S(x)$$

для  $S(x)$  получим дифференциальное уравнение:

$$S^{IV} - 2r^2 S^{II} + S_1^4 S - m^* \omega^2 S = \frac{P_0}{EI} \delta(x - \xi). \quad (7)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (7) имеет вид:

$$\lambda^4 - 2r^2 \lambda^2 + (S_1^4 - m^* \omega^2) = 0. \quad (8)$$

Пусть уравнение (8) имеет комплексный корень  $-\lambda_1 = 2i\beta$ ,  $\alpha > 0$ , тогда оно будет иметь и корень  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , а также комплексно сопряженные корни  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ .

Решая уравнение (7), с учетом убывания  $S(x)$  на бесконечности, получим:

$$S(x) = \begin{cases} [A_1 \cos \beta(x-\xi) + B_1 \sin \beta(x-\xi)] l^{-\alpha(x-\xi)} & \text{при } x \geq \xi \\ [A_2 \cos \beta(x-\xi) + B_2 \sin \beta(x-\xi)] l^{-\alpha(x-\xi)} & \text{при } x \leq \xi \end{cases},$$

где  $A_1, A_2, B_1, B_2$  – постоянные интегрирования, которые находят из условия:

$$\left. \frac{d^k S}{dx^k} \right|_{x=\xi-0} - \left. \frac{d^k S}{dx^k} \right|_{x=\xi+0} = \begin{cases} 0, & \text{если } k=0,1,2 \\ \frac{P}{EI}, & \text{если } k=3 \end{cases}.$$

Таким образом, получаем систему четырех алгебраических уравнений вида:

$$A_1 = A_2, \quad B_1 = B_2 + A_1, \quad -B_1 = B_2, \quad A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = \frac{P_0}{EI\alpha^3}.$$

Таким образом

$$S(x) = \frac{P_0 \times l^{-\alpha|x-\xi|}}{\gamma EI \alpha^3} [\cos \beta(x-\xi) + \sin \beta|x-\xi|] \quad (9)$$

Для момента  $M(x, t) = M(x) \times l^{i\omega t}$  получаем:

$$M(x) = \frac{P_0 \times l^{-\alpha|x-\xi|}}{4\alpha} [\cos(x-\xi) - \sin \beta|x-\xi|]. \quad (10)$$

Из формулы (9) приближенно будем иметь:

$$S = a + \frac{P_0 \sqrt{2}}{8EI\alpha^3}, \quad (11)$$

где  $S$  – максимальная деформация.

Запишем нестрогое равенство

$$\Delta M_{\max} = EIb^2 a + \frac{P_0 \sqrt{2}}{4\alpha} \quad (12)$$

Определяя  $a$  из уравнения (11) и подставляя в уравнение (12) находим:

$$\Delta M_{\max} = EIb^2 \left( m_S - \frac{P_0 \sqrt{2}}{8EI\alpha^3} \right) + \frac{P_0 \sqrt{2}}{4\alpha};$$

$$b = \sqrt{\frac{\Delta M_{\max} - \frac{P_0 \sqrt{2}}{4\alpha}}{EI \left( m_S - \frac{P_0 \sqrt{2}}{8EI\alpha^3} \right)}}.$$

Расстояние между осадочными марками находят по формуле:

$$l = \pi \sqrt{\frac{EI \left( m_S - \frac{P_0 \sqrt{2}}{8EI\alpha^3} \right)}{\Delta M_{\max} - \frac{P_0 \sqrt{2}}{4\alpha}}}. \quad (13)$$

Неизвестное значение  $\alpha$  находят из характеристического уравнения (8) при условии  $r^4 \langle S_1^4 - m^* \omega^2 \rangle$  и  $P=0$ :

$$\alpha = \sqrt{\frac{r^2 + \sqrt{S_1^4 - m^* \omega^2}}{2}}. \quad (14)$$

Подставляя в (14) значения  $r^2$ ,  $S_1^4$ ,  $m^*$ ,  $\omega^2$ , полученные из формул (6) имеем:

$$S_1^4 - m^* \omega^2 = \frac{\delta}{EI} \left[ \frac{E_0}{H(1-\nu_0^2)} - \frac{\gamma h \omega^2}{g} - \frac{\gamma H \omega^2}{3g} \right], \quad (15)$$

тогда при задаваемом значении  $l$

$$\delta_S = \frac{P_0 \sqrt{2}}{8EI\alpha^3} + \frac{l^2 \left( \Delta M_{\max} - \frac{P_0 \sqrt{2}}{4\alpha} \right)}{\pi^2 EI} \quad (16)$$

Анализ формул (4) и (16) дает возможность дифференцировано подходить к назначению точности геодезических работ в зависимости от величины приведенной жесткости  $EI$  и величины дополнительного момента  $\Delta M$  в случае воздействия статической и динамической нагрузок [5].

Математическая модель изгиба непризматической балки, лежащей на упругом основании переменной жесткости может быть в общем виде описано дифференциальным уравнением типа:

$$\left[ EI(x) \cdot \omega''(x) \right]'' - T \omega''(x) + k(x) \omega(x) = q(x), \quad (17)$$

где  $\omega(x)$  – поперечный прогиб балки.

В общем случае точно проинтегрировать это уравнение невозможно, однако существует ряд численных методов, позволяющих получить приближенное решение с наперед заданной точностью.

В качестве расчетной модели сооружения башенного типа при исследовании горизонтальных смещений оси сооружений весьма простой и в то же время достаточно представительной моделью является вертикальный консольный стержень переменного сечения защемленный нижним концом. Математическая модель изгиба такого стержня описывается известным уравнением:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \right] = q, \quad (18)$$

где  $EI$  – приведенная жесткость поперечного сечения на изгиб;  $\omega(x)$  – горизонтальные смещения оси стержня;  $q$  – поперечная статическая нагрузка.

Деформационная кривая для консоли, загруженной равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , может быть получена из дифференциального уравнения упругой линии.

Деформацию конструкции при различных способах закрепления определяют непосредственным интегрированием основного дифференциального уравнения (18), учитывая граничные условия, характеризующие способы закрепления.

Так, консоль характеризуется следующими граничными условиями:

– на закрепленном конце, где прогиб и угол наклона касательной к упругой линии равны нулю

$$\omega = \frac{d\omega}{dx}, \quad \text{при } x=0; \quad (19)$$

– на свободном конце, где изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю,

$$\frac{d^2 \omega}{dx^2} = \frac{d^3 \omega}{dx^3} = 0, \quad \text{при } x=l, \quad (20)$$

где  $l$  – длина консоли.

Общее решение уравнения (18) при граничных условиях (19), (20) имеет вид:

$$\omega(x) = \frac{q}{24EI} x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4, \quad (21)$$

где  $C_i$  – произвольные постоянные.

Из условия заземления нижнего конца  $x = 0$  получаем, что  $C_3 = C_4 = 0$ .

Значения остальных произвольных постоянных находят при условиях  $x = l$  дифференцированием уравнения (21). После несложных вычислений получают уравнение деформационной кривой консоли под действием равномерно распределенной силы  $q$ :

$$\omega(x) = \frac{q}{24 EI} (x^4 - 4x^3l + 6x^2l^2). \quad (22)$$

Динамическая задача описывается дифференциальным уравнением в частных производных, решение которого в случае переменной жесткости весьма затруднительно. Поэтому для решения динамической задачи, используется приближенный подход, для чего вводится дискретно-континуальная модель. Это консольный стержень переменной жесткости  $EI(x)$ , в некоторых точках по длине которого сосредоточены массы  $M_i (i=1, 2, 3, 4 \dots n)$ , количество которых  $n$  определяет число динамических степеней свободы расчетной модели. К массам приложены возмущающие силы  $P_i(t)$ , отражающие динамический характер нагрузки, например ветровой. Величины масс подсчитываются как суммарные массы конструкций башенного сооружения в пределах определенного участка по высоте. Математическая модель, соответствующая описанной дискретно-континуальной физической модели, в которой жесткостные свойства учитываются континуально, а инерционные – дискретно, представляют собой систему  $n$  уравнений движения:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} m_j y_j + y_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} P_j(t) \quad (i=1, 2, 3 \dots n), \quad (23)$$

здесь  $\delta_{ij}$  – горизонтальное перемещение в точке приложения массы  $M_i$  от действия горизонтальной сосредоточенной силы  $P=1$ , приложенной в точке приложения массы  $M_j$ , которая может быть найдена решением уравнения (18) при соответствующей нагрузке с помощью методов Годунова [1].

Метод дискретной ортогонализации Годунова является наиболее эффективным для решения последовательных краевых задач (18), (19), (20) при различных  $h$ . Основным его достоинством для решения данных задач является тот факт, что вся информация, получаемая при решении задачи при данном  $h$  в прямом ходе алгоритма используются для решения задачи на отрезке  $h + \Delta h$ . Это позволяет получить результаты для последовательности задач  $h_1, h_2, h_3 \dots H$  с трудоемкостью, незначительно превышающей трудоемкость решения одной задачи на отрезке длиной  $H$  [6].

Решение уравнения движения (23) с помощью разложения по формам собственных колебаний дает возможность получить максимальные динамические перемещения в точках сосредоточения масс.

Попутно находятся частоты и формы собственных колебаний расчетной модели.

Анализ формул (4), (16) показывает, что для одномерных расчетных моделей основными характеристиками, которые в дальнейшем используются в качестве базовых для оценки погрешностей геодезических работ, являются изгибающий момент и поперечные прогибы.

### Литература

1. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – Т. 16. – Вып. 3. – С. 171–174.
2. Математическое моделирование / Под ред. Дж. Эндрюс, Р. Мак-Лоун. – М.: Мир, 1979. – 279 с.
3. Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.
4. Розин Л.А. Стержневые системы как системы конечных элементов. – Л.: ЛГУ, 1976. – 232 с.
5. Староверов В.С., Егоров А.И. О назначении точности наблюдений за деформациями инженерных сооружений // Инженерная геодезия. – 1988. – Вып. 31. – С. 92-94.
6. Чибиряков В.К., Староверов В.С., Егоров А.И. К оптимизации геодезических измерений за сооружениями башенного типа // Инженерная геодезия. – 1999. – Вып. 41. – С. 184–186.

### Анотація

За результатами дослідження розрахункової моделі визначена функціональна залежність між величинами, які характеризують міцність конструкції, і величинами деформацій, які визначаються в процесі виконання геодезичних робіт.

### Annotation

The functional dependence between the values describing a mechanical properties, and values of deformations which are defined during performance of geodetic works is determined the calculated model by results of research.