

УДК 539.3

Ю.В. Ворона, канд. техн. наук

А.А. Козак

О.С. Черненко

МЕТОДИКА ЧИСЕЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ АНТИПЛОСКИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ МАСИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

На основі співвідношень методу потенціалу побудовано чисельний алгоритм для розв'язання задачі про нестационарні антиплоскі коливання пружних масивів, послаблених отворами. Розв'язана тестова задача про динамічний деформований стан пружного простору з циліндричним отвором кругового перерізу та модельна задача про коливання простору з двома отворами.

Розглянемо нестационарні коливання пружного масиву, обмеженого циліндричною поверхнею, до границі якої раптово прикладаються навантаження, рівномірно розподілені по довжині твірних. Будемо вважати, що в масиві реалізується стан антиплоскої деформації. В такому разі єдиною відмінною від нуля компонентою вектора переміщень є компонента $u_3(x_1, x_2, t)$ (вважається, що вісь циліндра співпадає з віссю x_3). За відсутності об'ємних сил деформований стан тіла описується двовимірним хвильовим рівнянням

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де через C позначена швидкість зсувної хвилі – $C = \mu/\rho$, ρ – густина матеріалу, μ – модуль зсуву. Початковими умовами задаються значення переміщень $u_0(x_1, x_2)$ та швидкостей $\dot{u}_0(x_1, x_2)$ в момент часу $t_0=0$. Розрахунковою областю Ω є переріз циліндру площиною, перпендикулярною осі x_3 . На частині границі Γ_u розрахункової області в кожний момент часу відомі переміщення, а на іншій частині границі Γ_q – граничні напруження $q(y_1, y_2, t)$; $\bar{y}\{y_1, y_2\} \in \Gamma$. Оскільки в подальшому йдеться виключно про переміщення в напрямку осі x_3 , то будемо опускати нижній індекс "3" і позначати цю скалярну величину як $u(x_1, x_2, t)$.

Існують два підходи до чисельного розв'язання динамічної задачі. Перший з них пов'язаний із поданням розв'язку у вигляді суперпозиції незв'язаних між собою гармонійних коливань, а другий – з безпосереднім

інтегруванням рівняння (1). Зауважимо, що розв'язання динамічної задачі в частотному просторі доцільно в тих випадках, коли зовнішні навантаження, а слідом за ними і реакція пружної системи є періодичними, або близькими до таких. Хоча при неперіодичному навантаженні за допомогою перетворення Фур'є перехід в частотний простір також є теоретично можливим, але трудомісткість зворотного перетворення дуже часто стає значною перешкодою (більш значною, ніж безпосереднє інтегрування за часовою координатою) на шляху практичної реалізації вказаного підходу. Крім того, якщо мова йде про детальне дослідження НДС в початковій фазі перехідного процесу при навантаженні, яке змінюється з часом досить швидко, то застосування алгоритмів розв'язання задачі в часовій області є безальтернативним.

У разі, коли об'єктом досліджень є параметри НДС, локалізовані в околі відомих концентраторів, для чисельного розв'язання задачі може бути успішно застосований метод потенціалу. При так званому прямому формулюванні методу в якості алгоритмічної основи зазвичай використовують граничний аналог узагальненої формули Соміліани [1], який за відсутності об'ємних сил та нульових початкових умов може бути записаний наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(\bar{x}_0, t) = & \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} U(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) q(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau - \\ & - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} T(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) u(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\bar{x}_0 \in \Gamma$; $U(\bar{x}_0, \bar{y}, t)$ – фундаментальний розв'язок задачі [2],

$$U(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) = \frac{C}{2\pi\mu [C^2 t^2 - r(\bar{x}_0, \bar{y})^2]^{1/2}} H[Ct - r(\bar{x}_0, \bar{y})], \quad (3)$$

$r(\bar{x}_0, \bar{y}) = |\bar{y} - \bar{x}_0|$ – відстань між точками \bar{x}_0 і \bar{y} ; $H(Ct - r)$ – функція Хевісайда, наявність якої у виразі (3) пояснюється тим, що при $Ct < r$ функція $U(r, t)$ повинна дорівнювати нулю, оскільки збурення, викликане дією миттєвих одиничних імпульсів, що мали місце в точці \bar{y} в моменті часу, ще не дійшли до точки \bar{x} в момент часу t . Узагальнена похідна фундаментального розв'язку має вигляд:

$$T(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) = \mu \frac{\partial U(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau)}{\partial n} =$$

$$= \frac{C}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{r}{(C^2 t^2 - r^2)^{3/2}} H(Ct - r) + \frac{1}{(C^2 t^2 - r^2)^{1/2}} \frac{\partial H(Ct - r)}{\partial r} \right]. \quad (4)$$

З точки зору чисельної реалізації більш зручним є інтегральні рівняння, ядра яких не містять похідних функцій Хевісайда. Таке рівняння можна отримати, якщо скористатися наступною очевидною залежністю

$$\frac{\partial H[C(t - \tau) - r]}{\partial r} = \frac{1}{C} \frac{\partial H[C(t - \tau) - r]}{\partial \tau},$$

та перетворити другий інтеграл в правій частині рівняння (2) за допомогою інтегрування частинами. В результаті отримаємо наступне співвідношення [3]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(\bar{x}_0, t) &= \iint_{0\Gamma}^{t^+} U(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) q(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau - \\ &- \iint_{0\Gamma}^{t^+} V(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) u(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau + \frac{1}{C} \iint_{0\Gamma}^{t^+} \frac{\partial r}{\partial n} U(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) \dot{u}(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$V(\bar{x}_0, \bar{y}, t) = \frac{C}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{C(r - Ct)}{(C^2 t^2 - r^2)^{3/2}} H(Ct - r). \quad (6)$$

Вирази (2) і (5) являють собою гранично-часове інтегральне рівняння (ГЧІР) відносно незаданих граничними умовами переміщень $u(\bar{y}, t)$ та напружень $q(\bar{y}, t)$ в точках $\bar{y} \in \Gamma$. Зауважимо, що інтеграли в правих частинах виразів (2) і (5) є сингулярними і розуміються за Коші.

Якщо характер залежності від часу функцій $u(\bar{y}, t)$ та $q(\bar{y}, t)$ є відомим, то інтегрування по часовій координаті може бути виконане в аналітичному вигляді. Наприклад, якщо в точках границі задані навантаження у вигляді добутку

$$q(\bar{y}, t) = Q(\bar{y})f(t),$$

де функція часу $f(t)$ відповідає трапецеїдальному імпульсу тривалістю T секунд, визначеному наступним чином:

$$f(t) = \begin{cases} t/t_1, & \text{якщо } 0 \leq t < t_1, \\ 1, & \text{якщо } t_1 \leq t < t_2, \\ (T-t)/(T-t_2), & \text{якщо } t_2 < t \leq T, \\ 0, & \text{якщо } t < 0 \text{ або } t > T, \end{cases} \quad (7)$$

то перший з інтегралів в правій частині (5) набуде такого вигляду:

$$\int_{\Gamma} \int_0^{t^+} U(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) q(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau = \\ = \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} \frac{q(\bar{y}, t) CH[C(t - \tau) - r]}{2\pi\mu[C^2(t - \tau)^2 - r^2]^{1/2}} d\tau d\Gamma = \frac{1}{2\pi\mu} \int_{\Gamma} Q(\bar{y}) P(r, t) d\Gamma, \quad (8)$$

причому вираз підінтегральної функції $P(r, t)$ залежить від того, яке саме збурення вже здолало відстань $r(\bar{x}_0, \bar{y})$ та дійшло до точки \bar{x} із точки \bar{y} в розглядуваний момент часу, тобто

$$P(r, t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } r \geq Ct, \\ B_1(t, 0, t - r/C, r)/t_1, & \text{якщо } t > r/C \geq (t - t_1), \\ B_1(t, 0, t_1, r)/t_1 + \\ \quad + B_0(t, t_1, t - r/C, r), & \text{якщо } (t - t_1) > r/C \geq (t - t_2), \\ B_1(t, 0, t_1, r)/t_1 + B_0(t, t_1, t_2, r) + TB_0(t, t_2, t - r/C, r)/(T - t_2) - \\ \quad - B_1(t, t_2, t - r/C, r)/(T - t_2), & \text{якщо } (t - t_2) > r/C \geq (t - T), \\ B_1(t, 0, t_1, r)/t_1 + B_0(t, t_1, t_2, r) + t_3 B_0(t, t_2, T, r)/(T - t_2) - \\ \quad - B_1(t, t_2, T, r)/(T - t_2), & \text{якщо } r < C(t - T), \end{cases} \quad (9)$$

де

$$B_1(t, \alpha, \beta, r) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{C\tau d\tau}{\sqrt{C^2(t - \tau)^2 - r^2}} = t \ln \left[\frac{C(t - \alpha) + \sqrt{C^2(t - \alpha)^2 - r^2}}{C(t - \beta) + \sqrt{C^2(t - \beta)^2 - r^2}} \right] + \\ + \frac{1}{C} \left[\sqrt{C^2(t - \beta)^2 - r^2} - \sqrt{C^2(t - \alpha)^2 - r^2} \right], \quad (10)$$

$$B_1(t, 0, t - r/C, r) = t \ln \left[\frac{Ct + \sqrt{C^2 t^2 - r^2}}{r} \right] - \frac{\sqrt{C^2 t^2 - r^2}}{C}, \quad (11)$$

$$B_0(t, \alpha, \beta, r) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{C d\tau}{\sqrt{C^2(t - \tau)^2 - r^2}} = \ln \left[\frac{C(t - \alpha) + \sqrt{C^2(t - \alpha)^2 - r^2}}{C(t - \beta) + \sqrt{C^2(t - \beta)^2 - r^2}} \right], \quad (12)$$

$$B_0(t, \alpha, t - r/C, r) = \ln \left[\frac{C(t - \alpha) + \sqrt{C^2(t - \alpha)^2 - r^2}}{r} \right]. \quad (13)$$

Якщо ж залежність навантаження від часу має параболічний характер, тобто

$$f(t) = \begin{cases} 4t(T-t)/T^2, & \text{якщо } 0 \leq t < T, \\ 0, & \text{якщо } t < 0 \text{ або } t > T, \end{cases} \quad (14)$$

то підінтегральна функція $P(r, t)$ у рівності (8) визначається наступним чином:

$$P(r, t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } r \geq Ct, \\ \frac{4}{T^2} B_2(t, t-r/C, r) - \\ \quad - \frac{4}{T} B_1(t, 0, t-r/C, r), & \text{якщо } t > r/C \geq (t-T), \\ \frac{4}{T^2} B_2(t, T, r) - \frac{4}{T} B_1(t, 0, T, r), & \text{якщо } r < C(t-T), \end{cases} \quad (15)$$

де

$$B_2(t, \beta, r) = \int_0^\beta \frac{C\tau^2 d\tau}{\sqrt{C^2(t-\tau)^2 - r^2}} = \\ \frac{1}{2C^2} \left\{ (2C^2t^2 + r^2) \ln \left[\frac{Ct + \sqrt{C^2t^2 - r^2}}{C(t-\beta) + \sqrt{C^2(t-\beta)^2 - r^2}} \right] + \right. \\ \left. + C(3t+T) \left[\sqrt{C^2(t-\beta)^2 - r^2} - 3Ct\sqrt{C^2t^2 - r^2} \right] \right\}, \quad (16)$$

$$B_2(t, t-r/C, r) = \frac{1}{2C^2} \left\{ (2C^2t^2 + r^2) \ln \left[\frac{Ct + \sqrt{C^2t^2 - r^2}}{r} \right] - \right. \\ \left. - 3Ct\sqrt{C^2t^2 - r^2} \right\}. \quad (17)$$

Цілком аналогічно при відомому вигляді або заданій апроксимації функції $u(\vec{y}, t)$ можна виконати аналітичне інтегрування за часом другого і третього доданків в правій частині рівності (5). Якщо на k -му часовому відрізьку задана функція форми $\eta_k(t)$, то ніщо не заважає записати:

$$Z_k(\bar{x}_0, \bar{y}, t) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\eta_k(\tau) V(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) - \dot{\eta}_k(\tau) \frac{1}{C} \frac{\partial r}{\partial n} U(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) \right] d\tau.$$

Для функцій форми, які відповідають кусково-лінійній залежності граничних переміщень від часу, результат інтегрування наведений в [3].

Розглянемо задачу про симетричне навантаження кругового циліндричного отвору граничними навантаженнями $q_R(t) = Q_R f(t)$. Завдяки симетрії деформованого стану ГЧП відносно невідомих граничних переміщень $u(\bar{x}_0, t_n) = u_R(t_n)$ в заданий момент часу t_n може бути записане у вигляді

$$u_R(t_n) \left[\frac{1}{2} + \int_{\Gamma} Z_n(\bar{x}_0, \bar{y}, t_n) d\Gamma_y \right] = Q_R \int_{\Gamma} P(r, t_n) d\Gamma_y - \sum_{m=1}^{n-1} u_R(t_m) \int_{\Gamma} Z_m(x_0, y, t_n) d\Gamma_y. \quad (18)$$

Рівняння (18) розв'язується кроковим методом. В момент часу t_1

$$\left[\frac{1}{2} + \int_{\Gamma} Z_1(\bar{x}_0, \bar{y}, t_1) \Gamma_y \right] u_R(t_1) = Q_R \int_{\Gamma} P(r, t_1) d\Gamma_y,$$

в момент t_2

$$\left[\frac{1}{2} + \int_{\Gamma} Z_2(\bar{x}_0, \bar{y}, t_2) \Gamma_y \right] u_R(t_2) = Q_R \int_{\Gamma} P(r, t_2) d\Gamma_y - u_R(t_1) \int_{\Gamma} Z_1(\bar{x}_0, \bar{y}, t_2) d\Gamma_y,$$

в момент t_3

$$\left[\frac{1}{2} + \int_{\Gamma} Z_3(\bar{x}_0, \bar{y}, t_3) \Gamma_y \right] u_R(t_3) = Q_R \int_{\Gamma} P(r, t_3) d\Gamma_y - u_R(t_1) \int_{\Gamma} Z_1(\bar{x}_0, \bar{y}, t_3) d\Gamma_y - u_R(t_2) \int_{\Gamma} Z_2(\bar{x}_0, \bar{y}, t_3) d\Gamma_y,$$

і т.д.

Ця задача може бути розв'язана також і за допомогою переходу в частотний простір. Для цього навантаження, прикладене до границі отвору $q_R(t)$, будемо вважати імпульсно-періодичним, що дозволяє розкласти його в ряд Фур'є:

$$q_R(t) = Q_R \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^K f_k \exp(-i\omega_k t) \right], \quad (19)$$

де $\omega_k = k \frac{2\pi}{T_0}$, T_0 – проміжок часу між початковими моментами сусідніх імпульсів. Зазначимо, що чим більшим є період T_0 , тим меншим є вплив попередніх імпульсів, і тим точніше може бути визначена реакція на одиничний імпульс.

Переміщення всередині розрахункової області на відстані r від центру також подаються у вигляді ряду Фур'є

$$u(r, t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^K u_k(r) \exp(-i\omega_k t) \right], \quad (20)$$

причому компоненти розвинення $u_k(r)$ підпорядковані рівнянню Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2} + \frac{\omega_k^2}{C^2} u_k = 0 \quad (21)$$

та граничній умові

$$-\mu \frac{\partial u_k}{\partial r} \Big|_{r=R} = Q_R f_k. \quad (22)$$

Оскільки загальний вигляд розв'язку рівняння Гельмгольца при осьовій симетрії є відомим [4]:

$$u_0(r) = A_0 \frac{1}{r}; \quad u_k(r) = A_k H_0^{(1)} \left(\frac{\omega_k r}{C} \right), \quad k=1, \dots, K, \quad (23)$$

то за допомогою диференціювання та умови (22) неважко знайти, що

$$A_0 = f_0 \frac{Q_R R^2}{\mu}, \quad A_k = f_k \frac{Q_R C}{\mu \omega_k} \frac{1}{\left[H_1^{(1)} \left(\frac{\omega_k R}{C} \right) \right]},$$

після чого розвинення (20) перетворюється на

$$u(r, t) = f_0 \frac{Q_R R^2}{\mu r} + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^K f_k \frac{Q_R C}{\mu \omega_k} \frac{H_0^{(1)} \left(\frac{\omega_k r}{C} \right)}{\left[H_1^{(1)} \left(\frac{\omega_k R}{C} \right) \right]} \exp(-i\omega_k t) \right]. \quad (24)$$

Подання (24) дозволяє знайти переміщення із наперед заданою точністю в будь-якій точці розрахункової області. Зокрема, на границі отвору маємо

$$u(R, t) = -f_0 \frac{Q_R R \ln R}{\mu} + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^K f_k \frac{Q_R C}{\mu \omega_k} \frac{H_0^{(1)}\left(\frac{\omega_k R}{C}\right)}{H_1^{(1)}\left(\frac{\omega_k R}{C}\right)} \exp(-i\omega_k t) \right]. \quad (25)$$

Чисельне розв'язування задачі було виконано для матеріалу з характеристиками $\mu = 4 \cdot 10^7$ Па, $\rho = 2000$ кг/м³ при трьох різновидах імпульсного навантаження. В першому варіанті навантаження являло собою трапецеїдальний імпульс $q_R(t)$ тривалістю $T = \pi$ секунд, визначений рівністю (7). Радіус отвору R дорівнював 3м. Дані, наведені на рис.1, свідчать про досить повільну збіжність результатів розрахунку при збільшенні кількості гармонік в розвиненні навантаження. Так максимальне значення нормованого переміщення $u_R(t)\mu/(Q_R R)$ при чотирьох гармоніках становило 4.35, при восьми гармоніках – 4.66, при двадцяти чотирьох – 4.86, а при ста п'ятдесяти – 4.96.

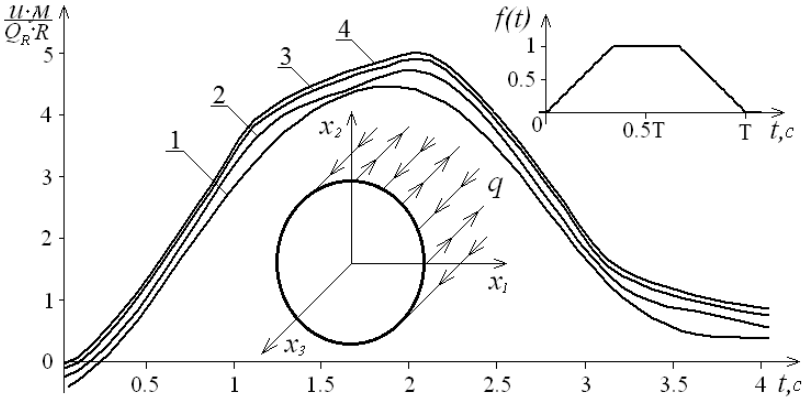


Рис. 1. Реакція системи на імпульс трапецеїдальної форми

Далі при збільшенні кількості складових змін значення переміщення стає майже непомітною (значення нормованого переміщення при врахуванні п'ятиста гармонік становило 4.97), що дозволяє вважати останній результат точним. Зазначимо, що максимум переміщення, отриманого в результаті розв'язку рівняння (18), становить 5.01, що відповідає похибці 0.74%. При цьому час, витрачений на розв'язання задачі при використанні чотирьох гармоніках перевищував час розв'язку рівняння (18) майже вдвічі, що пов'язано зі складністю обчислення функцій Ханкеля. Отже, алгоритм розв'язання задачі, який базується на

системах рівнянь (18), при навантаженні одиничним імпульсом є значно ефективнішим за алгоритм, що використовує перехід в частотну область.

Аналогічні результати були отримані, при дослідженні реакції на дію симетричного трикутного імпульсу, вираз для якого отримуємо із трапецеїдального, поклавши $t_1=t_2=0.5T$.

В цьому випадку максимальне значення нормованого переміщення при чотирьох гармоніках становило 3.66, при восьми гармоніках – 3.91, при двадцяти чотирьох – 4.01, при ста п'ятдесяти – 4.09, а при п'ятиста – 4.096 (рис.2).

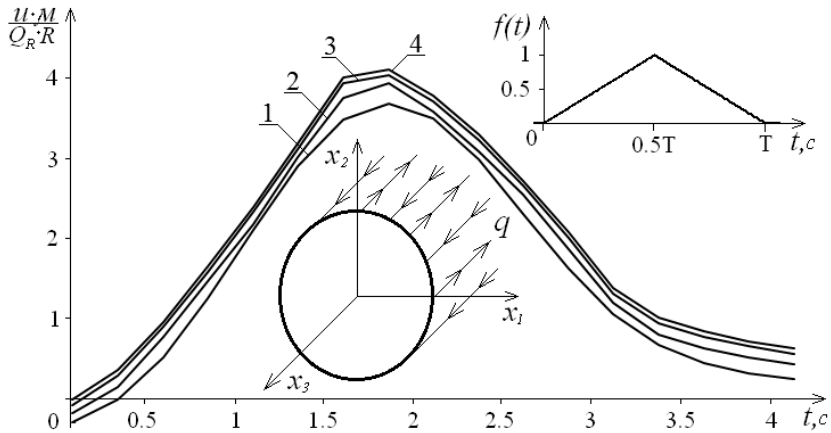


Рис. 2. Реакція системи на імпульс трикутної форми

Подальше уточнення результату при збільшенні членів ряду Фур'є виявляється непомітними, що дозволяє вважати останнє значення точним. В той самий час, максимум нормованого переміщення, отриманого як розв'язок рівняння (18), становить 4.132, що відповідає похибці 0.89%.

Нарешті, була розв'язана задача про коливання масиву, границя якого піддається дії параболічного імпульсу тривалістю $T=\pi$ секунд (вираз (8)). Максимальне значення нормованого переміщення при чотирьох гармоніках становило 4.2, при восьми – 4.43, при двадцяти чотирьох – 4.6, при ста п'ятдесяти – 4.69, а при п'ятиста – 4.706 (рис. 3). Водночас, максимум нормованого переміщення, отриманого в результаті розв'язку рівняння (18), дорівнював 4.744, що відповідає похибці 0.79%.

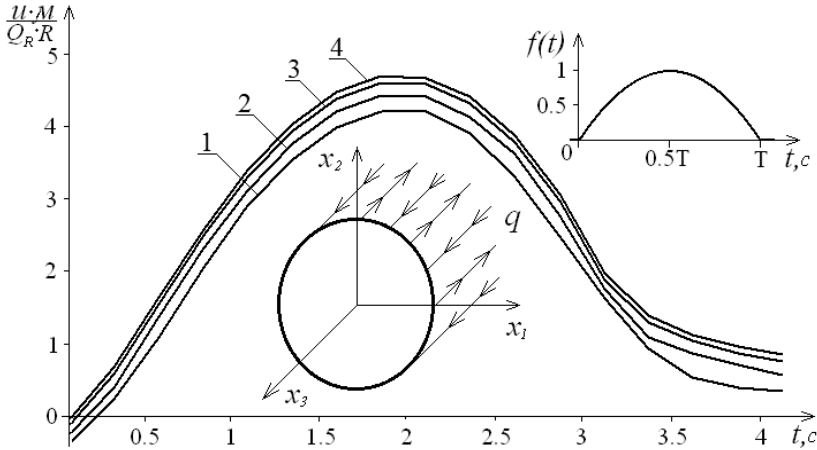


Рис. 3. Реакція системи на імпульс параболічної форми

Таким чином, наведені результати чисельних розрахунків переконливо свідчать про високу точність та ефективність даних, отриманих за допомогою розробленої гранично-елементної методики аналізу антиплоских нестационарних пружних коливань, спричинених дією одиначного імпульсу.

Більш складною є задача за відсутності центральної симетрії. В такому разі на кожному кроці за часом необхідно застосовувати загальну процедуру методу граничних елементів (МГЕ), тобто розбивати границю на окремі ділянки відомої геометрії та приймати гіпотезу про характер зміни переміщень в межах кожного елемента. В даній роботі використано варіант МГЕ, який базується на поданні границі у вигляді сукупності дуг кола (граничних елементів), в межах кожного з яких в певний момент часу невідомі переміщення вважаються постійними. В результаті такої заміни інтегральне рівняння (18) перетворюється на алгебраїчне:

$$\left[\frac{1}{2} u(\bar{x}_i, t_n) + \sum_{k=1}^K u(\bar{x}_k, t_n) \int_{\Delta\Gamma_k} Z_n(\bar{x}_i, \bar{y}, t_n) d\Gamma_y \right] = Q_R \int_{\Gamma} P(\bar{x}_i, y, t_n) d\Gamma_y - \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=1}^K u(\bar{x}_k, t_m) \int_{\Delta\Gamma_k} Z_m(\bar{x}_i, \bar{y}, t_n) d\Gamma_y, \quad (26)$$

де через $\Delta\Gamma_k$ позначена область, яку займає k -й ГЕ, K – загальна кількість елементів.

Послідовно розміщуючи точку \bar{x}_i в геометричних центрах граничних елементів, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих переміщень в зазначених точках. Коефіцієнтами системи є інтеграли $\int_{\Delta\Gamma_k} Z_m(\bar{x}_i, \bar{y}, t_n) d\Gamma_y$, які в більшості випадків можна обчислити

чисельно за квадратурними формулами. На перший погляд, випадки, коли $i = k$ та $m = n$, тобто інтегрування як по часовій, так і по просторовій координаті здійснюється по тому самому відрізку, на якому розташована точка спостереження, становлять виключення. В такому разі підінтегральний вираз набуває вигляду [3]:

$$Z_n(\bar{x}_i, \bar{y}, t_n) = -\frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{2\pi C\Delta t} \frac{\sqrt{(C\Delta t)^2 - r(\bar{x}_i, \bar{y})^2}}{r(\bar{x}_i, \bar{y})}. \quad (27)$$

З урахуванням того, що точки \bar{x}_i та \bar{y} знаходяться на дузі кола, будемо мати

$$r(\bar{x}_i, \bar{y}) = 2R \sin(\varphi/2); \quad \frac{\partial r}{\partial n} = \sin(\varphi/2); \quad d\Gamma_y = R d\varphi, \quad (28)$$

де R – радіус кола, φ – центральний кут, який спирається на дугу, обмежену точками \bar{x}_i та \bar{y} .

Тепер вираз (27) можна переписати наступним чином:

$$Z_n(R, \varphi, t_n) = -\frac{1}{4\pi RC\Delta t} \sqrt{(C\Delta t)^2 - 4R^2 \sin^2(\varphi/2)},$$

тобто при переході в більш зручну для інтегрування полярну систему координат особливість підінтегрального виразу зникає, і коефіцієнт системи $\int_{\Delta\Gamma_i} Z_n(R, \varphi, t_n) R d\varphi$ може бути обчислений за звичайною квадратурною формулою.

В правій частині системи (26) також містяться сингулярні інтеграли $\int_{\Gamma} Q(\bar{y}) P(\bar{x}_i, \bar{y}, t_n) d\Gamma_y$, визначення яких при постійній величині множника $Q(\bar{y})$ згідно виразів (11), (13), (17) зводиться до обчислення інтегралу $\int_{\Delta\Gamma_i} \ln r(\bar{x}_i, \bar{y}) d\Gamma_y$. За допомогою співвідношень (28) в полярній системі координат запишемо:

$$\int_{\Delta\Gamma_i} \ln r(\bar{x}_i, \bar{y}) d\Gamma_y = 2 \int_0^{\varphi_1} \ln[2R \sin(\varphi/2)] R d\varphi =$$

$$= 2R \left\{ \ln[2R \sin(\varphi_1/2)]\varphi_1 + 2 \sin(\varphi_1/2) \int_0^1 \frac{\ln(y)}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi_1/2) y^2}} dy \right\}, \quad (29)$$

де φ_1 – половина центрального кута, який спирається на граничні точки елемента.

Інтеграл, який знаходиться в правій частині рівності (29), містить логарифмічну особливість і може бути обчислений за відповідними квадратурними формулами [5].

Отже, отримано повну систему співвідношень, необхідних для побудови чисельного алгоритму, який застосуємо до задачі про динамічний НДС масиву з двома круговими циліндричними отворами радіусу $R=3$ м, один з яких є навантаженим. Навантаження змінюється в часі за трапецеїдальним законом і є постійним вздовж границі отвору. Відстань між центрами отворів l змінювалась в діапазоні від 7 до 12 метрів. Виявилось, що незалежно від відстані між отворами найбільші переміщення виникають в точці, яка розташована на границі навантаженого отвору та лежить на прямій, що з'єднує центри отворів (точка A на рис. 4).

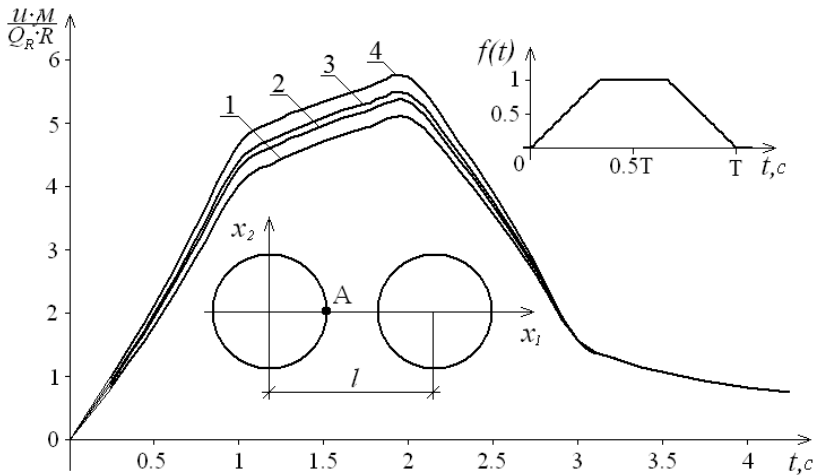


Рис. 4. Залежність від часу найбільших переміщень системи

На вказаному рисунку цифрою 1 позначено графік залежності від часу переміщення в точці A при $l=12$ м. Нормований параметр переміщення $u(\vec{x}, t)\mu / (Q_R R)$ досягав максимального значення в момент

часу $t=2T/3$ і становив 5.06. Зазначимо, що при збільшенні відстані l зміна графіку 1 є майже непомітною. Так, при $l=\infty$ максимальне значення нормованого переміщення дорівнює 5.01. Інша картина спостерігається при зменшенні відстані між отворами. Наприклад, при $l=9\text{м}$ (крива, позначена цифрою 2) $u(\vec{x},t)^{\max}\mu/(Q_R R)=5.31$, при $l=8\text{м}$ (крива 3) $u(\vec{x},t)^{\max}\mu/(Q_R R)=5.43$, а при $l=7\text{м}$ (крива 4) цей параметр мав значення 5.69.

Разом із зменшенням відстані між отворами сильнішою стає нерівномірність розподілу переміщень вздовж границі. На рис. 5 наведені в полярних координатах графіки граничних переміщень в різні моменти часу.

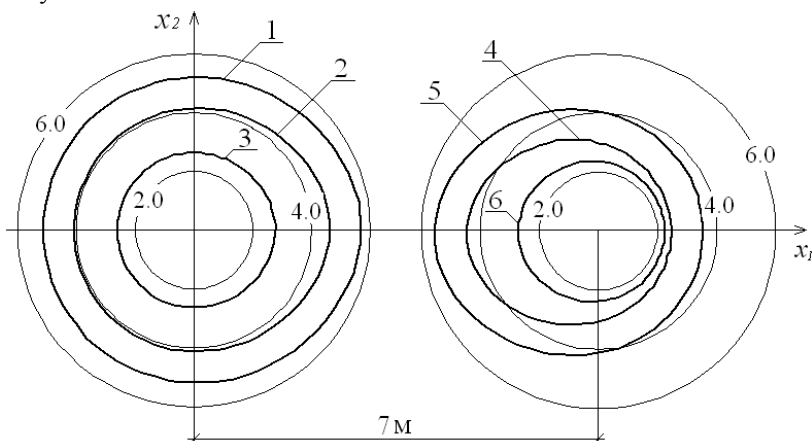


Рис. 5. Розподіл граничних переміщень

Бачимо, що розподіл переміщень на границі навантаженого (лівого) отвору є біль рівномірним. Наприклад, в момент часу $t=2T/3$ (крива 1) параметр переміщення $u(\vec{x},t)\mu/(Q_R R)$ мав максимальне значення 5.69, а мінімальне – 5.14. Водночас на границі ненавантаженого отвору (крива 5) переміщення в цей момент змінювались в діапазоні від 3.52 в найбільш віддаленій від навантаженого контуру точці границі до 5.52 в найближчій точці (рис.5).

Схожа ситуація виникала і в інші моменти часу. Так, при $t=T/3$ на навантаженому отворі (крива 2) параметр переміщення приймав значення від 4.08 до 4.64, а на іншому отворі (крива 4) – значення від 2.45 до 4.46. Нарешті, в момент $t=11T/12$ на навантаженому контурі (крива 3) мали

місце величини параметру переміщень від 2.61 до 2.75, тоді як на границі ненавантаженого отвору (крива б) діапазон зміни переміщень був обмежений значеннями 2.22 та 2.71.

Наведені приклади свідчать про те, що розроблена методика може бути застосована для дослідження нестационарних антиплоских коливань пружних масивів під дією імпульсного навантаження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М.* Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. – Казань: Издательство Казанского университета, 1986. – 296 с.
2. *Морс Ф.М., Феибах Г.* Методы теоретической физики. – М: ИЛ, 1958. – 901 с.
3. *Dominguez J.* Boundary Elements in Dynamics. – Southampton, Boston: Computational Mechanics Publications, 1993.
4. Корн Г., Корн Т., Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М: Наука, 1970. – 720 с.
5. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. – М: Мир, 1984. – 494 с.

Стаття надійшла до редакції 14.08.2011 р.

Vorona Yu.V., Kozak A.A., Chernenko E.S.

МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ АНТИПЛОСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАССИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

На основе соотношений метода потенциала построен численный алгоритм для решения задачи про нестационарные антиплоские колебания упругих массивов, ослабленных отверстиями. Решена тестовая задача о динамическом деформированном состоянии упруго пространства с цилиндрическим отверстием кругового сечения и модельная задача про колебания пространства с двумя отверстиями.

Vorona Yu.V., Kozak A.A., Chernenko O.S.

THE PROCEDURE FOR NUMERICAL ANALYSIS OF SOLIDS ANTIPLANE TRANSIENT OSCILLATIONS

The boundary element technique for analysis of out-of-plane shearing transient vibration of elastic solids with holes is developed. The technique was tested on the problem of an infinite solid with a round cylindrical hole vibration. Oscillations of the solid with two round holes were investigated as well.