

## ТРАЄКТОРІЯ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ УСЕРЕДИНИ ВІБРАЦІЙНОГО U-ПОДІБНОГО КОНТЕЙНЕРА

*Національний університет цивільного захисту України*

*Запропонована Maple-програма визначення траєкторії руху довільної матеріальної точки усередині вібраційного U-подібного контейнера в процесі перемішування багатокomпонентної будівельної суміші.*

**Постановка проблеми.** Процес перемішування полягає в інтенсивному переміщенні ділянок і часток суміші усередині спільного об'єму [1]. У будівельній галузі процес перемішування здійснюється для створення оптимальної поверхні реагуючих речовин; з метою зміни фізичного стану речовини, а також для прискорення хімічних реакцій. Так, при виробництві силікатних виробів суміш готують із піску, вапна й води. При виготовленні бетонних виробів суміш готують із цементу, піску, щебеню і води. В'язкі речовини (цемент) і вода становлять активну частину бетонної суміші. У результаті хімічної реакції між ними, утвориться цементний камінь, що міцно з'єднує наповнювачі (пісок і щебені) бетону. На кінцеву міцність бетону, крім оптимального складу, суттєвий вплив здійснює попередня однорідність суміші, що досягається при перемішуванні [2].

Особливу групу машин для приготування однорідних сумішей становлять вібраційні змішувачі, у яких перемішування здійснюється під впливом коливань. Тому актуальною є тематика, присвячена моделюванню на комп'ютері впливу параметрів віброзмішувача на процес перемішування сипучих матеріалів.

**Аналіз відомих публікацій.** У роботах [3,4] розглянуто вібраційну технологію для перемішування часток багатокomпонентної суміші. При цьому передача силового імпульсу від віброзбудника до зони взаємного контакту часток здійснюється через стінки контейнера, тому для оптимізації ефективності процесу вібраційного впливу на частки необхідно детальне вивчення вплив стінок контейнера на робоче середовище в цілому. При складанні математичної моделі передбачається [3,4], що U-подібний контейнер і завантажена суміш є єдиним твердим тілом, у центрі мас якого зосереджена вся маса системи. Положення центра мас не залежить від обертання дебалансів, пружні елементи представлені зосередженими зв'язками із жорсткостями, прямо пропорційними переміщенням (закон Гука); сила збурення, що діє на систему, є гармонійною з постійною частотою  $\omega$  і прикладена в одній точці. Також передбачається, що коливальна система має три ступені свободи, де у якості узагальнених координат системи обрано  $x$  і  $y$  - координати переміщення центра мас системи уздовж осей  $Ox$  і  $Oy$ , а також  $\varphi$  - кут повороту контейнера відносно центра мас системи. Розрахункова схема моделі руху вібраційного U-подібного контейнера показана на рис. 1 [3, 4].

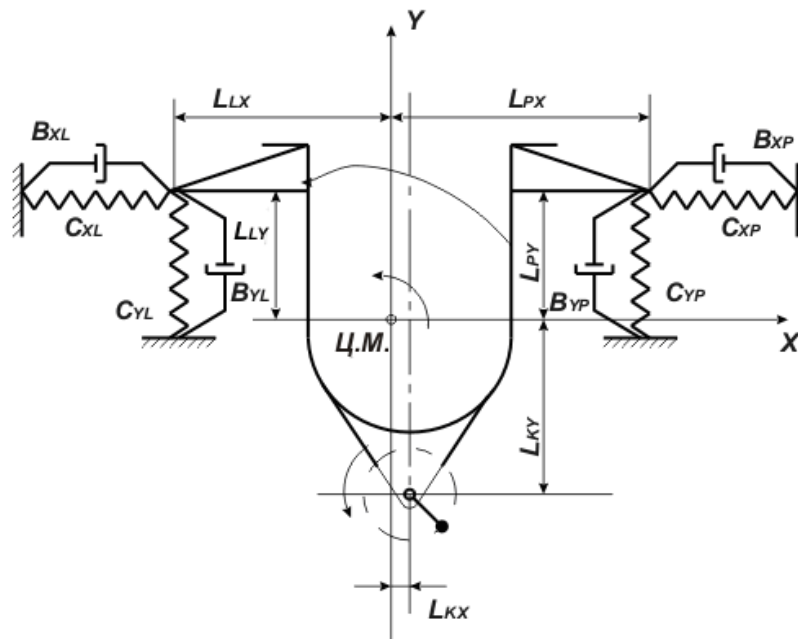


Рис. 1. Розрахункова схема для складання математичної моделі руху U-подібного вібраційного контейнера

На рис. 1 прийнято такі позначення:  $C_{XL}, C_{YL}, C_{XP}, C_{YP}$  - жорсткість лівої й правої підвіски системи відносно осей  $x$  і  $y$ ;  $B_{XL}, B_{YL}, B_{XP}, B_{YP}$  - коефіцієнт дисипації відносно осей  $x$  і  $y$  лівої й правої підвіски;  $L_{LX}, L_{PX}, L_{LY}, L_{PY}$  - відстань від центра мас системи до точок закріплення лівої й правої підвісок по осі  $x$  і  $y$ ;  $L_{KY}, L_{KY}$  - відстань від осі дебаланса до центра мас системи по осях  $x$  і  $y$ ;  $M$  - маса контейнера й завантаження;  $m_k$  - маса дебалансів;  $J$  - момент інерції маси системи (сукупний контейнера й дебаланса) відносно центра мас;  $r$  - ексцентриситет маси дебаланса відносно його осі обертання.

Завдання полягає у знаходженні траєкторії руху довільної «матеріальної» точки в порожнині вібраційного контейнера. У роботах [3, 4] це завдання вирішувалося в середовищі пакета Maple шляхом розв'язання системи рівнянь Лагранжа другого роду із залученням методу Рунге-Кутта. Однак, для прискорення обчислень - наприклад, з метою створення кадрів анімації процесу перемішування - доцільно використовувати «ще не занотовані» можливості штатних операторів системи Maple.

**Постановка завдання.** Розробити Maple-програму для визначення траєкторії руху довільних «матеріальних» точок усередині вібраційного контейнера в процесі перемішування багатокомпонентної будівельної суміші.

**Основна частина.** У практиці обчислень для опису коливальних процесів звичайно використовується [3] рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = F_q, \quad (1)$$

де  $q$  - узагальнена координата;

Розглянута коливальна система має три степені свободи ( $x, y, \varphi$ ). Кут  $\varphi$  досить малий, внаслідок чого звичайно вважають  $\sin \varphi \approx \varphi, \cos \varphi \approx 1$ .

Для складання моделі коливальної системи необхідно визначити кінетичну  $T$  і потенціальну  $\Pi$  енергію:

$$T = \frac{1}{2} \left( (M + m_k) \dot{x}^2 + (M + m_k) \dot{y}^2 + J \dot{\varphi}^2 \right); \quad (2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[ C_{XL} (x - L_{LY} \varphi)^2 + C_{YL} (y - L_{LX} \varphi)^2 + C_{XP} (x - L_{PY} \varphi)^2 + C_{YP} (y + L_{PX} \varphi)^2 \right]. \quad (3)$$

Дисипативна функція Релея  $\Phi$ , для розглянутої моделі, має вигляд:

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[ B_{XL} (\dot{x} - L_{LY} \dot{\varphi})^2 + B_{YL} (\dot{y} - L_{LX} \dot{\varphi})^2 + B_{XP} (\dot{x} - L_{PY} \dot{\varphi})^2 + B_{YP} (\dot{y} + L_{PX} \dot{\varphi})^2 \right]. \quad (4)$$

Зовнішня узагальнена сила  $F_q = Q_q - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}$ , де  $Q_q$  – сила збурення [3]:

$$\begin{aligned} Q_x &= m_k r \omega^2 \cos(\omega t); \\ Q_y &= m_k r \omega^2 \sin(\omega t); \\ Q_\varphi &= m_k r \omega^2 (L_{KX} \sin(\omega t) - L_{KY} \cos(\omega t)). \end{aligned} \quad (5)$$

Таким чином, з урахуванням формули  $L = T - \Pi$ , розписавши рівняння (1) для відповідних узагальнених координат, нами одержано систему із трьох звичайних лінійних диференціальних рівнянь, що визначають рух центра мас розглянутої системи (тут і далі використаний синтаксис мови Maple):

$$\begin{aligned} ODE1 &:= (M + mk) \left( \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + Bxl \left( \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) - Lly \left( \frac{d}{dt} f(t) \right) \right) \\ &+ Bxp \left( \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) - Lpy \left( \frac{d}{dt} f(t) \right) \right) + Cxl (x(t) - Lly f(t)) \\ &+ Cxp (x(t) - Lpy f(t)) = \omega^2 r \cos(\omega t) mk \\ ODE2 &:= (M + mk) \left( \frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + Byl \left( \left( \frac{d}{dt} y(t) \right) - Llx \left( \frac{d}{dt} f(t) \right) \right) \\ &+ Byp \left( \left( \frac{d}{dt} y(t) \right) + Lpx \left( \frac{d}{dt} f(t) \right) \right) + Cyl (y(t) - Llx f(t)) \\ &+ Cyp (y(t) + Lpx f(t)) = \omega^2 r \sin(\omega t) mk \\ ODE3 &:= J \left( \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right) + Bxl Lly^2 \left( \frac{d}{dt} f(t) \right) + Bxp Lpy^2 \left( \frac{d}{dt} f(t) \right) + Cxl Lly^2 f(t) \\ &+ Cxp Lpy^2 f(t) + Byl Llx^2 \left( \frac{d}{dt} f(t) \right) + Byp Lpx^2 \left( \frac{d}{dt} f(t) \right) + Cyl Llx^2 f(t) \\ &+ Cyp Lpx^2 f(t) - (Bxl Lly + Bxp Lpy) \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) \\ &- (Byl Llx - Byp Lpx) \left( \frac{d}{dt} y(t) \right) - (Cxl Lly + Cxp Lpy) x(t) \\ &- (Cyl Llx - Cyp Lpx) y(t) = -Lky \omega^2 r \cos(\omega t) mk \end{aligned} \quad (6)$$

На відміну від роботи [3] завдяки аналітичним перетворенням Maple систему диференціальних рівнянь (6) одержано у компактному вигляді.

Для чисельного експерименту з метою порівняння використовуються параметри, аналогічні роботі [3]:  $M = 104$  кг;  $m_k = 4$  кг;  $J = 0,7 \times 10^7$  кг м<sup>2</sup> м; частота  $f = 50$  Гц;  $r = 40$  мм;  $L_{KX} = 0$  мм;  $L_{KY} = 200$  мм;  $L_{LX} = L_{PX} = 195$  мм;  $L_{LY} = L_{PY} = 125$  мм;  $C_{XL} = C_{XP} = 0,108 \times 10^3$  Н/мм;  $C_{YL} = C_{YP} = 0,156 \times 10^3$  Н/мм;  $B_{XL} = B_{XP} = B_{YL} = 100$  Н с/мм.

Розв'язувати систему диференціальних рівнянь (6) будемо чисельно за допомогою програмних засобів пакета Maple. Як початкові оберемо умови:

```

x(0) = 0, x'(0) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0, phi(0) = 0, phi'(0) = 0,
initial := {x(0)=0, D(x)(0)=0, y(0)=0, D(y)(0)=0,
            f(0)=0, D(f)(0)=0};
sol := dsolve({ODE1, ODE2, ODE3} union initial,
             {x(t), y(t), f(t)}, numeric, maxfun=-1,
             output=listprocedure, abserr=0.0001);

```

В результаті одержимо розв'язок у вигляді кодів пакету Maple:

```

sol := [ t = (proc (t) ... end proc ), f(t) = (proc (t) ... end proc ),
        d/dt f(t) = (proc (t) ... end proc ), x(t) = (proc (t) ... end proc ),

```

Для подальших обчислень зазначені коди залучимо до програми за допомогою операторів, які визначатимуть переміщення за обраними узагальненими координатами (це саме можна здійснити і з їх похідними):

```

solx := subs(sol, x(t));
soly := subs(sol, y(t));
self := subs(sol, f(t));

```

Тобто кінцевий розв'язок буде представлений у вигляді процедур пакету Maple  $x = solx(t)$ ;  $y = soly(t)$ ;  $f = self(t)$ ; зазначимо, що цим процедурам у середовищі Maple притаманні всі властивості функцій. Траєкторію будь-якої точки у вертикальній площині об'єму контейнера можна визначити так:

$$\begin{aligned}
 x &= solx(t) + L \cos(self(t) + \alpha); \\
 y &= soly(t) + L \sin(self(t) + \alpha),
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

де  $L$  - відстань до точки від початку координат;  $\alpha$  - кут повороту контейнера навколо центра мас.

При зазначених вище початкових умовах і параметрах, графік коливань «матеріальної» точки (рис. 2) можна побудувати за допомогою операторів:

```

L := 100: alpha := 0.5:
x := solx(t) + L*cos(self(t) + alpha);
y := soly(t) + L*sin(self(t) + alpha);
plot([x(t), y(t), t=40..40.12], numpoints=500);

```

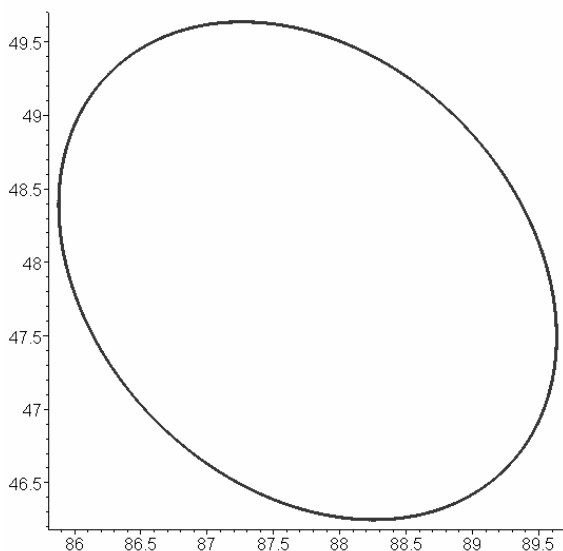


Рис. 2. Траєкторія руху точки усередині контейнера

Отримана траєкторія, як зазначалося у роботах [3,4], практично збігається із траєкторією руху центра мас реального U-подібного контейнера.

Подальші дослідження пов'язані з дослідженням параметрів форми U-подібного контейнера і траєкторії його руху. А також з обранням раціональних співвідношень конструкційних параметрів віброзмішувача.

**Висновок.** Розроблене програмне забезпечення дозволяє визначати траєкторії руху точки усередині U-подібного вібраційного контейнера.

### Література

1. *Бабичев А.П., Бабичев И.А.* Основы вибрационной технологии. – Ростов–на–Дону, 1999. – 622 с.
2. *Сивко В.И.* Основы механики вибрируемой бетонной смеси. – Киев: Вища школа, 1980. – 408 с.
3. *Калмиков М.А.* Повышение эффективности процесса вибрационной обработки крупногабаритных изделий: Дис., канд. тех. наук. – Луганск, 2005. – 223 с.
4. *Калмиков М.О.* Аналіз траєкторії руху контейнеру вібраційного верстата // М.О.Калмиков, І.М.Пшеничний, Л.М.Лубенська, С.М.Ясунік / Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Машинобудування і машинознавство, 2005. - С. 222-232

### Аннотация

Предложена Maple-программа определения траектории движения материальной точки внутри U-образного вибрационного контейнера в процессе перемешивания многокомпонентной строительной смеси.

### Annotation

The Maple-program of definition of a trajectory of movement of any material point in the U-shaped vibration container in the course of hashing of a multicomponent construction mix is offered.