

УДК 539.3

В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук

О.В. Глушакова

## САМОЗБУДЖЕННЯ ХВИЛЬОВИХ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ СКЛАДЕНИХ БУРИЛЬНИХ КОЛОН

Розглянута проблема самозбудження крутильних коливань бурильних колон, складених із ланок з різними жорсткостями крутіння. Проведені дослідження основних закономірностей самозбудження і протікання цих коливань. Виведені рівняння дифракції хвиль крутіння в точках стику ланок колони з різними жорсткостями. Встановлено, що форми автоколивань реалізуються по сценаріям релаксаційних автоколивань.

**1. Вступ.** Автоколивальною являється будь-яка неконсервативна система, в якій в результаті розвитку нестійкостей можливо встановлення незатухаючих хвильових або коливальних рухів, параметри яких визначаються самою системою і не залежать від скінченної зміни початкових умов. Задача про дослідження періодичних автоколивань в системі зводиться до задачі знаходження граничних циклів в фазовому просторі і визначення їх параметрів.

Основною причиною самозбудження торсіонних коливань бурильної колони є біфуркаційне порушення балансу між пружним крутним моментом бурильної колони і нелінійним моментом фрикційної взаємодії долота зі стінкою свердловини [2,3,6-8].

Автоколивання в механічних системах, обумовлені тертям, докладно проаналізовані в ґрунтовних і оригінальних роботах А.А. Андронова, С.В. Білокобильського, Н.В. Бутенина, Г.С. Горелика, Дж.П. Ден-Гартога, Ю.С. Колесова, В.О. Кононенка, І.В. Крагельский, Л.Г. Лобаса, С.Ф. Міщенко, А.А. Харкевича та в інших [1,4,5,9,10].

Мета даного дослідження полягає у встановленні найбільш загальних закономірностей настання автоколивань долота і у визначенні факторів, які найбільше впливають на генерування цих коливань.

**2. Постановка задачі.** Розглянемо складену бурильну колону (Рис. 1). В ній хвилі крутіння зазнають додаткових актів заломлення – відображення в точці з'єднання сегментів бурильної колони (БК) різної жорсткості. Тоді виникають акти вторинного, третинного і т.д. відображень – заломлень вже відображених і заломлених хвиль і в точці розриву крутильної жорсткості БК і на її верхньому кінці (в інтерфейсних

точках). В цьому випадку необхідно безпосередньо відслідковувати рух хвиль  $f(z,t)$  і  $g(z,t)$ .

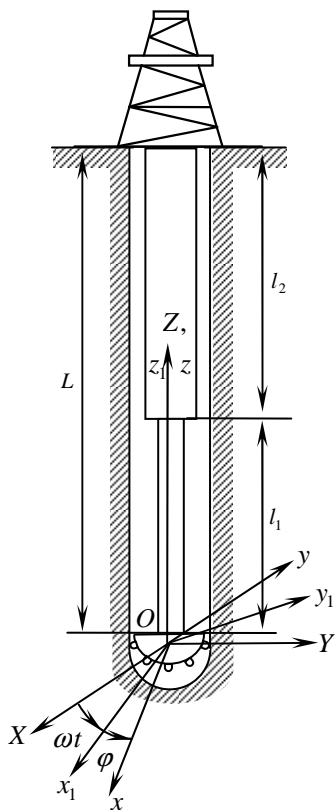


Рис. 1. Схема складеної бурильної колони

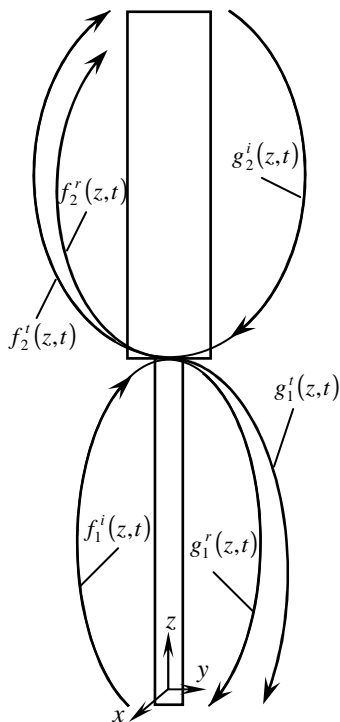


Рис. 2. Схема розповсюдження хвиль кругіння в неоднорідній складеній бурильній колоні

Для цього звернемося до схеми розповсюдження хвиль  $f(z,t)$  і  $g(z,t)$  в двосекційній бурильній колоні (рис. 2). Будемо вважати, що нижня ділянка є першою, верхня ділянка - другою. Тоді хвиля  $f(z,t)$ , яка підіймається вгору, буде зароджуватись при  $z=0$ . Ця хвиля буде розповсюджуватись не змінюючи свого профілю вгору до інтерфейсної точки, і тому, досягнувши її, вона буде грати роль падаючої хвилі. Позначимо її  $f_1^i(z,t)$ . При дифракції цієї хвилі в точці розділення  $z=l_1$

першої і другої ділянок вона буде трансформуватись у відображену і заломлену хвилю. Позначимо їх  $g_1^r(z, t)$  і  $f_2^t(z, t)$  (рис. 2). Відображена  $g_1^r(z, t)$  – хвиля буде спускатись вниз зі швидкістю  $\beta$ , в той час як заломлена  $f_2^t(z, t)$  – хвиля буде розповсюджуватись вгору з тією ж швидкістю.

В верхній точці  $z = L$  БК формується  $g_2^i(z, t)$  – хвиля, що розповсюджується вниз зі швидкістю  $\beta$  вздовж другої ділянки і яка грає роль падаючої хвилі для інтерфейсної точки.

При досягненні цієї точки  $g_2^i(z, t)$  – хвиля розпадається на заломлену  $g_1^t(z, t)$  і відображену  $f_2^r(z, t)$  хвилі. При цьому  $g_1^t(z, t)$  накладається на  $g_1^r(z, t)$  і вони разом впливають на долото, а  $f_2^r(z, t)$  накладається на  $f_2^t(z, t)$ , і вони, піднімаючись вгору, беруть участь потім у відображенні від верхньої точки, перетворюючись в  $g_2^i(z, t)$  – хвилю. Описана схема розповсюдження заломлених і відображених  $f(z, t)$ - і  $g(z, t)$ -хвиль використовується при постановці задачі про самозбудження крутильних коливань бурильної колони і долота.

Пружні крутильні рухи БК описуються хвильовим рівнянням [5]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

де  $\beta$  – швидкість поширення поперечної пружної хвилі.

Воно має розв'язок у вигляді функцій, які залежать від двох фазових змінних  $z - \beta t$ ,  $z + \beta t$ . Представимо його в формі Д'Аламбера

$$\Phi(z, t) = f(z - \beta t) + g(z + \beta t), \quad (2)$$

де  $f(z - \beta t)$ ,  $g(z + \beta t)$  - довільні неперервні, не обов'язково диференційовані функції. Перша з них визначає хвилю, яка розповсюджується зі швидкістю  $\beta$  в додатному напрямку осі  $Oz$ , друга - в протилежному напрямку. Завдяки тому, що ці хвилі є недиспергуючими, вони переміщуються, не змінюючи свій профіль, що суттєво спрощує розв'язання задачі.

Гранична умова на нижньому кінці колони формується за допомогою рівняння балансу моментів сил інерції  $M^{in}$ , сил тертя  $M^{тер}$  і сил пружності  $M^{np}$

$$M^{in} + M^{тер} + M^{np} = 0, \quad (3)$$

що впливає з принципу Даламбера, записаного для долота, умовно відокремленого від труби БК.

Тут  $M^{in}$  - момент сил інерції долота, що записується у вихідному вигляді

$$M^{in} = -J \cdot \ddot{\phi} = -J \frac{\partial^2}{\partial t^2} [f(-\beta t) + g(\beta t)], \quad (4)$$

$M^{mep}$  - момент сил тертя, який підраховується за допомогою формул

$$M_{\epsilon'яз}^{mep} = -m \cdot \frac{a_1 \{ k \cdot [\omega + \dot{f}(-\beta t) + \dot{g}(\beta t)] \} + \dots + a_9 \{ k \cdot [\omega + \dot{f}(-\beta t) + \dot{g}(\beta t)] \}^9}{1 + a_2 \{ k \cdot [\omega + \dot{f}(-\beta t) + \dot{g}(\beta t)] \}^2} \quad (5)$$

або

$$M_{Кыл}^{mep} = -M_{lim}^{mep} - e \sqrt{|M_{\epsilon'яз}^{mep}|}. \quad (6)$$

Для виведення функції  $M^{np}$ , як і вище, використовуємо залежність

$$M^{np} = GI_z \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (7)$$

Вона відрізняється від рівностей (4), (5) тим, що містить частинну похідну від функції  $\phi$  по  $z$ . Щоб перейти від цієї похідної до похідної по  $t$ , випишемо наступні залежності

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} &= \frac{\partial f(z - \beta t)}{\partial z} + \frac{\partial g(z + \beta t)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w}, \\ \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial f(z - \beta t)}{\partial t} + \frac{\partial g(z + \beta t)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = -\beta \frac{\partial f}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial w}. \end{aligned} \quad (8)$$

Звідси випливає

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (9)$$

З урахуванням (9) запишемо

$$M^{np} = -GI_z \left( \frac{1}{\beta} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial g}{\partial t} \right). \quad (10)$$

Змінні  $f(-\beta t)$  і  $g(\beta t)$ , які використовуються у співвідношеннях (4), (5), (10), визначаються так

$$\begin{aligned} f(-\beta t) &= f_1^i(0, t), \\ g(\beta t) &= g_1^r(0, t) + g_1^i(0, t). \end{aligned} \quad (11)$$

Підставимо отримані вирази (5), (10) в рівність (3). З урахуванням (11) отримаємо в остаточній формі нелінійне звичайне диференціальне рівняння крутильного руху долота

$$J \left[ \ddot{f}_1^i(0,t) + \ddot{g}_1^r(0,t) + \ddot{g}_1^t(0,t) \right] - M^{mep} + \frac{GI_z}{\beta} \left[ \dot{f}_1^i(0,t) - \dot{g}_1^r(0,t) - \dot{g}_1^t(0,t) \right]. \quad (12)$$

З його застосуванням виконуються дослідження самозбудження коливань складених бурильних колон. В ньому функції  $g_1^r(t)$ ,  $g_1^t(t)$  хвиль, що приходять, вважаються відомими, а функція вихідної хвилі  $f_1^i(t)$  — шуканою. Вона знаходиться в результаті чисельного інтегрування даного рівняння.

**3. Дифракція хвилі крутіння в точці з'єднання ланок бурильної колони.** Нехай механічні характеристики колони на її ділянках складають  $\beta_1$ ,  $\rho_1$ ,  $I_1$  та  $\beta_2$ ,  $\rho_2$ ,  $I_2$ , відповідно. Тоді елементи хвилі  $f(z - \beta t)$ , розповсюджуючись від точки  $z = 0$  і досягаючи точки  $z = l_1$ , будуть в ній піддаватись впливу актів ударного заломлення-відображення. В результаті дифракції хвиль  $\phi_1^i(z - \beta_1 t)$  и  $\phi_2^i(z + \beta_2 t)$  суперпозиція прониклої  $\phi_2^t(z - \beta_2 t)$  і відображеної  $\phi_2^r(z - \beta_2 t)$  хвиль складає хвилю  $f_2(z - \beta_2 t)$  на другій ділянці, а сума  $\phi_1^r(z + \beta_1 t) + \phi_1^t(z + \beta_1 t)$  — хвилю  $g_1(z + \beta_1 t)$  на першій ділянці. З урахуванням цього отримаємо початкову умову в точці  $z = l_1$  для хвилі  $f_2(z - \beta_2 t)$  в області  $l_1 \leq z \leq L$

$$\begin{aligned} f_2(l_1 - \beta_2 t) &= \frac{2\beta_1 \rho_1 I_1}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} f_1^i(l_1 - \beta_1 t) - \frac{\beta_1 \rho_1 I_1 - \beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} g_2^i(l_1 + \beta_1 t), \\ \dot{f}_2(l_1 - \beta_2 t) &= \frac{2\beta_1 \rho_1 I_1}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \dot{f}_1^i(l_1 - \beta_1 t) - \frac{\beta_1 \rho_1 I_1 - \beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \dot{g}_2^i(l_1 + \beta_1 t), \end{aligned} \quad (13)$$

і початкові умови в цій точці для хвилі  $g_1(z + \beta_1 t)$  в області  $0 \leq z \leq l_1$

$$\begin{aligned} g_1(l_1 + \beta_1 t) &= \frac{\beta_1 \rho_1 I_1 - \beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} f_1^i(l_1 - \beta_1 t) + \frac{2\beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} g_2^i(l_1 + \beta_2 t), \\ \dot{g}_1(l_1 + \beta_1 t) &= \frac{\beta_1 \rho_1 I_1 - \beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \dot{f}_1^i(l_1 - \beta_1 t) + \frac{2\beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \dot{g}_2^i(l_1 + \beta_2 t). \end{aligned} \quad (14)$$

Рівняння (1) спільно з граничними умовами (3) і умовами спряження (13), (14) описують триточкову крайову задачу по відношенню до змінної  $z$  з умовами в точках  $z = 0$ ,  $z = l_1$  і  $z = L$ . Для її розв'язання застосовується метод Рунге-Кутта.

**4. Аналіз самозбудження крутильних коливань у складених бурильних колонах.** Дослідження виконані для випадку взаємодії долота зі стінкою свердловини по законам в'язкого (випадки I, II, III) і кулонового тертя (випадки IV, V, VI). Розглядались такі співвідношення між довжинами ланок колони:

випадки I, IV —  $l_1 = L/3$ ,  $l_2 = 2L/3$ ;

випадки II, V —  $l_1 = l_2 = L/2$ ;

випадки III, VI —  $l_1 = 2L/3$ ,  $l_2 = L/3$ .

Механічні і геометричні параметри труби першої (нижньої) секції склали:  $G = 80,77 \text{ ГПа}$ ,  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $J = 3,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $r_1 = 0,05049 \text{ м}$ ,  $r_2 = 0,04449 \text{ м}$ , при цьому  $I_z = 0,41 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$ .

Для другої (верхньої) секції механічні властивості матеріалу труби і момент інерції долота залишилися незмінними, а радіуси труби набули значень  $r_1 = 0,08415 \text{ м}$ ,  $r_2 = 0,07415 \text{ м}$ , при цьому  $I_z = 3,12 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$ .

Результати чисельних досліджень представлені в таблиці 1. В дослідження проводились для колони довжиною  $L = 1000 \text{ м}$  при кутовій швидкості  $\omega = 2 \text{ рад/с}$ .

Таблиця 1  
Числові значення параметрів автоколивальних процесів складених бурильних колон

Випадок	Модель в'язкого тертя			Модель кулонового тертя		
	I	II	III	IV	V	VI
$\Phi_{cm} \text{ (рад)}$	-105,32	-141,89	-178,25	-105,35	-142,08	-178,84
$\Phi_{сер} \text{ (рад)}$	-85,79	-115,46	-145,13	-100,03	-134,78	-169,49
$D \text{ (рад)}$	39,07	52,86	66,25	10,65	14,61	18,71
$T \text{ (с)}$	31,20	42,17	53,33	8,33	11,67	15,2

Можна бачити, що при різних моделях тертя суттєво відрізняються лише розмахи ( $D$ ) і періоди ( $T$ ) коливань, а кут пружного закручування  $\Phi_{cm}$  залишається майже незмінним.

Результати розрахунків представлені також в графічній формі на рис. 3 (форма автоколивань долота) і на рис. 4 (фазовий портрет автоколивань долота).

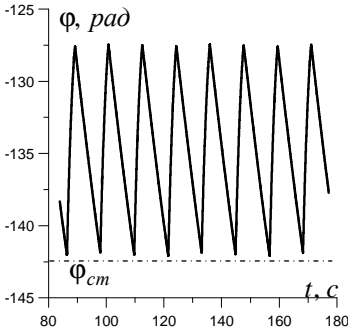


Рис. 3. Форма релаксаційних автоколивань долота складеної БК довжиною  $L = 1000$  м

при кутовій швидкості  $\omega_n = 2$  рад / с  
(випадок V)

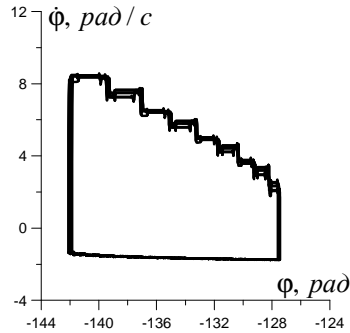


Рис. 4. Фазовий портрет автоколивань долота складеної БК ( $L = 1000$  м ,

$\omega_n = 2$  рад / с , випадок V)

Видно, що для даної конструкції динамічний процес протікає за сценарієм релаксаційних автоколивань.

**Висновки.** В роботі виконані теоретичні дослідження самозбудження крутильних коливань складених бурильних колон з використанням різних моментів сил тертя. Проведені дослідження основних закономірностей самозбудження і протікання цих коливань:

- 1) Виведені рівняння дифракції хвиль крутіння в точках стику ланок колони з різними жорсткостями.
- 2) Встановлено, коливальний процес реалізуються за сценарієм релаксаційних автоколивань.
- 3) Виконані дослідження для випадків, коли бурильна колона складається з двох ділянок рівної довжини, або з довжинами, які знаходяться у відношенні 1:2. Проведено аналіз впливу моменту сил тертя на параметри автоколивань.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - М.: Физматгиз, 1959. - 915 с.
2. Андрусенко Е.Н., Гуляев В.И., Худолій С.Н.. Изгиб бурильной колонны в криволинейной скважине с несовершенствами осевой линии // Прикладная математика и механика. — 2012. — Т 76, № 3. — С. 459 – 468.
3. Гуляев В.И., Глушакова О.В., Худолій С.Н.. Квантованные аттракторы в волновых моделях торсионных колебаний колонн глубокого бурения // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. — 2010. — №2. С. 134-147.
4. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания — М.: Наука, 1975. — 248 с.

5. Рабинович М.К., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн – М.: Наука, 1984. — 432 с.
6. Ford Brett J. The genesis of torsional drillstring vibrations // SPE Drilling Engineering. – 1992, v.7, September. – P. 168-174.
7. Gulyayev V.I., Hudoliy S.N., Glushakova O.V. Simulation of torsion relaxation auto-oscillations of drill string bit with viscous and Coulombic friction moment models. // Journal of Multi-body Dynamics. — V. 225. — P. 139 – 152.
8. Gulyayev V., Glushakova O.. Large-scale and small-scale self-excited torsional vibrations of homogeneous and sectional drill strings // Interaction and Multiscale Mechanics. - V. 4, №4. - P. 139 - 152.
9. Gulyayev V.I., Borshch O.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2011. — V. 78. — P. 759 – 764.
10. Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., Gorbunovich I.V. The buckling of elongated rotating drill strings // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2009. — V. 67. — P. 140 - 148.

*Стаття надійшла до редакції 23.06.2012 р.*

*Гайдайчук В.В., Глушакова О.В.*

#### **САМОВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНОВЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СОСТАВНЫХ БУРИЛЬНЫХ КОЛОНН**

Рассмотрена проблема самовозбуждения крутильных колебаний бурильных колонн, состоящих из звеньев с разными жесткостями. Проведены исследования основных закономерностей самовозбуждения и протекания этих колебаний. Выведены уравнения дифракции волн кручения в точке сочленения участков с разными жесткостями. Установлено, что формы автоколебаний реализуются по сценариям релаксационных автоколебаний.

*Gaidaichuk V.V., Glushakova O.V.*

#### **SELFEXCITATION OF TORSION WAVE VIBRATIONS OF MULTILINK DRILL STRING**

The problem of torsion vibration self-excitation of drill strings combined from tubular segments with differing torsion stiffness is considered. The analysis of principal regularities of self-excitation and realization of those vibrations is performed. The equations of the torsion wave diffraction at the points of joints of the links with differing stiffnesses are constructed. It is established that the auto-vibration regimes are realized with the scenarios of relaxation auto-vibrations.