УДК 515.2

Ковальов Сергій Миколайович
Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Ботвіновська Світлана Іванівна
Кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Мостовенко Олександр Володимирович
Кандидат технічних наук, доцент кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

ВЛАСТИВОСТІ ДЕЯКИХ ПАРАБОЛОЇДІВ *N*-ГО ПОРЯДКУ

Анотація. *Робота присвячена пошуку аналітично заданих поверхонь, дискретні каркаси яких утворюють зрівноважені сітки. Розглянуто геометричні і статичні властивості симетричних параболоїдів порядку* $2 \le n \le 4$*, з перерізами, що у площині Z=0 розпадаються на* n *прямих ліній.*

Ключові слова: дискретний каркас; статична рівновага системи; зовнішнє навантаження; параболічні поверхні; формоутворення поверхні; статико-геометричний метод

Постановка проблеми

З точки зору архітектурного проектування просторових покриттів різноманітних споруд викликають інтерес зрівноважені сітки, які є дискретними аналогами криволінійних поверхонь [3]. Здебільшого такі поверхні описуються лише диференціальними рівняннями, за якими не можливо відновити аналітичний опис поверхні. Це у свою чергу не дозволяє проводити всебічний геометричний аналіз такої поверхні. Звідси виникає проблема пошуку аналітично заданих поверхонь, дискретний каркас яких утворюють зрівноважені сітки.

Мета статті

Метою статті є виявлення алгебраїчних поверхонь параболічного типу, дискретні аналоги яких є зрівноваженими сітками і які за геометричними властивостями можуть бути використаними для ескізного проектування криволінійних покриттів в архітектурі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У роботі [1] наведено систематизацію алгебраїчних поверхонь, дискретні каркаси яких відповідають вимогам статичної рівноваги системи під дією закономірно розподіленого між вузлами сітки зовнішнього формоутворюючого навантаження, але задача конструювання таких поверхонь за вимогами, пов'язаними з архітектурним проектуванням, не ставилась і не розв'язувалась.

У роботі [2] було запропоновано оригінальний спосіб утворення поверхні n-го порядку, яка проходить через плоский опуклий n-кутник у площині Z=0. Рівняння поверхні отримується як добуток відповідних аплікат похилих площин, що проходить через сторони багатокутника. У роботі [3] розглянуто статико-геометричну модель утворення дискретного каркаса поверхні четвертого порядку, яку може бути утворено вищезазначеним способом.

Виклад основного матеріалу дослідження

За основу утворення поверхонь прийнято спосіб функціонального множення рівнянь площин, що проходять через прямі у площині Z=0 [1]. Оскільки при конструюванні архітектурних покриттів найчастіше використовують симетричні поверхні, вихідні дані будемо задавати симетрично відносно вертикальних координатних площин.

Спочатку покажемо, що результат функціонального множення площин ABE_1; BCE_2; CDE_3…

$$\begin{aligned} &\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}+\frac{z}{c_1}=1 \\ &\frac{x}{a_2}+\frac{y}{b_2}+\frac{z}{c_2}=1 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{x}{a_n}+\frac{y}{b_n}+\frac{z}{c_n}=1 \end{aligned} \qquad (1)$$

не змінюється, якщо відрізки $OE_1=C_1$; $OE_2=C_2$... $OE_n=C_n$ на осі OZ замінити відрізком

$$OE = c = \sqrt[n]{C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_n}\ ,$$

тобто, якщо довільні площини на ABE_1; ABE_2; ABE_3; ….; ABE_n замінити бічними гранями піраміди *ABCD….E*,

$$Z_E = \sqrt[n]{Z_{E1} \cdot Z_{E2} \cdot \ldots \cdot Z_{En}}.$$

Дійсно, рівняння довільної площини (1) можна записати у вигляді:

$$Z = C_1\left(-\frac{x}{a_i} - \frac{y}{b_i} + 1\right). \qquad (2)$$

Тоді при функціональному множенні площин матимемо результат:

$$Z = \prod_{i=1}^{n} C_1\left(-\frac{x}{a_i} - \frac{y}{b_i} + 1\right). \qquad (3)$$

При заміні в (3) $C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot \ldots \cdot C_n = C^n$ результат не змінюється.

На рис. 1 показано заміну чотирьох площин ABE_1; BCE_2; CDE_3…та DAE_4 на бічні грані піраміди *ABCDE*.

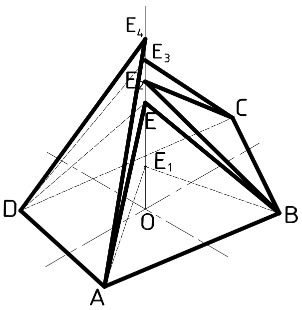

Рисунок 1

На рис. 2 показано, як у результаті функціонального множення площин *AEFD* і *BCFE*:

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{a} + \frac{z}{h} = 1;$$

$$\frac{x}{c} - \frac{y}{a} + \frac{z}{h} = 1,$$

де $h = Z_E$,
отримано поверхню гіперболічного параболоїда:

$$Z = h^2\left[\left(1 - \frac{x}{c}\right)^2 - \frac{y^2}{a^2}\right]. \qquad (4)$$

Лінійчастий каркас гіпара (4) утворює в плані ромбічну сітку з певним рівномірним кроком, а точки поверхні у вузлах сітки є дискретним каркасом зрівноваженої сітки у просторі:

$$Z_{i-1.j} + Z_{i+1.j} + Z_{i.j-1} + Z_{i.j+1} - 4Z_{i.j} = 0. \qquad (5)$$

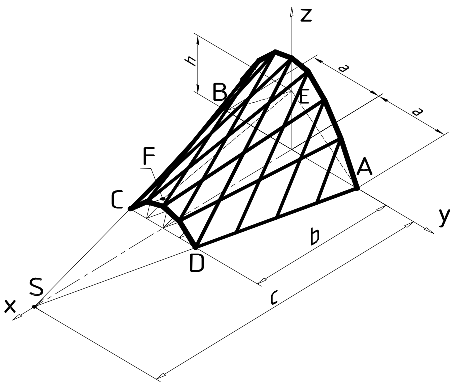

Рисунок 2

На рис. 3 показано параболічну поверхню, яку утворено функціональним множенням трьох бічних граней правильної трикутної піраміди *GHKS*:

$$Z = \frac{h\left(-x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}\right)}{a\sqrt{3}};$$

$$Z = \frac{h(x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3})}{a\sqrt{3}};$$

$$Z = \frac{h(2y + a\sqrt{3})}{a\sqrt{3}}.$$

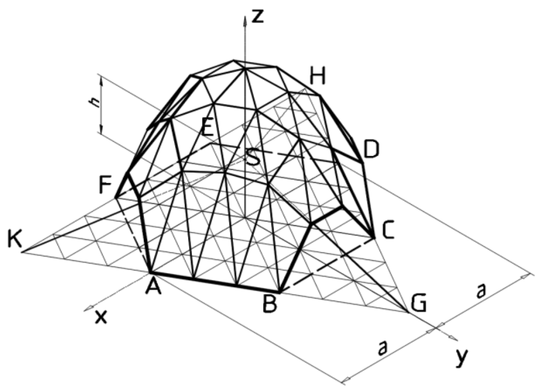

Рисунок 3

При цьому утворюється параболічна поверхня 3-го порядку:

$$Z = \frac{h^3[(a\sqrt{3} - y)^2 - 3x^2](2y\sqrt{3} + 3a)}{9a^3} \qquad (6)$$

Нанесемо на поверхню дискретний каркас точок, що відповідає правильній трикутній сітці у плані. За рівнянням (6) визначимо аплікати

$$Z_{i.j}; Z_{i-1.j};\ Z_{i+1.j}; Z_{i.j-1}; Z_{i.j+1}; Z_{i-1.j+1};\ Z_{i+1.j-1}$$

сімох вузлів довільної зірки сітки, вважаючи

$x_{i-1,j} = x_{i,j} - t$; $x_{i+1,j} = x_{i,j} + t$; $x_{i,j-1} = x_{i,j} - t/2$;

$x_{i,j+1} = x_{i,j} + t/2$; $x_{i+1,j-1} = x_{i,j} + t/2$;

$y_{i-1,j} = y_{i,j}$; $y_{i+1,j} = y_{i,j}$; $y_{i,j-1} = y_{i,j} - \frac{t\sqrt{3}}{2}$;

$$y_{i,\,j+1} = y_{i,j} + \frac{t\sqrt{3}}{2}; \quad y_{i+1,\,j-1} = y_{i,j} - \frac{t\sqrt{3}}{2},$$

де t – крок сітки у плані (довжина сторони трикутної клітини).

При підстановці визначених аплікат вузлів зірки до рівняння рівноваги вузла просторової сітки з трикутними клітинами

$$6Z_{i.j} - Z_{i-1.j} - Z_{i+1.j} - Z_{i.j-1} - Z_{i.j+1} - Z_{i-1.j+1} - Z_{i+1.j-1} - kP_{i.j} = 0$$

отримаємо зовнішнє навантаження $kP_{i.j}$ на довільний вузол сітки, що формується за статико-геометричним методом:

$$kP_{i.j} = -\frac{6t^2h^3}{a^2}. \qquad (7)$$

Вираз (7) показує, що величина власної ваги не залежить від місця вузла у сітці, а залежить лише від сталих величин t, h і a, а це означає, що дискретний каркас поверхні (6) на правильній трикутній сітці у плані формується за статико-геометричним методом при рівномірному розподілі зовнішнього навантаження (7) між вузлами сітки.

У роботі [3] наведено приклад утворення зазначеним способом поверхні четвертого порядку і виявлено розподіл зовнішнього навантаження $P_{i.j}$ між вузлами дискретної сітки при утворенні тої самої поверхні статико-геометричним методом.

Висновки

Дискретні каркаси параболічних поверхонь, що утворюються функціональним множенням площин можуть також бути утвореними за статико-геометричним методом як зрівноважені сітки при певному закономірному розподілі зовнішнього навантаження, що сприяє їх використанню в архітектурному проектуванні просторових покриттів будівель та споруд.

Список літератури

1. *Золотова, А.В. Дискретна кускова інтерполяція точок при формуванні поверхонь в архітектурі дис.. …кандидата технічних наук : 05.01.01 / Золотова Алла Василівна. – К. : КНУБА, 2015. – 142.*
2. *Чурюмов, С.И. О существовании алгебраических поверхностей, проходящих через плоский многоугольный контур* [*Текст*] */ С.И. Чурюмов // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.:КНУБА, 1995. – 58. – С. 95 – 96.*
3. *Ковалев, С.Н. Статико-геометрический анализ одной поверхности четвертого порядка* [*Текст*] */ С.Н. Ковалев, В.А. Вязанкин // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2009. – 23. – С. 61 – 65.*

Стаття надійшла до редколегії 24.04.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.О. Плоский, Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ.

Ковалев Сергей Николаевич
Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой начертательной геометрии и инженерной графики
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев
Ботвиновская Светлана Ивановна
Кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры начертательной геометрии и инженерной графики
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев
Мостовенко Александр Владимирович
Кандидат технических наук, доцент кафедры начертательной геометрии и инженерной графики
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев

СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ПАРАБОЛОИДОВ *N*-ГО ПОРЯДКА

Аннотация. *В работе рассматриваются геометрические и статические свойства симметричных параболоидов порядка* $2 \le n \le 4$*, с сечениями, которые в плоскости Z=0 распадаются на n прямых линий. Поверхности, обладающие данными геометрическими свойствами, могу использоваться для эскизного проектирования криволинейных покрытий в архитектуре.*

Ключевые слова: дискретный каркас; статическое равновесие системы; внешняя загрузка; параболические поверхности; формообразование поверхностей; статико-геометрический метод

Kovalev S.
DSc, professor, chief of the Department of Descriptive Geometry and Engineering Graphics
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv
Botvinovska S.
PhD, lecturer oftheDepartment of Descriptive Geometry and Engineering Graphics
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv
Mostovenko O.
PhD, lecturer of the Department of Descriptive Geometry and Engineering Graphics
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

SOME PROPERTIES OF PARABOLOIDS OF N-th ORDER

Abstract. *In modern architecture it was found a widespread use of curvilinear surfaces which may be used as coverage of buildings and structures. A variety of forms of architectural objects can be achieved by changing the geometry of discrete models, which describes these surfaces, among these surfaces the paraboloids are describing the internal geometry of the objects fullest possibly. Using of algebraic surfaces of parabolic type, discrete analogues of which are balanced grid, will increase the capacity static-geometric method (SGM). The basic idea of the static-geometric method of forming discrete skeletons surfaces is the discrete mesh of arbitrary shape will be presented as balanced by the action of external forces the nodes and grid rods. In this paper we consider the geometric and static properties of symmetric paraboloids he order of which will be and section of the paraboloid in the horizontal plane (Z=0) split into* ***n*** *lines. Surfaces which have what geometric properties can be used for conceptual design curvilinear surfaces in architecture.*

Keywords: discrete frame surface; static equilibrium system; load outward; shaping surface; parabolic surface; static-geometric method

References

1. *Zolotova, A.V. (2015). Discrete piece wise interpolation of points for the formation of surface sinarchitecture, PhD thesis. Sumy: SumSU [inUkrainian].*
2. *Churymov, S. (1995). About existence of algebraic surfaces passing through a flat polygonal contour. The applied geometry and engineering graphics, 58, 95 – 96.*
3. *Kovalev, S.N. & Vjazankin, V.A. (2009). Static-geometric analysis of a fourth order surface. Geometrical and computer modeling, Kharkiv, Ukraine, 23, 61-65.*

Посилання на публікацію

APA *Botvinovska Svitlana, Kovalev Sergej, & Mostovenko Oleksandr (2015). Some properties paraboloids n-th order. Management of Development of Complex Systems, 22 (1), 134-137.*

ГОСТ *Ковалев, С.Н. Свойства некоторых параболоидов n-го порядка [Текст / С.Н. Ковалев, С.И. Ботвиновская, А.В. Мостовенко // Управління розвитком складних систем. – 2015. – № 22 (1). – С. 134-137.*