УДК 519.21
канд. ф-м. наук, доц. Наголкіна З.І.,
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВПЛИВ ВИПАДКОВИХ ФАКТОРІВ НА ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ БУДІВЕЛЬНИХ ОГОРОДЖУВАЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Досліджуються деякі властивості розв'язку стохастичного рівняння, що моделює процеси тепло-масопереносу в випадково неоднорідному середовищі, яким є в окремих випадках зона використання будівельних огороджувальних конструкцій.

Ключові слова. Огороджувальні конструкції, рівняння теплопровідності, випадкові фактори, стохастичне рівняння, функціональний простір, необмежений оператор, еволюційне рівняння, розв'язок рівняння, мультиплікативне представлення розв'язку.

При використанні огороджувальних будівельних конструкцій виникає необхідність враховувати процеси теплопровідності і спряженого теплообміну, що зумовлене наявністю теплового впливу на зону ґрунтів, що приникають до відповідної конструкції.

Ці процеси є нестаціонарними і описуються загальновідомим рівнянням теплопровідності з граничними умовами

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + Q,$$

де T – температура конструкції, c- теплоємність, ρ - густина, λ - коефіцієнт теплопровідності, Q - потужність теплових джерел.

Вибір матеріалу з відповідними фізичними і тепловими властивостями забезпечує здійснення оптимального теплового режиму при мінімумі теплових затрат. Проте при виконанні теплових розрахунків неможливо нехтувати впливом випадкових факторів, якими є, наприклад, атмосферні температурні коливання. Здебільшого, при достатньо грубих розрахунках випадковість враховується в граничних умовах. При цьому, як правило, беруть середні значення на спряжених поверхнях, крізь які і відбуваються процеси теплообміну.

Але у випадку зони нестійких ґрунтів , де крім теплопереносу ще треба розглядати і масоперенос, вплив випадкових факторів стає більш суттєвим, і тоді доцільно розглядати нестаціонарне рівняння теплопровідності з випадковим збуренням. При певних умовах таку ситуацію можна моделювати стохастичним диференціальним рівнянням в формі Іто в нескінченновимірному функціональному просторі H вигляду

$$du(t) = A(t)u(t)dt + B(t,u(t))dw(t) \qquad (1)$$

де $A(t)u = a(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. $a(t)$ - коефіцієнт, пов'язаний з фізичними властивостями огороджувальної конструкції, $t \in [t_0, T]$ - час, $u(t)$ - розподіл температур (температурне поле) в момент часу t, $x \in G \subset R^1$, $H = L_2(G)$ - простір Гільберта, $u(t) \in H$, $B(t,u)$ - нелінійний коефіцієнт, що характеризує вплив випадкових факторів, $w(t)$ - стандартний вінеровський процес. Оскільки $A(t)$ необмежений оператор знесення, то дослідження існування розв’язку цього рівняння виходить за рамки класичної теорії стохастичних диференціальних рівнянь [1]. Спираючись на деякі факти теорії диференціальних рівнянь в банаховому просторі [2] розглянемо окремо еволюційне рівняння вигляду

$$\frac{du}{dt} = A(t)u(t) \qquad (2)$$

і задачу Коші для нього $u(t_0) = u_0 \in D_A$.

Оператор $A(t)$ - необмежений оператор диференціювання, визначений на підпросторі $D_A \subset H$ щільно вкладеному в H. D_A не залежить від t. Припустимо, що оператор $A(t)$ та його спектр задовольняє всім вимогам, при яких задача Коші рівномірно коректна і породжує двопараметричну сильно неперервну еволюційну сім’ю лінійних операторів [2] $U(t,\tau)$, яка є квазістискаючою, тобто має оцінку

$$\|U(t,\tau)u(\tau)\| \le e^{\alpha(t-\tau)}\| \, u(\tau) \, \| \qquad (3)$$

$U(t,\tau)$ при $t,\tau \in [t_0, T]$ називають розрішаючим оператором рівняння (2). Розглянемо стохастичне інтегральне рівняння в формі Іто

$$u(t) = U(t,t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} U(t,s)B(s,u(s))dw(s) \qquad (4)$$

Це рівняння в деякому розумінні еквівалентне (1), і за певних умов на операторозначний коефіцієнт $B(s,u(s))$ не виходить за рамки класичної теорії стохастичних рівнянь [1] . Сформулюємо ці вимоги на $B(s,u)$. Нехай $B(s,u) \in \gamma_2(H)$ (де $\gamma_2(H)$ - простір операторів Гільберта-Шмідта на Н) і задовольняє оцінкам

$$\sigma_2^2 B(t,u) \le k_1\|u\|^2 + k_2 \qquad (5)$$

$$\sigma_2^2 (B(t,u_1) - B(t,u_2)) \le k_3\|u_1 - u_2\|^2 \qquad (6)$$

де $\sigma_2^2(B) = \sum_{i=1}^{\infty}\|Be_i\|^2$, норма операторів Гільберта-Шмідта в Н, $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ - ортонормований базис в Н.

Окремо розглянемо в Н стохастичне дифузійне рівняння вигляду

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} B(s, y(s))dw(s), \quad y_0 \in H \qquad (7)$$

При виконанні умов (5), (6) існує єдиний розв'язок цього рівняння $y(t)$, який породжує двопараметричну сім'ю $S(t,\tau)$ еволюційних операторів за формулою

$$y(t) = S(t,t_0,y_0) = S(t,t_0)\circ y_0 \qquad (8)$$

Теорема .Нехай $B(t,x)\in\gamma_2(H)$ і задовольняє оцінкам (6),(7) , ф для еволюційної сім'ї операторів має місце (4). Тоді існує єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності випадковий процес $u(t)$, який задовольняє рівнянню (4) і має місце мультиплікативне представлення вигляду

$$u(t) = p-\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n} U(t_{k+1},t_k)S(t_{k+1},t_k)\circ u_0 \qquad (9)$$

Де $\Delta_k t = t_{k+1}-t_k$ - довільне розбиття відрізку$[t_0,T]$ на елементарні. $U(t_{k+1},t_k), S(t_{k+1},t_k)$ відповідно розрішаючі оператори рівнянь (2) і (7) на відрізку $[t_k,t_{k+1}]$.

Формула (9) називається формулою мультиплікативного представлення Далецького-Троттера [3].

Ця формула може служити для наближеного обчислення розв'язку рівняння (1).

Таке покомпонентне множення є поширенням відомого методу дрібних кроків на випадок стохастичного диференціального рівняння.

Література.

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т. 3. Изд. Наука , М,1973г.
2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, Наука, М., 1968г.
3. О мультипликативных представлениях решений уравнений переноса со случайными коэффициентами.Сб. Теплопроводность и конвективный теплообмен. , Наукова думка. 1977г.

Аннотация.

Исследуются некоторые свойства решения стохастического уравнения, которое моделирует процессы тепломассопереноса в случайно неоднородной среде, каковой является в отдельных случаях зона использования строительных ограждающих конструкций.

Annotation.

Some properties of the solution of the stochastic equation are considered. This equation models the heat and mass transfer processes in random non-homogeneous environment, that is an area of the wallings use in construction.