

УДК 539.375

Гуляр О.І., д-р техн. наук,
Пискунов С.О., канд. техн. наук,
Шкріль О.О., канд. техн. наук,
Мицюк С.В.

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО МОДЕЛЮВАННЯ РОСТУ ТРІЩИНИ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ ГРАНИЧНОГО РЕСУРСУ

Вступ. Обчислення несучої здатності і визначення розрахункового ресурсу відповідальних елементів конструкцій з початковими тріщинами передбачає проведення моделювання росту тріщини. При дії на тіло циклічного навантаження зростання тріщини відбувається при значеннях параметрів механіки руйнування, які є суттєво меншими за критичні. Величина ресурсу елемента конструкції з тріщиною визначається кількістю циклів навантаження до досягнення тріщиною певного, наперед обумовленого критичного розміру який може бути визначений з технічних умов експлуатації конструкції (розрахунковий ресурс безвідмовної роботи), або моментом повного втрачання несучої здатності, коли швидкість зростання тріщини прямує до нескінченності і набуває лавиноподібного характеру. В останньому випадку характерні розміри тріщини можуть бути співвідносні із розмірами тіла, а величина часу до досягнення зазначеного стану є граничним ресурсом тіла з тріщиною.

Питання моделювання розвитку тріщини на теперішній час висвітлено в низці робіт, де наведені описи і приклади розв'язання задач про визначення ресурсу тіл з тріщинами для двовимірних тіл [4, 6, 11, 12]. Більшість відомих результатів дослідження деформування просторових тіл з тріщинами обмежуються визначенням параметрів механіки руйнування [1, 5] і створенням методик прогнозування розвитку тріщини до певних наперед заданих розмірів [2, 10].

Складність форми досліджуваних об'єктів, просторовий характер розподілення зовнішнього навантаження, та довільність розташування і конфігурації тріщин ставить питання про визначення ресурсу в просторовій постановці. Розв'язання таких задач потребує багаторазового визначення напружено-деформованого стану просторового тіла із тріщиною, що відповідають різним стадіям її розвитку, визначення для них параметрів механіки руйнування та нової конфігурації фронту тріщини. Розв'язання задач такого рівня складності і практична реалізація відповідних обсягів обчислень є можливим лише із використанням

чисельних методів, найбільш поширеним з яких є метод скінчених елементів (МСЕ).

Розв'язання задачі про моделювання росту тріщини при циклічному навантаженні на основі МСЕ передбачає дискретизацію процесу навантаження тіла у вигляді сукупності кроків, кожний з яких є еквівалентним певній кількості циклів навантаження. Для визначення характерних розмірів тріщини використовуються диференційні залежності, що пов'язують значення параметрів механіки руйнування із прирощенням довжини тріщини та кількістю циклів навантаження. Зважаючи на суттєво неоднорідний характер напружено-деформованого стану, для його апроксимації необхідним є використання дискретної моделі із значною кількістю невідомих, проведення перебудови дискретної моделі відповідно до конфігурації тріщини, подальше обчислення матриці жорсткості, розв'язання задачі про визначення напружено-деформованого стану і визначення параметрів механіки руйнування.

Таким чином, ефективність розв'язання задачі про визначення ресурсу тіла із тріщиною, що зростає, обумовлена ефективністю використовуваних засобів скінченоелементної дискретизації досліджуваних об'єктів, ефективністю алгоритмів розв'язання крайової задачі про напружено-деформований стан тіла з тріщиною та обчислення параметрів механіки руйнування, вірогідністю алгоритму перебудови скінчено-елементної сітки, та точністю інтегрування диференційних залежностей, що описують зростання тріщини.

Питання ефективності засобів скінченоелементної дискретизації може бути вирішено, наприклад, застосуванням ефективних модифікацій МСЕ, що орієнтовані на досить широке коло об'єктів канонічної форми та розробкою в їх межах відповідних скінченоелементних баз. Однією з таких модифікацій є напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ), досвід застосування якого, зокрема, поширений на задачі лінійного і нелінійного деформування призматичних тіл та тіл обертання [1], а також задачі механіки руйнування [1–3, 5]. Зокрема питання обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень для призматичних тіл висвітлені в статті [1, 3], для тіл обертання – в [5]. Розробка і дослідження вірогідності методики моделювання розвитку тріщин, розмір яких є набагато меншим характерних розмірів тіла та результати розв'язання відповідних задач викладені в [2].

Застосування НМСЕ передбачає проведення ітераційного розв'язання отриманої системи рівнянь. У випадку розв'язання задачі до моменту початку лавиноподібного зростання тріщини кількість ітерацій при наближенні до максимальних розмірів тріщини може бути дуже значною, що обумовлено суттєвою неоднорідністю напружено-деформованого стану тіла при наявності в ньому тріщини, розміри якої є співвідносні із розмірами об'єкта.

Одним із способів підвищення ефективності алгоритму розв'язання систем рівнянь є застосування екстраполяції розв'язку на наступних кроках.

В роботі [2] розглянуті деякі підходи до скорочення обчислювальних витрат шляхом зменшення кількості обчислень матриці жорсткості та удосконалення ітераційного алгоритму розв'язання задачі. Але дослідження вірогідності і ефективності методики проведено на прикладі задачі про розвиток тріщини в нескінченному тілі.

Метою даної роботи є розробка ефективних алгоритмів розв'язання задач про моделювання росту тріщини, які б із найменшими обчислювальними витратами і високою точністю дозволяли б проводити розв'язання задачі до моменту повного вичерпання несучої здатності тіла із тріщиною та його реалізація в межах НМСЕ.

1. Вихідні співвідношення механіки руйнування при циклічному навантаженні. При впливі циклічного навантаження процес розвитку тріщини найчастіше описується диференційними залежностями, що встановлюють зв'язок між приростом довжини тріщини dl , кількістю циклів навантаження dN і значенням коефіцієнту інтенсивності напружень (КІН) $K_I(l)$, що відповідає поточній довжині (характерним розмірам) тріщини l в кожній точці її фронту [8]:

$$\frac{dl}{dN} = f(K_I(l), C_i), \quad (1.1)$$

де C_i – коефіцієнти, що характеризують фізичні властивості матеріалу.

Найпростішим частковим випадком залежності (1.1) є формула Періса [8]:

$$\frac{dl}{dN} = C(K_I(l))^b. \quad (1.2)$$

Обчислення величини КІН, що входить до виразу (1.2) здійснюється, зокрема, прямим методом, що передбачає визначення КІН на основі результатів розв'язання задачі про напружено-деформований стан тіла з тріщиною.

У випадку лінійного деформування під впливом силового навантаження напружено-деформований стан в околі вершини тріщини може бути описаний асимптотичними формулами, які встановлюють взаємозв'язок між переміщеннями або напруженнями поданими в місцевій системі координат y'' , пов'язаній із вершиною тріщини (вісь y'' перпендикулярна до фронту тріщини), та КІН $K_I(l)$ [6, 7]. На основі зазначених співвідношень, для визначення КІН отримаємо [1]:

$$K_I(U) = \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{U_1'' G}{\sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2G - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)},$$

$$K_I(\sigma) = \frac{\sigma_1'' \sqrt{2\pi r}}{\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)}, \quad (1.3)$$

де $K_I(U)$ і $K_I(\sigma)$ – КІН, обчислені відповідно за величиною напружень і переміщень в окремих точках привершинної області тріщини; r , θ – полярні координати точки, для якої визначений КІН (координати r , θ відраховуються від вершини і фронту тріщини); G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона; U_1'' – повні переміщення точок тіла з тріщиною.

2.Методика визначення КІН по фронту тріщини. Обчислення КІН виконуються в характерних точках фронту тріщини A_m^i , що відповідають конфігурації фронту на кроці m (рис.1,а). Як показано в роботі [3], необхідна точність обчислення КІН при застосуванні прямого методу передбачає використання в межах зони згущення СЕ, характерний розмір яких l_e становить не більше 1/10 характерного розміру тріщини $l_{тр}$. Обчислення КІН за переміщеннями здійснюється у вузлах СЕ моделі в площині, що проходить через точку A_m^i , і є перпендикулярною до фронту тріщини (рис.1,б, точки обчислення КІН позначені хрестиками). Обчислення КІН за напруженнями здійснюється в центрах СЕ в площинах В-В і С-С, що також перпендикулярні до фронту тріщини і проходять через центри СЕ, суміжних із точкою A_m^i (рис. 1,в, точки обчислення КІН позначені кружечками). При цьому, враховуючи вимоги методики, пов'язані з явищем сингулярності [3], в точках, розташованих на відстанях менших $0.1l_{тр}$ вздовж осей y^1 і y^2 від вершини тріщини КІН за переміщеннями не визначається (рис.1,б). Також не визначається КІН за напруженнями в точках, що розташовані ближче $0.05 l_{тр}$ від вісі y^2 (рис. 1,в).

Визначені в окремих точках величини КІН за напруженнями і переміщеннями усереднюються до отримання відповідних величин $\bar{K}(U)$ і $\bar{K}(\sigma)$, які в свою чергу усереднюються для отримання кінцевого значення КІН в точці A_m^i [3]:

$$K_I = K_I(l_m^i) = \frac{\bar{K}(U)_I + \bar{K}(\sigma)_I}{2}. \quad (2.1)$$

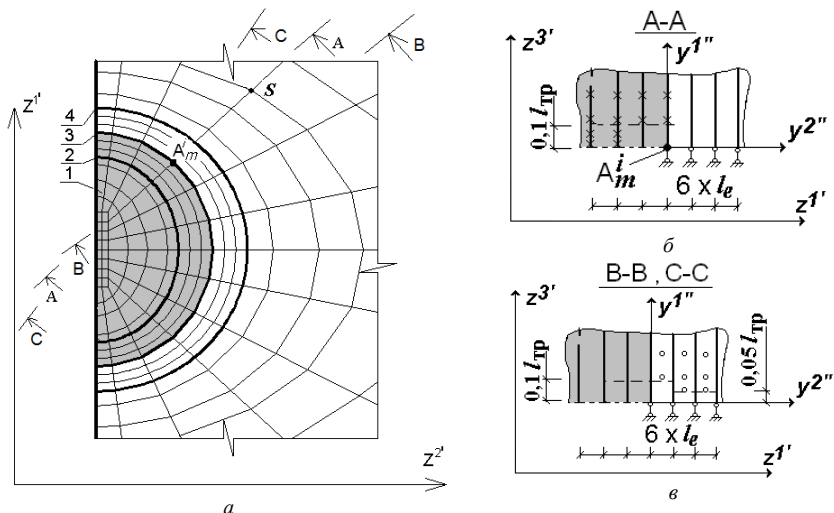


Рис. 1. Конфігурація фронту тріщини:

1 - поверхня тріщини, 2, 4 - межі зони згущення, 3 - фронт тріщини на кроці m .

3. Вірогідність визначення КІН. Для перевірки достовірності результатів, отримуваних на основі викладеної методики, було розв'язано задачі про визначення КІН в прямокутній пластині з центральною тріщиною ($B = 10$ мм, $H = 10$ мм, $q = 1$ кг/см², рис. 2), нескінченному призматичному тілі (рис. 3, a) і циліндрі з еліптичною тріщиною (рис. 4, a).

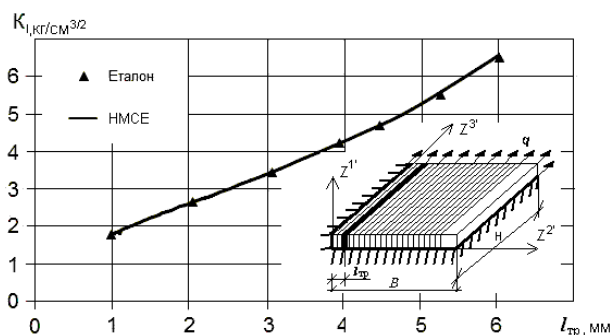


Рис. 2

Порівняння значень КІН, отриманих в пластині із використанням прямого методу, та результатів еталонного розв'язку [7] наведено на

рис.2 у вигляді К - тарівки. Як видно, значення КІН при різних довжинах тріщин є майже тотожними.

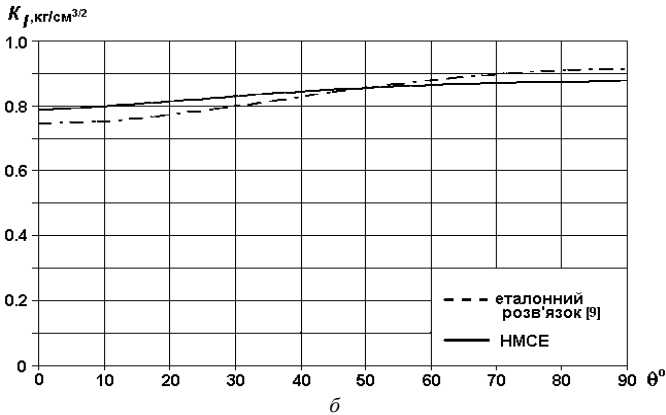
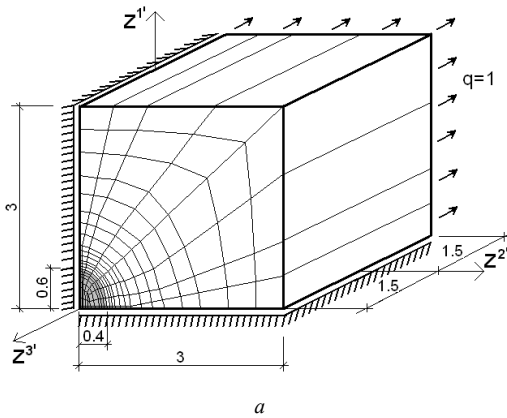


Рис. 3. Призматичне тіло із еліптичною тріщиною

Перевірка вірогідності методики для призматичних тіл при змінному розподіленні КІН вздовж фронту тріщини проведена порівнянням результатів, отриманих для призматичного тіла з еліптичною тріщиною в умовах одновісного розтягу (рис. 3). Розподілення КІН вздовж фронту тріщини добре угоджується із еталонним розв'язком [9].

Перевірка вірогідності методики для тіл обертання проведена шляхом розв'язання задачі про визначення КІН в циліндрі з еліптичною тріщиною під впливом внутрішнього тиску (загальний вигляд і дискретні моделі НМСЕ

показані на рис. 4,а). Розподілення КІН вздовж фронту тріщини, отримане із урахуванням збіжності за кількістю членів ряду поліноміального подання переміщень і скінченоелементною сіткою в поперечному перерізі, наведене на рис. 4,б. Як і в попередніх випадках, спостерігається добре узгодження результатів із еталонним розв'язком [7].

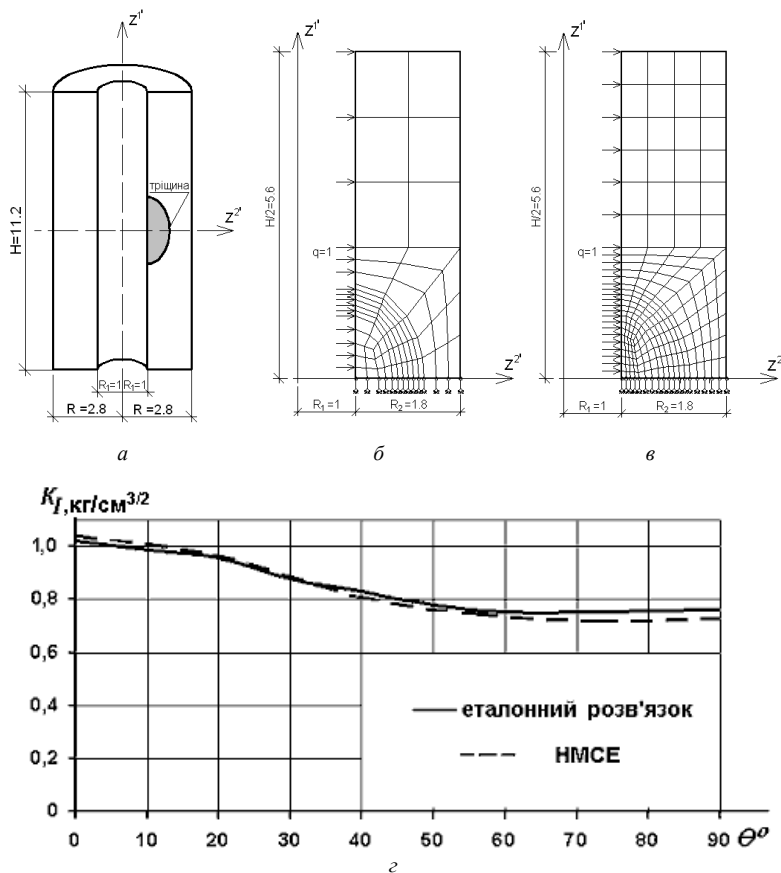


Рис. 4. Циліндр з еліптичною тріщиною

На відміну від випадку пластини з центральною тріщиною, розподілення КІН вздовж фронту еліптичної тріщини є змінним і залежить від конфігурації тріщини, яка буде змінюватись при її зростанні. Таким чином, отримання K - тарировки при інших конфігураціях еліптичної тріщини вимагає попереднього моделювання її росту.

4. Дискретне моделювання росту тріщин. При виконанні чисельного інтегрування рівняння (1.1) в кожній точці фронту i ($i=1..k$) характерні розміри тріщини l_m^i на кожному наступному кроці визначаються за довжиною тріщини на попередньому кроці l_{m-1}^i з врахуванням її приросту Δl_m^i :

$$l_{m+1}^i = l_m^i + \Delta l_m^i. \quad (4.1)$$

Визначення приросту довжини тріщини в точках фронту за ΔN циклів навантаження виконується за величиною КІН i , згідно з (1.2), становить:

$$\Delta l_m^i = C \left(K_I(l_m^i) \right)^b \Delta N_m. \quad (4.2)$$

За величинами Δl_m^i обчислюються нові координати вузлів фронту тріщини, а також інших вузлів СЕ моделі і проводиться зміна конфігурації сіткової області.

При реалізації цієї процедури з урахуванням збереження топологічної структури дискретної моделі можна відокремити два характерні випадки: перебудова сітки в межах привершинної області, де здійснюється обчислення КІН та в іншій частині тіла.

При здійсненні перебудови сітки в межах привершинної області необхідно дотримуватись зазначеного обмеження на розміри СЕ.. З урахуванням цього, при перебудові сіткової області змінення координат точок, що лежать в межах зони згущення, здійснюється так, щоб вихідний розмір СЕ не змінювався. При зростанні довжини тріщини це забезпечує дотримання умови $l_e \leq \frac{1}{10} l_{тр}$.

Перебудова сітки в частині дискретної моделі поза межами привершинної зони (рис.5,а) може здійснюватись двома способами: перший спосіб полягає у зсуві всіх її вузлів (за винятком тих, що обмежують контур дискретної моделі) на визначену величину Δl за напрямком розвитку тріщини (рис.5,б). Як показано в [2], застосування першого способу, навіть при прирощеннях довжини тріщини сувимірних з її початковими розмірами,

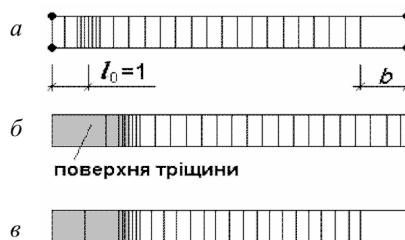


Рис. 5

призводить до отримання вироджених СЕ і неможливості подальшого розв'язання задачі.

В розглядуваному випадку, при визначенні граничного ресурсу, і відповідно, сумарних прирощень довжини тріщини, набагато більших від її початкового розміру та характерного розміру b скінченоеlementної сітки, починаючи з певного моменту розв'язання задачі застосування цього алгоритму є неможливим. Тому в даній роботі застосовується запропонований в [2] підхід, що полягає в зміщенні вузлів поза привершинною зоною на відстань, зворотно-пропорційну відстані від даного вузла до вершини тріщини (рис. 5,в).

Згідно до цього підходу при проведенні перебудови дискретної моделі вважається, що на кожному кроці розвиток тріщини відбувається в напрямку, ортогональному до поточної конфігурації її фронту. При реалізації цього припущення на дискретній моделі в точках фронту i_m передбачалось, що розвиток тріщини відбувається вздовж лінії, ортогональної відрізка, що з'єднує $(i-1)_m$ та $(i+1)_m$ точки фронту.

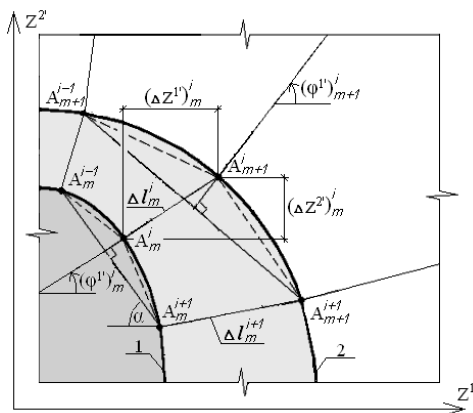


Рис. 6. Фронт тріщини: 1 – на кроці m , 2 – на кроці $m+1$

Обчислення координат $(z^{k'})_m^i$ вузла i фронту тріщини на кроці m здійснюється за формулами (рис.6):

$$(z^{k'})_{m+1}^i = (z^{k'})_m^i + (\Delta z^{k'})_m^i, \quad (4.3)$$

$$(\Delta z^{k'})_m^i = \Delta l_m^i \cos(\varphi^{k'})_m^i, \quad (4.4)$$

$$\cos(\varphi^{k'})_m^i = \frac{(z^{k'})_m^i}{\sqrt{((z^1)_m^i)^2 + ((z^2)_m^i)^2}}, \quad (4.5)$$

де $\varphi^{k'}$ – кут між напрямком вісі $z^{k'}$ і напрямком пересування точок фронту тріщини:

$$\varphi^1 = \pi/2 - \alpha = \pi/2 - \arctg\left(\frac{(z^2)_m^{i-1} - (z^2)_m^{i+1}}{(z^1)_m^{i+1} - (z^1)_m^{i-1}}\right), \quad \varphi^2 = \varphi^1 - \pi/2. \quad (4.6)$$

Для підтвердження припущення про розвиток тріщини в ортогональному до її фронту напрямку, проведено моделювання розвитку еліптичної тріщини в призматичному тілі. Порівнювались два варіанти: за першим варіантом на кожному кроці розв'язання задачі при реалізації формули (4.2) вважалося, що розвиток тріщини відбувається в напрямку нормалі до фронту початкової тріщини (рис.7), за другим варіантом – за нормаллю до поточної конфігурації фронту тріщини (рис.8). При розгляданому співвідношенні розмірів тіла і тріщини вона може розглядатись як еліптична тріщина в тілі нескінчених розмірів. Як видно, збіг результатів із еталоном, згідно до якого еліптична тріщина в ході розвитку прямує до колової конфігурації [2,9], є кращим при застосуванні другого варіанту (рис.8).

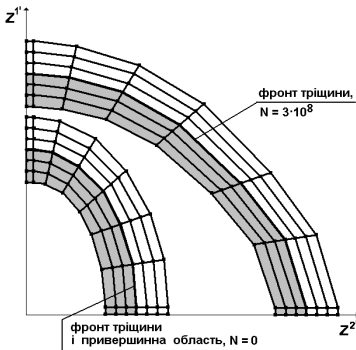


Рис. 7

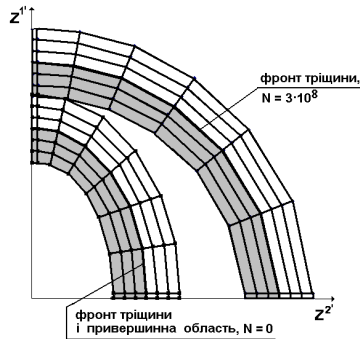


Рис. 8

Таким чином, в подальшому при моделюванні росту тріщини передбачається, що тріщина зростає за нормаллю до поточної конфігурації її фронту.

5. Визначення прирощень довжини тріщини. Обчислення КІН $K_I(l^i)$ в формулі (4.2) здійснюється із використанням співвідношення:

$$K(l_m^i) = K_m^i(1 - \alpha) + K_{m+1}^i \alpha, \quad (5.1)$$

де K_m^i – значення КІН в точці i , обчислене за величиною l^i на початку кроку m (в кінці попереднього кроку); K_{m+1}^i – значення КІН, обчислене з урахуванням екстраполяції прирощення довжини тріщини на даному кроці; $0 \leq \alpha \leq 1$ – параметр, що визначає схему обчислення КІН.

При $\alpha = 0$ значення КІН обчислюється за формулою:

$$K(l_m^i) = K_m^i. \quad (5.2)$$

При $\alpha = 0.5$ обчислення $K(l^i)$ потребує наявності екстраполяції значення КІН K_{m+1}^i , яке можна обчислити двома способами: із використанням величин КІН на попередніх кроках, або за даними відомої K - тарівки.

При застосуванні екстраполяції за величинами КІН на попередніх кроках значення КІН в кожній точці фронту тріщини на наступному кроці дорівнює (рис. 9):

$$K_{m+1} = K_m + \Delta K_{m+1} = K_m + \operatorname{tg}(\varphi) \times \Delta l_m(K_m), \quad (5.3)$$

де $\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{K_m - K_{m-1}}{\Delta l_{m-1}}$.

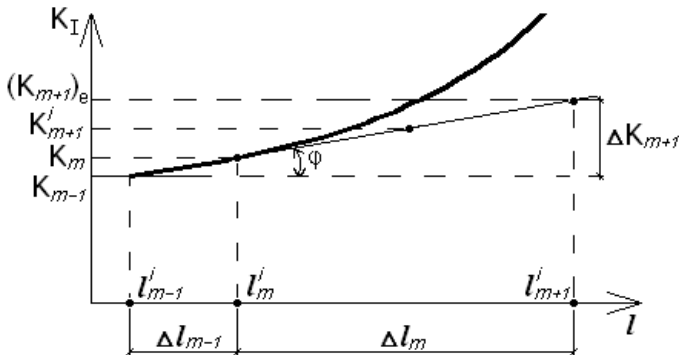


Рис. 9

Дійсне значення КІН обчислюється шляхом усереднення КІН, отриманих для довжин тріщин даного і наступного кроків (рис.9):

$$K_{m+1}^i = \frac{K_m + (K_{m+1})_e}{2}. \quad (5.4)$$

Результати моделювання росту центральної тріщини в пластині з центральною тріщиною (рис. 2) наведено на рис.10. Еталонний розв'язок (крива1) отриманий безпосереднім інтегруванням рівняння (1.2) при $b = 4$, $C = 1.63 \times 10^{-10}$. Обчислення КІН здійснювалось при $\alpha=0$ в формулі (5.1). Відмінність результатів, отриманих з екстраполяцією КІН (крива 2) становить 5%.

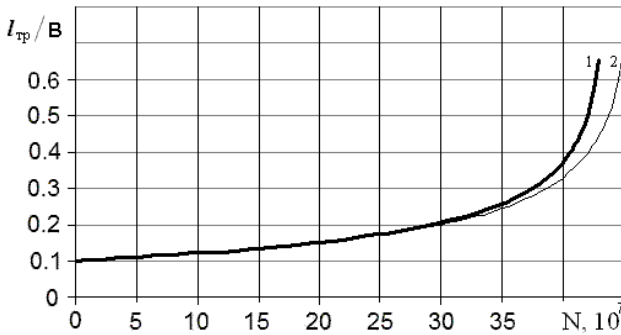


Рис. 10

1 – алгоритм з екстраполяцією, 2 - еталон при різних циклах навантаження

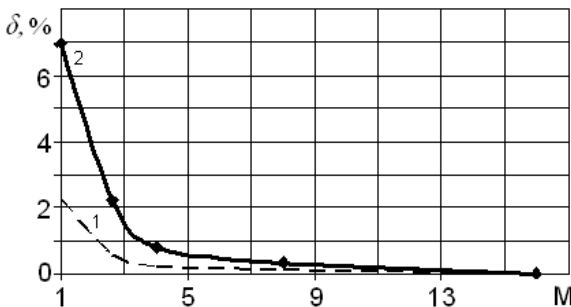


Рис. 11

1 – алгоритм з екстраполяцією, 2 - еталон при $\alpha = 0$

Як видно, збіжність розв'язку без екстраполяції КІН відбувається повільніше, проте при кроці $\Delta N_1 = 0,0625 \times 10^7$ похибка визначення довжини тріщини є однаковою. На рис. 11 подані результати збіжності цих розв'язків в залежності від кількості циклів навантаження ΔN на

кроці ($M = \frac{\Delta N}{\Delta N_1}$ – коефіцієнт, який визначає змінення величини кроку за навантаженням при $\Delta N_1 = 1 \times 10^7, 0,5 \times 10^7, 0,25 \times 10^7, 0,125 \times 10^7, 0,5 \times 10^7, 0,0625 \times 10^7, \Delta N = 1 \times 10^7$)

Таким чином модифікація процедури обчислення КІН покращує збіжність результатів.

6. Алгоритм розв'язання систем рівнянь НМСЕ. На кожному кроці розв'язання задачі про визначення ресурсу тіл з тріщинами проводиться розв'язання задачі про напружено-деформований стан тіла з тріщиною, що, в свою чергу, потребує розв'язання систем рівнянь НМСЕ із використанням блочно-ітераційних алгоритмів.

На кожній ітерації n кроку m при характерних розмірах тріщини l_m^i вектор невідомих амплітудних переміщень системи рівнянь НМСЕ може бути поданий у вигляді:

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + [K]_m^{-1} (\{P\}^m - \{R\}_n^m), \quad (6.1)$$

де $\{P\}^m$ – вектор вузлових навантажень на кроці m ; $\{R\}_n^m$ – вектор вузлових реакцій на ітерації n , обчислений за величинами напружень σ_{ij} , що відповідають напружено-деформованому стану тіла з тріщиною з характерними розмірами l_m^i ; $[K]_m$ – матриця жорсткості тіла з тріщиною, що обчислюється на кожному кроці m [1]:

$$\{R\} = \left\{ \begin{bmatrix} \circ \\ B_1 \end{bmatrix}^T \{\sigma\} + \begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix}^T \{\sigma\}_3 + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\begin{bmatrix} \circ \\ B_{1,\alpha} \end{bmatrix}^T \{\sigma\}_\alpha + \begin{bmatrix} \circ \\ B_{2,\alpha} \end{bmatrix}^T \{\sigma\}_{\alpha 3} \right) \right\} \sqrt{g}^\circ, \quad (6.2)$$

де $\{\sigma\}, \{\sigma\}_3, \{\sigma\}_\alpha, \{\sigma\}_{\alpha 3}$ – компоненти вектора амплітудних напружень та їх похідні; $\begin{bmatrix} \circ \\ B_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \circ \\ B_{1,\alpha} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \circ \\ B_{2,\alpha} \end{bmatrix}$ – матриці, які пов'язують величини деформацій і переміщень в скінченному елементі, обчислені по

координатам z^i вузлів дискретної моделі, що відповідають розмірам тріщини l_m^i ;

$$\begin{aligned}
 [K]_m = & \left\{ \begin{bmatrix} \circ \\ B_1 \end{bmatrix}^T [D]_{00}^n \begin{bmatrix} \circ \\ B_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix}^T [D]_{30}^n \begin{bmatrix} \circ \\ B_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \circ \\ B_1 \end{bmatrix}^T [D]_{03}^n \begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix} + \right. \\
 & + \begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix}^T [D]_{33}^n \begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\begin{bmatrix} \circ \\ B_{1,\alpha} \end{bmatrix}^T [D]_{00\alpha}^n \begin{bmatrix} \circ \\ B_{1,\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \circ \\ B_{2,\alpha} \end{bmatrix}^T [D]_{30\alpha}^n \begin{bmatrix} \circ \\ B_{1,\alpha} \end{bmatrix} + \right. \\
 & \left. \left. + \begin{bmatrix} \circ \\ B_{1,\alpha} \end{bmatrix}^T [D]_{03\alpha}^n \begin{bmatrix} \circ \\ B_{2,\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \circ \\ B_{2,\alpha} \end{bmatrix}^T [D]_{33\alpha}^n \begin{bmatrix} \circ \\ B_{2,\alpha} \end{bmatrix} \right) \left. \right\} \sqrt{g}, \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

де $[D]_{00}^n, [D]_{30}^n, [D]_{03}^n, [D]_{33}^n, [D]_{00\alpha}^n, [D]_{30\alpha}^n, [D]_{03\alpha}^n, [D]_{33\alpha}^n$ – матриці пружних сталей матеріалу та їх похідних.

Формула (6.1) описує ітераційний алгоритм для розв'язання систем рівнянь НМСЕ. При цьому матриці і вектори, що входять до цього виразу мають блочну структуру, яка обумовлена поданням в НМСЕ невідомих переміщень у вигляді розкладання за системою базисних функцій [1].

Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність:

$$\sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \left(\{ \Delta u \}_\lambda^n \right)^2 \leq \zeta \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \left(\{ u \}_\lambda^n \right)^2, \quad (6.4)$$

де $\zeta = 10^{-4} \dots 10^{-6}$ - параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь, який може бути визначений на основі дослідження збіжності отриманого розв'язку, n - номер ітерації i , $n = 1, 2, \dots, N$ (N - остання ітерація на кроці), λ - номер члену ряду розкладу переміщень в ряд за поліномами при застосуванні НМСЕ [1].

При використанні цього алгоритму для визначення напружено-деформованого стану тіла з тріщиною на першому кроці m ($m=1$) приймається:

$$\{ u \}_0^1 = 0, \{ \sigma \}_1^1 = 0, \{ R \}_1^1 = 0. \quad (6.5)$$

Компоненти вектора амплітудних напружень виразу (6.2) обчислюють за формулою:

$$\{ \sigma \}_n^1 = \{ \Delta \sigma \}_n^1, \quad (6.6)$$

де вектор прирощення напружень $\{\Delta\sigma\}_n^1$ обчислюють за переміщеннями $\{u\}_{n-1}^1$ на попередній ітерації кроку:

$$\{\Delta\sigma\}_n^1 = f(\{u\}_{n-1}^1). \quad (6.7)$$

Переміщення і напруження на останній ітерації кроку 1 дорівнюють:

$$\{U\}_N^1 = \{u\}_N^1, \quad \{\sigma\}_N^1 = \{\Delta\sigma\}_N^1, \quad (6.8)$$

де $\{U\}_N^1$ – вектор повних переміщень точок тіла з початковою тріщиною розмірами l_m^i .

На наступних кроках m ($m=2,3\dots M$) при відповідних розмірах тріщини l_m^i приймається:

$$\{u\}_0^m = 0, \quad \{\sigma\}_1^m = 0, \quad \{R\}_1^m = 0, \quad \{\sigma\}^{m-1} = 0. \quad (6.9)$$

Обчислення напружень на проміжних ітераціях наступних кроків ($m=2,3\dots M$) та переміщень і напружень на останній ітерації кроку здійснюється аналогічно кроку 1:

$$\{\sigma\}_n^m = \{\Delta\sigma\}_n^m = f(\{u\}_{n-1}^m), \quad (6.10)$$

$$\{U\}^m = \{U\}_N^m = \{u\}_N^m, \quad \{\sigma\}^m = \{\sigma\}_N^m = \{\Delta\sigma\}_N^m. \quad (6.11)$$

Отримані вектори повних напружень $\{\sigma\}^m$ та переміщень $\{U\}^m$ використовуються в подальшому для обчислення КІН в (1.3)

Таким чином, результати розв'язання задачі, отримані за цим алгоритмом, фактично являють собою низку незалежних розв'язків, отриманих для різних розмірів тріщин l_m^i . В подальшому такий підхід до розв'язання задачі будемо називати **алгоритм без екстраполяції**. При цьому кількість ітерацій на кожному кроці при сталому ΔN є майже однаковою, а сумарна кількість ітерацій приблизно дорівнює кількості ітерацій на одному кроці помноженій на кількість кроків.

7. Екстраполяція напружень при моделюванні росту тріщини. При покроковому розв'язанні задачі прирощення довжини тріщини за один крок i , відповідно, змінення напружено-деформованого стану є

незначним. Деформований стан тіла з тріщиною розмірами l_m^i може бути характеризований вектором повних переміщень $\{U\}^m$:

$$\{U\}^m = \{U\}^{m-1} + \{\Delta U\}^m = \{U\}^{m-1} + \{u\}_N^m, \quad (7.1)$$

де $\{\Delta U\}^m = \{u\}_N^m$ – величина переміщень, отримана із (6.1) на останній ітерації N кроку m і обумовлена зміненням деформованого стану тіла при набутті характерними розмірами тріщини прирощень Δl_m^i (рис.12).

На першому кроці ($m=1$) обчислення компонент виразу (7.1) здійснюється аналогічно алгоритму без екстраполяції за формулою (6.5).

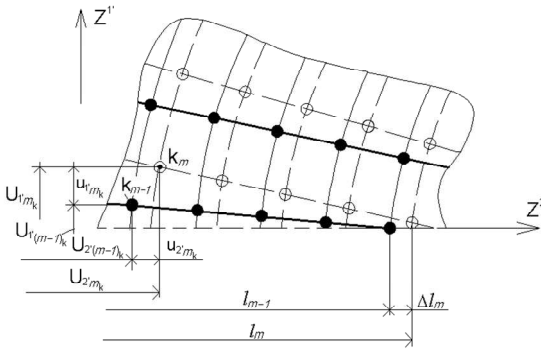


Рис. 12

Для зменшення обсягу обчислювальних витрат на подальших кроках при розв'язанні задач може бути застосована екстраполяція напружень на поточному кроці за величинами переміщень. Зважаючи на незначні змінення напружено-деформованого стану від кроку до кроку на першій ітерації кроку m в (6.1) приймається:

$$\{u\}_0^m = 0, \quad \{\sigma\}_1^m = \{\sigma\}^{m-1} = \{\sigma\}_N^{m-1}, \quad \{R\}_1^m = f(\{\sigma\}^{m-1}) \neq 0.$$

На відміну від (6.10) подальше обчислення компонент векторів амплітудних напружень та їх похідних, що входять до вектора вузлових реакцій (6.2), здійснюється за формулою:

$$\{\sigma\}_n^m = \{\sigma\}^{m-1} + \{\Delta \sigma\}_n^m, \quad (7.2)$$

де приращення напружень $\{\Delta\sigma\}_n^m$ обчислюють за величинами $\{u\}_n^m$:

$$\{\Delta\sigma\}_n^m = f(\{u\}_{n-1}^m).$$

Напруження і переміщення на останній ітерації кроку m ($m=2,3,\dots,M$) дорівнюють:

$$\{\sigma\}_N^m = \{\sigma\}^{m-1} + \{\Delta\sigma\}_N^m,$$

$$\{U\}^m = \{U\}^{m-1} + \{u\}_N^m. \quad (7.3)$$

Викладений алгоритм в подальшому називатимемо **алгоритмом з екстраполяцією напружень**.

Для апробації запропонованого алгоритму і дослідження його ефективності здійснено на задачі про розвиток центральної тріщини під впливом циклічного навантаження в нескінченій пластині (рис.13).

Характеристики матеріалу пластини: $b = 4$, $C = 1.63 \times 10^{-10}$.

Як і у випадку розв'язання тестової задачі про розвиток тріщини в скінченій пластині, еталонний розв'язок було отримано шляхом безпосереднього інтегрування рівняння (1.2) за формулою (4.2) при $\alpha = 0$. Значення КІН обчислювались за формулою $K_I = z\sqrt{\pi l}$, де $z = z(l)$ - уточнюючі коефіцієнти, які визначаються на кожному кроці інтегрування для відповідної довжини тріщини [7]. Залежність довжини тріщини від кількості циклів навантаження при різній кількості кроків розв'язання задачі, що отримана НМСЕ в порівнянні з еталонним розв'язком, наведена на рис. 13. Величини похибок довжини тріщини δ , що отримані після 3×10^8 циклів навантаження при різній кількості кроків M розв'язання задачі, при безпосередньому інтегруванні та чисельному розв'язанні задачі НМСЕ, наведені на рис. 14.

Як можна побачити з графіків [2], використання в межах НМСЕ виразу для обчислення КІН (4.2) при $\alpha = 0$ має характер збіжності аналогічний розв'язку, отриманому на основі безпосереднього інтегрування. Забезпечення точності визначення довжини тріщини в межах 2% потребує 60 кроків.

Враховуючи, що для досягнення потрібної точності визначення довжини тріщини необхідним є застосування значної кількості кроків розв'язання задачі, важливого значення набуває питання про можливість зменшення обчислювальних витрат на кожному кроці.

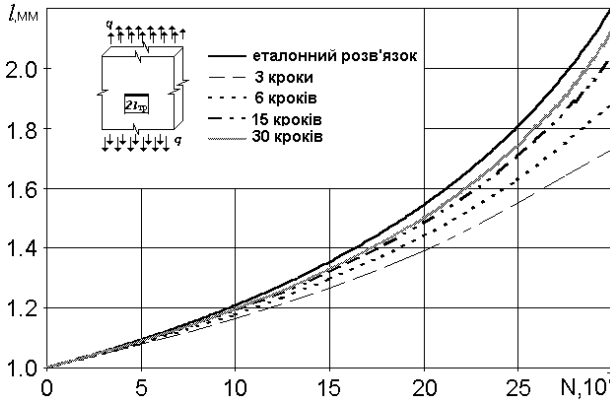


Рис. 13

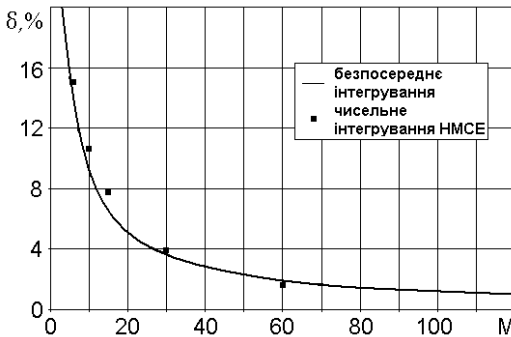


Рис. 14

Для оцінки зменшення обчислювальних витрат за рахунок застосування алгоритму екстраполяції напружень (7.1) - (7.3) було проведено порівняння кількості ітерацій $Iter$, необхідних для розв'язання задачі з різною похибкою (рис.15) порівняно із кількістю ітерацій, необхідною для розв'язання задачі за алгоритмом без екстраполяції $\sum Iter$. Як видно, із збільшенням точності інтегрування формули Періса різниця в ітераційних витратах збільшується [2]. Застосування алгоритму із екстраполяцією напружень при точності визначення довжини тріщини в межах 2% дозволяє зменшити обчислювальні витрати приблизно на порядок. Це обумовлено тим, що при застосуванні цього алгоритму із зменшенням величини кроків розв'язання задачі зменшується кількість ітерацій на кожному кроці.

При збільшенні кількості кроків M , що характеризують кількість циклів навантаження на кроці, величина прирощення амплітудних переміщень

$$\Delta u_{\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \{\Delta u\}_{\lambda}^j \quad \text{на першій}$$

ітерації кроку зменшується, що підтверджується результатами наведеними на рис.16, де показано зміння цієї величини на першій ітерації другого кроку при різній кількості кроків розв'язання задачі. Зменшення Δu_{λ} відбувається внаслідок зменшення значень прирощень довжини тріщини, обчислених після одного кроку розв'язання задачі, що в свою чергу зменшує відмінність конфігурації сіткової області і параметрів напружено-деформованого стану на двох послідовних кроках.

Як було вже зазначено, при збільшенні кількості кроків розв'язання задачі відмінність конфігурації тріщини на послідовних кроках зменшується. У зв'язку з цим додаткове зменшення обчислювальних витрат може бути отримано за рахунок обчислення матриці жорсткості (МЖ) не на кожному кроці розв'язання задачі, а після певної кількості кроків, коли зміна конфігурації тріщини і, відповідно, дискретної моделі буде більш суттєвою. Кількість обчислень МЖ, необхідних для розв'язання задачі при інтегруванні рівняння Періса при $\alpha = 0$ з різною похибкою, подана на рис. 17.

Результати свідчать, що при обчисленні МЖ на кожному кроці інтегрування і через інтервал кроків ітераційні витрати при однаковій точності розв'язання задачі не змінюються. При цьому, для досягнення точності визначення довжини тріщини в межах 2% обчислення МЖ достатньо виконувати після збільшення довжини тріщини на 20%.

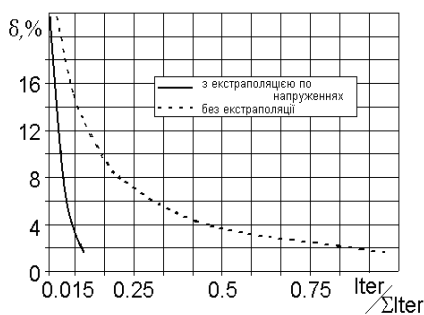


Рис. 15

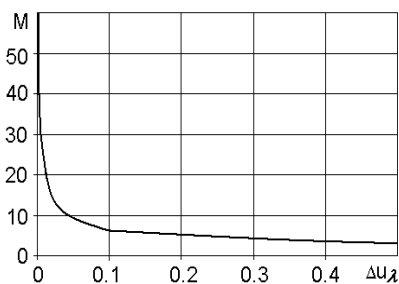


Рис. 16

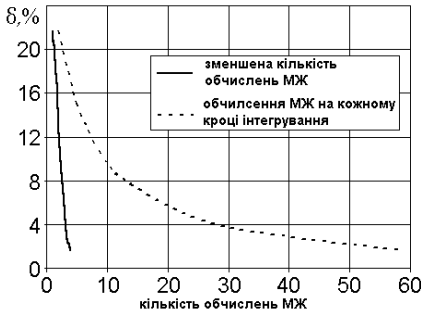


Рис. 17

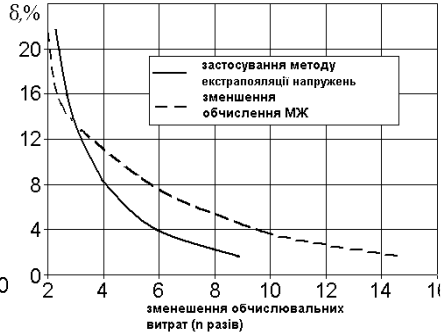


Рис. 18

Відношення кількості ітерацій, необхідних для розв'язання задачі без застосування та при застосуванні екстраполяції, та відношення кількості обчислень МЖ для розв'язання задачі з обчисленням МЖ на кожному кроці і через максимально допустиму кількість кроків для визначення довжини тріщини з різною точністю показані на рис.18. Необхідно зазначити, що при визначенні довжини тріщини з більш високою точністю ефективність зазначених методів зростає [2].

8. Екстраполяція напружень і прирощень переміщень. Інше припущення, яке може бути застосоване при реалізації алгоритму без екстраполяції полягає в тому, що відмінності повних переміщень, що виникають за рахунок різниці конфігурації фронту тріщини на двох послідовних кроках несуттєво відрізняються. Таким чином несуттєво відрізняються і отримані на цих кроках прирощення переміщень, набуті внаслідок збільшення характерних розмірів тріщини на Δl_m^i тобто: $\{\Delta U\}^m = \{u\}_0^m = \{u\}_N^{m-1}$. Як і у випадку екстраполяції напружень, на кожній ітерації кроку m напруження обчислюється за формулою:

$$\{\sigma\}_n^m = \{\sigma\}^{m-1} + \{\Delta\sigma\}_n^m, \quad (8.1)$$

проте прирощення амплітудних напружень на першій ітерації кроку m дорівнюють:

$$\{\Delta\sigma\}_1^m = f(\{\Delta U\}^{m-1}) = f(\{u\}_N^{m-1}),$$

а на наступних ітераціях:

$$\{\Delta\sigma\}_n^m = f(\{u\}_{n-1}^m).$$

В кінці кроку напруження і переміщення на останній ітерації ($m=2,3\dots M$) обчислюють аналогічно (8.1) і (7.3):

$$\begin{aligned}\{\sigma\}_N^m &= \{\sigma\}^{m-1} + \{\Delta\sigma\}_N^m, \\ \{U\}^m &= \{U\}^{m-1} + \{u\}_N^m.\end{aligned}\quad (8.2)$$

При $m=1$, та $m=2$ обчислення складових виразу (6.1) аналогічно алгоритму з екстраполяцією по напруженнях. В подальшому даний алгоритм називатимемо **алгоритмом екстраполяції напружень і прирощень переміщень**.

9. Алгоритм екстраполяції повних переміщень. З іншого боку, враховуючи, що змінення напружено-деформованого стану, пов'язане із зміненням конфігурації тріщини від кроку до кроку є незначним, можна за перше наближення розв'язку прийняти повне переміщення попереднього кроку:

$$\{u\}_0^m = \{U\}^{m-1}. \quad (9.1)$$

На першій ітерації прирощення напруження обчислюється за повним переміщенням попереднього кроку:

$$\{\Delta\sigma\}_1^m = f(\{U\}^{m-1}), \quad (9.2)$$

а на наступних ітераціях:

$$\{\Delta\sigma\}_n^m = f(\{U\}_{n-1}^m). \quad (9.3)$$

Отримані на останній ітерації кроку m ($m=2,3\dots M$) напруження і переміщення є повними напруженнями і переміщеннями для тіла з тріщиною розмірами l_m^i :

$$\{\sigma\}_N^m = \{\Delta\sigma\}_N^m, \quad (9.4)$$

$$\{U\}^m = \{u\}_N^m. \quad (9.5)$$

Таким чином виключається похибка, що утворюється внаслідок накопичення переміщень від кроку до кроку за формулою вигляду (7.3). Цей варіант алгоритма будемо називати алгоритмом з **екстраполяцією повних переміщень**.

10.Ефективність алгоритмів при визначенні граничного ресурсу.

Для дослідження ефективності запропонованих модифікацій алгоритму визначення параметрів напружено-деформованого стану при моделюванні росту тріщини при визначенні граничного ресурсу було розглянуто задачу про розвиток тріщини в пластині скінчених розмірів до повного вичерпання ресурсу.

Аналіз результатів, отриманих в межах розмірів тріщини, при яких розглядувана задача може розглядатись, як задача про зростання тріщини в нескінченній пластині засвідчив, що всі запропоновані варіанти алгоритмів дозволяють отримати практично однакові результати (рис. 19). Така збіжність результатів спостерігається до досягнення тріщиною співвідношення із стороною пластини $1/5$ ($N=3 \times 10^8$ рис.19). Подальше розв'язання задачі для пластини скінчених розмірів свідчить, що при застосуванні алгоритму з екстраполяцією по напруженнях та з екстраполяцією по напруженнях і прирощеннях переміщень відбувається накопичення похибки, в результаті чого обчислення граничного ресурсу з достатньою точністю неможливе.

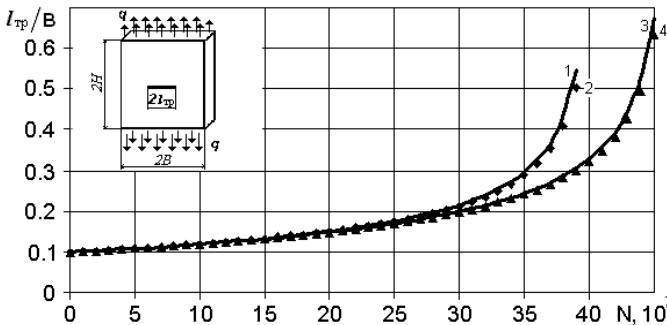


Рис. 19. Моделювання росту тріщини за алгоритмами з екстраполяцією: 1 – по напруженнях (п.7), 2 – по напруженнях і прирощеннях переміщень (п.8), 3 – по повних переміщеннях (п.9). 4 – без екстраполяції (п.6)

Для оцінки зменшення обчислювальних витрат алгоритму з екстраполяцією по повних переміщеннях із застосуванням екстраполяції повних переміщень було проведено порівняння кількості ітерацій *iter* необхідних для розв'язку задачі з однаковою похибкою визначення довжини тріщини і без екстраполяції, а також з екстраполяцією переміщень в залежності від кроку величини ΔN (рис. 20).

Як видно, алгоритм з екстраполяцією повних переміщень дозволяє зменшити обчислювальні витрати приблизно в 5 разів при досить точному обчисленні КІН.

11. Визначення граничного ресурсу призматичного тіла скінчених розмірів з еліптичною тріщиною. Розроблений алгоритм був застосований до розв'язання задачі про розвиток еліптичної тріщини в призматичному тілі до повного вичерпання несучої здатності. Оскільки об'єкт має три площини симетрії, розраховувалась одна восьма частина тіла, скінчено-елементна розбивка якої показана на рис. 3. Переріз тіла z^1-z^2 , в якому розташована поверхня тріщини, закріпленій вздовж напрямку z^3 (крім площини тріщини, позначеної сірим кольором). Характеристики матеріалу: $b = 4$, $C = 1.63 \times 10^{-10}$. В роботі [9] розвиток тріщини розглядався до моменту, коли конфігурація фронту прийме вигляд кола ($N = 3 \times 10^9$). Аналогічний розв'язок був отриманий в роботі [2] на основі НМСЕ.

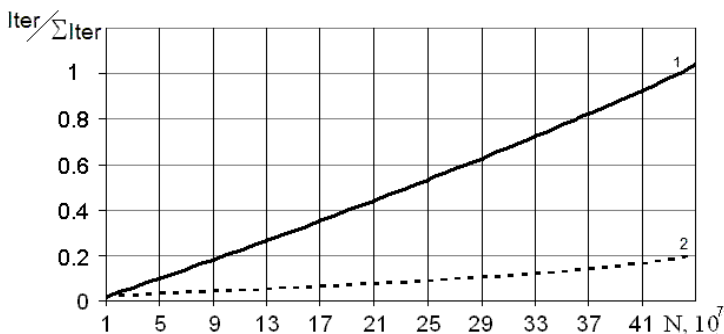


Рис. 20.

1- без екстраполяції, 2 - з екстраполяцією повних переміщень

На відміну від [2], розв'язок задачі було продовжено після набуття тріщиною форми кола. Зміна конфігурації фронту тріщини при розрахунку за алгоритмом з екстраполяцією по повних переміщеннях наведена на рис. 21. Як видно, досягнена тріщиною форма кола зберігається при подальшому розвитку тріщини.

Залежність довжини тріщини в напрямку вісей z^1 та z^2 від кількості циклів навантаження наведено на рис.

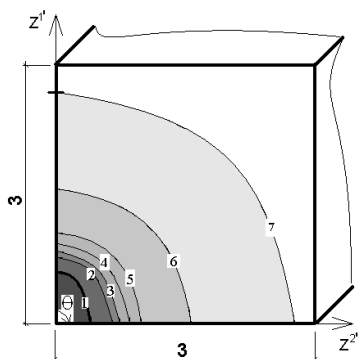


Рис. 21. Конфігурація фронту тріщини після N циклів навантаження: 1- початкова тріщина ($N=0$); 2 - $N=16 \cdot 10^8$; 3 - $N=20 \cdot 10^8$; 4 - $N=24 \cdot 10^8$; 5 - $N=32 \cdot 10^8$; 6 - $N=48 \cdot 10^8$; 7 - $N=56 \cdot 10^8$.

22. На даному графіку результати розрахунку без екстраполяції та при екстраполяції повних переміщень співпадають. Для оцінки зменшення обчислювальних витрат було проведено порівняння кількості ітерацій в залежності від кількості циклів прикладеного навантаження при різних алгоритмах (рис. 23). Як бачимо кількість ітерацій при застосуванні екстраполяції повних переміщень значно зменшується порівняно із випадком застосування алгоритму без екстраполяції при тій же точності результатів.

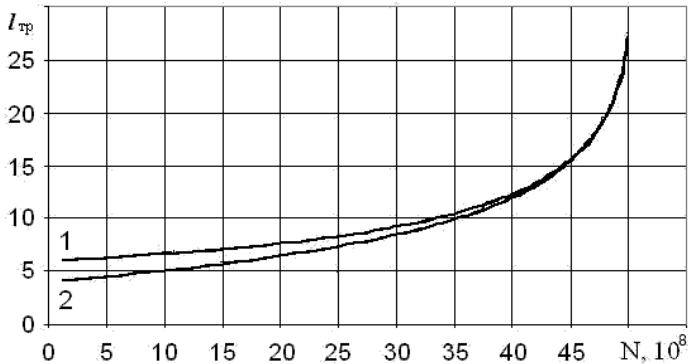


Рис. 22. Змінення характерних розмірів тріщини вздовж напівосей:

1 – в напрямку осі z^2 , 2 – в напрямку осі z^1

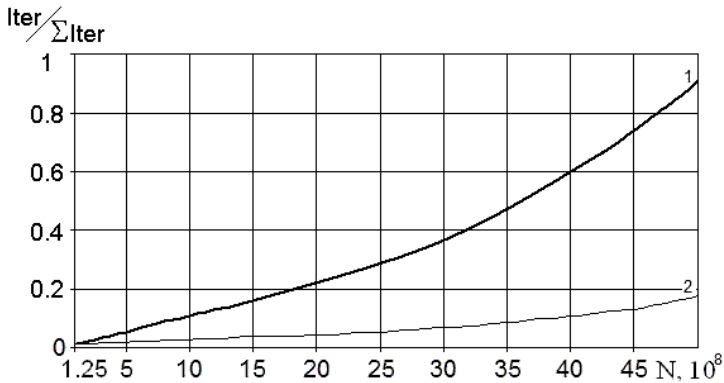


Рис. 23. Кількість ітерацій при розв'язанні задачі:

1 – без екстраполяції; 2 – з екстраполяцією повних переміщень.

12. Визначення граничного ресурсу циліндра з внутрішньою радіальною тріщиною. Для дослідження можливості застосування запропонованого алгоритму моделювання росту тріщини при визначенні граничного ресурсу в тілах обертання було розглянуто задачу про розвиток внутрішньої радіальної тріщини в циліндрі до повного вичерпання ресурсу. Вихідні дані: $R_0 = 100$ мм, $t = 25$ мм, $q = 1$ кг/см². Розрахункова схема і дискретні моделі МСЕ і НМСЕ наведені на рис. 24.

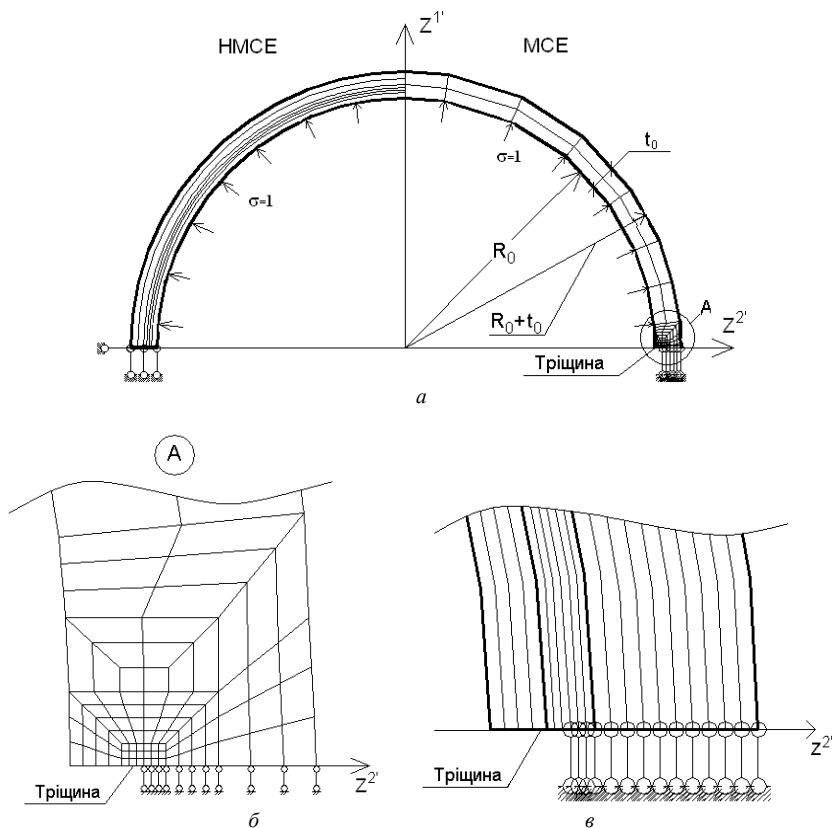


Рис. 24.

а) розрахункові схеми МСЕ та НМСЕ.

б, в) дискретні моделі в привершинній області МСЕ та НМСЕ

Отримані із використанням МСЕ і НМСЕ К-гаріровки добре узгоджуються (рис. 25).

Зміна довжини тріщини при розрахунку за алгоритмом з екстраполяцією по повних переміщеннях наведена на рис. 26.

Як бачимо, результати розрахунку без екстраполяції та при екстраполяції по повних переміщеннях співпадають. При довжині тріщини $l_{mp} = 0,8$ см, що відповідає співвідношенню довжини тріщини до товщини циліндра $l_{mp}/t = 0,3$, ресурс тіла є практично вичерпаним. Кількість обчислювальних витрат при застосуванні алгоритму з апроксимацією по повних переміщеннях значно зменшується.

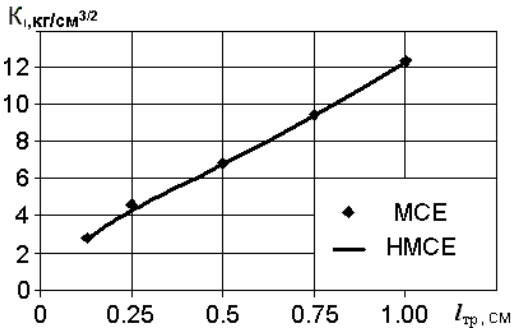


Рис. 25. К-тарировка для радіальної тріщини в циліндрі

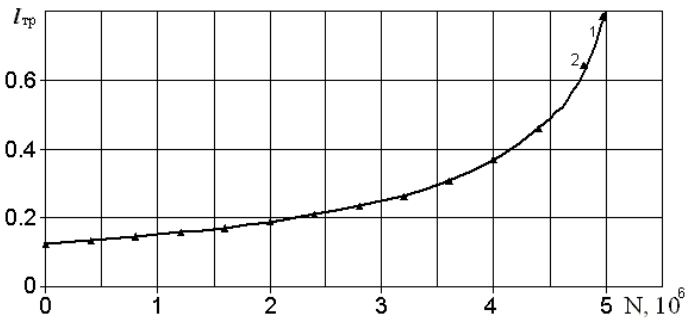


Рис. 26. Моделювання росту тріщини за алгоритмами:

1 – без екстраполяції; 2 – з екстраполяцією повних переміщень.

Висновок. В даній роботі розглянуто питання про створення методики скінченоелементного визначення граничного ресурсу тіл з тріщинами, що визначається моментом досягнення тріщиною розмірів, суворимірих із характерними розмірами тіла та початком лавиноподібного зростання тріщини. Проведено розробку і дослідження ефективності алгоритмів, що ґрунтуються на екстраполяції розв'язку задачі, отриманого на попередніх

кроках на наступні кроки за різними параметрами напружено-деформованого стану. На основі розв'язання низки задач про розвиток тріщин в прямокутній пластині, тілі з еліптичною тріщиною та радіальної тріщини в циліндрі показано, що на етапі моделювання розвитку тріщини, розміри якої є набагато меншими, ніж розмір тіла, всі алгоритми мають майже однакову ефективність і вірогідність. При наближенні розмірів тріщини до граничних, алгоритми, що ґрунтуються на накопиченні отриманих від кроку до кроку величин напружень або переміщень, не дозволяють отримати вірогідні результати. Запропонований в статті алгоритм екстраполяції повних переміщень є вільним від зазначеного недоліку і надає змогу отримувати вірогідні результати із мінімальними обчислювальними витратами.

1. *Баженев В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298с.
2. *Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкріль О.О.* Алгоритм моделювання розвитку тріщини в просторових тілах із застосуванням напіваналітичного метода скінченних елементів// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2004. – Вип. 75. – С. 13-26.
3. *Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкріль О.О.* Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в призматичних тілах з тріщинами. //Опір матеріалів і теорія споруд. – К., 2003.- Випуск .74. с.73-82.
4. *Кушніренко Т.А., Шайдерман А.Е.* Определение долговечности конструкции при численном моделировании роста усталостной трещины. //Сопrotивление материалов и теория сооружений. – К., 1994.- Выпуск 61.- с.92-97.
5. *Пискунов С.О., Шкріль О.О., Мицюк С.В.* Визначення параметрів лінійної механіки руйнування для неоднорідних кругових тіл// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2006. – Вип. 80. – С. 9-22.
6. *Плацинская А.В.* К задаче моделирования усталостного разрушения пластин с центральной трещиной при одноосном нагружении: Тр. НГАСУ. 2002.5, №1, с.22-31.
7. *Саврук М.П.* Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие, т.2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.:Наук. думка, 1988.-620с.
8. *Троценко В.Т., Покровский В.В., Прокопенко А.В.* Трещиностойкость металлов при циклическом нагружении. – К.:Наук. думка, 1987.-257с.
9. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. –640с.
10. *Cisilino A.P., Aliabadi M.H.* Three-dimensional boundary element analysis of fatigue crack growth in linear and non-linear fracture problems: Eng. Fract. Mech. 1999. 63, №6, с.713-733.
11. *Sharan Shailendra K.* Elasto-plastic finite element analysis of a crack in an infinite plate: Int. J. Fract. 2000. 103, №2, с.163-176.
12. *Yonglin Xu* Self-similar crack expansion method for twodimensional cracks under mixed mode loading conditions: Eng. Fract. Mech.- 1998. – 59, №2. – с.165-182.