

УДК 514.18; 624.154

Скочко В.І., Скочко Л.О.,
Київський Національний Університет Будівництва і Архітектури

ЗАСТОСУВАННЯ СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВИХ СПІВВІДНОШЕНЬ ДЛЯ НЕРІВНОМІРНОГО РОЗБИТТЯ В ПРОЦЕСІ МОДЕЛЮВАННЯ РОБОТИ ПАЛІ В ҐРУНТІ

В роботі розглядаються деякі принципи та алгоритми застосування методу скінченних різниць в процесі визначення НДС палі у складі підпірної стіни (ПС), при умові нерівномірності розбиття досліджуваної конструкції.

Постановка проблеми. В процесі моделювання напружено-деформованого стану (НДС) цілого ряду будівельних конструкцій, а також при відтворенні багатьох фізичних процесів, в основі яких лежить диференційні залежності між параметрами цих процесів, часто використовують метод скінченних різниць. Найчастіше застосовується регулярне розбиття досліджуваних конструкцій в їх дискретній інтерпретації суцільного континууму. Однак, з метою більшої або меншої деталізації того чи іншого фрагменту (або області) досліджуваного тіла чи процесу, часто виникає необхідність штучно згустити скінченно-різницеву сітку в даній області. Тому розглянемо ті форми, яких набувають вище згадані скінченно-різницеві співвідношення при нерівномірному кроці інтерпретаційної сітки, а також приклад розрахунку реальної конструкції – палі у складі однорядної ПС – на основі застосування цих співвідношень.

Аналіз основних досліджень та публікацій. Практичному застосуванню метода скінченних різниць присвячено широкий спектр робіт у багатьох галузях наукових досліджень [2,3,4]. Основною перевагою методу є можливість заміни геометричної моделі суцільного середовища його дискретним аналогом, що з математичної точки зору представляє перехід від диференційних співвідношень до системи елементарних лінійних (в більшості випадків) рівнянь, системне розв'язання яких не представляє жодних складнощів. Можливе і точне розв'язання вище згаданих задач за допомогою інтегральних перетворень. Приклад такої задачі було продемонстровано в [1].

Основна частина. Враховуючи високу складність останнього підходу, повернемося до розгляду різницевих схем.

Позначимо шукану функцію через u , а координатні осі – x_1 , x_2 та x_3 . Тоді похідні, віднесені до i -ї точки по осі x_j ($j=1,2,3$) становитимуть:

1) перша центральна похідна:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|_i \approx \frac{u_m - u_l}{\Delta x_{jc} + \Delta x_{jb}}; \quad (1)$$

2) друга похідна:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right|_i \approx M_j^{**} \cdot u_m + I_j^{**} \cdot u_i + L_j^{**} \cdot u_l, \quad (2)$$

де: $M_j^{**} = 2/[\Delta x_{jc}(\Delta x_{jc} + \Delta x_{jb})]$, $I_j^{**} = -2/(\Delta x_{jc} \Delta x_{jb})$, $L_j^{**} = 2/[\Delta x_{jb}(\Delta x_{jc} + \Delta x_{jb})]$;

3) третя похідна:

$$\left. \frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3} \right|_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right|_i \right) \approx K_j^{***} \cdot u_k + L_j^{***} \cdot u_l + I_j^{***} \cdot u_i + M_j^{***} \cdot u_m + N_j^{***} \cdot u_n, \quad (3)$$

де: $K_j^{***} = -2/[\Delta x_{jb}(\Delta x_{ja} + \Delta x_{jb})(\Delta x_{jc} + \Delta x_{jb})]$, $L_j^{***} = 2/[\Delta x_{jc} \Delta x_{jb}(\Delta x_{jb} + \Delta x_{jc})]$,

$$I_j^{***} = \frac{2}{\Delta x_{jc} + \Delta x_{jb}} \left(\frac{1}{\Delta x_{jb}(\Delta x_{ja} + \Delta x_{jb})} - \frac{1}{\Delta x_{jc}(\Delta x_{jc} + \Delta x_{jd})} \right),$$

$M_j^{***} = -2/[\Delta x_{jc} \Delta x_{jb}(\Delta x_{jb} + \Delta x_{jc})]$, $N_j^{***} = 2/[\Delta x_{jc}(\Delta x_{jc} + \Delta x_{jd})(\Delta x_{jc} + \Delta x_{jb})]$;

4) четверта похідна:

$$\left. \frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4} \right|_i = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right|_i \right) \approx K_j^{****} \cdot u_k + L_j^{****} \cdot u_l + I_j^{****} \cdot u_i + M_j^{****} \cdot u_m + N_j^{****} \cdot u_n, \quad (4)$$

де: $K_j^{****} = \frac{4}{\Delta x_{ja} \Delta x_{jb}(\Delta x_{jb} + \Delta x_{ja})(\Delta x_{jc} + \Delta x_{jb})}$, $L_j^{****} = -\frac{4}{(\Delta x_{jc} + \Delta x_{jb}) \left(\frac{1}{\Delta x_{jb}^2 \Delta x_{jc}} + \frac{1}{\Delta x_{ja} \Delta x_{jb}^2} \right)}$,

$$I_j^{****} = 4 \left(\frac{1}{\Delta x_{jc}^2(\Delta x_{jd} + \Delta x_{jc})(\Delta x_{jc} + \Delta x_{jb})} + \frac{1}{\Delta x_{jc}^2 \Delta x_{jb}^2} + \frac{1}{\Delta x_{jb}^2(\Delta x_{jb} + \Delta x_{ja})(\Delta x_{jc} + \Delta x_{jb})} \right),$$

$M_j^{****} = -\frac{4}{(\Delta x_{jc} + \Delta x_{jb}) \left(\frac{1}{\Delta x_{jc}^2 \Delta x_{jd}} + \frac{1}{\Delta x_{jc}^2 \Delta x_{jb}} \right)}$, $N_j^{****} = \frac{4}{\Delta x_{jc} \Delta x_{jd}(\Delta x_{jd} + \Delta x_{jc})(\Delta x_{jc} + \Delta x_{jb})}$.

У виразах (1) – (4) Δx_{ja} , Δx_{jb} , Δx_{jc} та Δx_{jd} – це позначення окремих відрізків нерівномірного кроку сітки. Відповідні обчислювальні шаблони на скінченно-різницеві вирази (2) – (3) показано на рисунку 1. Розглянемо тепер їх фізичний зміст на прикладі роботи палі у складі однорядної ПС. Робота такої палі може бути описана одновимірним диференціальним рівнянням рівноваги зігнутого стрижня (вздовж осі Ox , де $x \equiv x_j$). Останнє має наступний вигляд:

$$EI_x \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = q, \quad (5)$$

де u – тут переміщення досліджуваної точки стрижня в напрямку осі Oz (причому $Oz \perp Ox$); q – концентрація розподіленого навантаження; E – модуль пружності матеріалу стрижня; I – момент інерції перерізу стрижня.

Вирази для обчислення згинальних моментів M_{xOz} та поперечних зусиль Q_{xOz} мають наступний вигляд:

$$M_{xOz} = -EI_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6)$$

$$Q_{xOz} = -EI_x \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \quad (7)$$

Тепер, на основі відношень (2) – (4) та (5) – (7), одержимо скінченно-різницеві вирази для відтворення складових НДС зігнутого стрижня в вузлах його дискретної інтерпретації:

$$K_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_k + L_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_l + I_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_i + M_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_m + N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_n \approx q_i/EI_x, \quad (8)$$

$$M_x^{\bullet\bullet} \cdot u_m + I_x^{\bullet\bullet} \cdot u_i + L_x^{\bullet\bullet} \cdot u_l \approx -M_{ixOz}/EI_x, \quad (9)$$

$$K_x^{\bullet\bullet\bullet} \cdot u_k + L_x^{\bullet\bullet\bullet} \cdot u_l + I_x^{\bullet\bullet\bullet} \cdot u_i + M_x^{\bullet\bullet\bullet} \cdot u_m + N_x^{\bullet\bullet\bullet} \cdot u_n \approx -Q_{ixOz}/EI_x. \quad (10)$$

Зважаючи на те, що паля у складі ПС сприймає навантаження від схилу (як від рівномірно-розподіленого навантаження) вище рівня розробки котловану (РПК) та оточена ґрунтом з усіх боків нижче РПК, слід вважати, що робота її нижньої частини відбувається як робота на згин стрижня на пружній основі. В такому випадку розподілене навантаження q , що діє на площу конструкції, має враховувати також і реактивний опір основи. Якщо мова йде про деякий i -й вузол дискретно представленої системи, то одержимо наступну залежність [5,6]:

$$q_i = q'_i - k_i \cdot u_i, \quad (11)$$

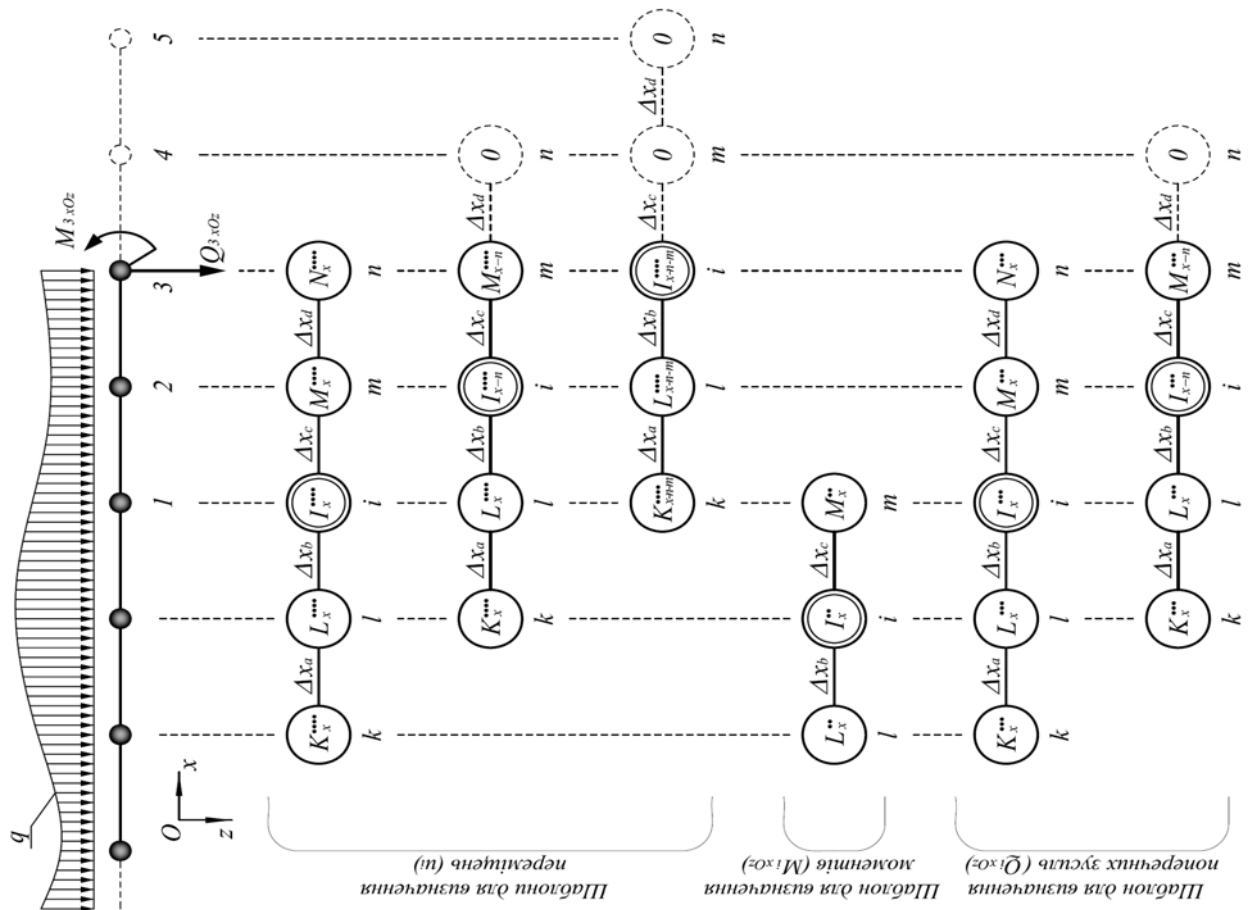
де q'_i – інтенсивність навантаження на зовнішню поверхню стрижня (або палі) у вузлі i , а k_i – коефіцієнт постелі пружної основи, також віднесений до вузла i даної конструкції. Методику визначення останнього, з урахуванням фізико-механічних властивостей ґрунту, було розкрито в [1].

Враховуючи останню рівність, запишемо формулу для опису стану статичної рівноваги точок палі нижче РПК:

$$K_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_k + L_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_l + (I_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} + k_i/EI_x) \cdot u_i + M_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_m + N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_n \approx q'_i/EI_x. \quad (12)$$

Моменти та поперечні зусилля у точках палі, що лежать нижче РПК, аналогічно визначатимуться за формулами (9) та (10).

Якщо до скінченно-різницевого виразу входять «законтурні» вузли, слід врахувати крайові умови (вид закріплення, або відомі навантаження), скориставшись виразами для часткових похідних нижчих порядків. Проаналізуємо випадок, коли край конструкції в одному напрямку є вільним і може бути довільно навантажений зосередженими зусиллями та згинальними моментами. Розглянемо крайній вузол вздовж осі Ox (див. вузол №3, рис. 1.), враховуючи, що до рівняння його рівноваги входять законтурні вузли (№4 та №5).



←Рис. 1.
Обчислювальні шаблони на регулярні, крайові та передостанні вузли стрижня в напрямку осі Ox (вище РРК).

$$= \frac{q_i}{EI_x}; \tag{8}$$

$$= \frac{q_i}{EI_x} + \frac{N_x^{\dots\dots\dots}}{M_m^{\dots\dots\dots}} \cdot \frac{M_{m,Oz}}{EI_x}; \tag{16}$$

$$= \frac{q_i}{EI_x} - \left(\frac{M_x^{\dots\dots\dots} N_x^{\dots\dots\dots}}{M_x^{\dots\dots\dots} N_x^{\dots\dots\dots}} - \frac{M_x^{\dots\dots\dots}}{M_x^{\dots\dots\dots}} \right) \frac{M_{i,Oz}}{EI_x} + \frac{N_x^{\dots\dots\dots}}{N_x^{\dots\dots\dots}} \frac{Q_{i,Oz}}{EI_x}; \tag{13}$$

$$= -\frac{M_{i,Oz}}{EI_x}; \tag{9}$$

$$= -\frac{Q_{i,Oz}}{EI_x}; \tag{10}$$

$$= -\frac{N_x^{\dots\dots\dots}}{M_m^{\dots\dots\dots}} \cdot \frac{M_{m,Oz}}{EI_x} = -\frac{Q_{i,Oz}}{EI_x}. \tag{18}$$

Виразимо невідомі значення переміщень через відомі контурні, розв'язавши при цьому систему рівнянь (9) і (10) відносно u_m та u_n , та підставимо результуючі вирази до співвідношень (8) та (12). Одержимо:

$$\begin{aligned} & K_{x-n-m}^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_k + L_{x-n-m}^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_l + I_{x-n-m}^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_i = \\ & = \frac{q_i}{EI_x} - \left(\frac{M_x^{\bullet\bullet\bullet} N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet}}{M_x^{\bullet\bullet} N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet}} - \frac{M_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet}}{M_x^{\bullet\bullet}} \right) \frac{M_{ixOz}}{EI_x} + \frac{N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet}}{N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet}} \frac{Q_{ixOz}}{EI_x}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & K_{x-n-m}^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_k + L_{x-n-m}^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_l + (I_{x-n-m}^{\bullet\bullet\bullet\bullet} + k_i/EI_x) \cdot u_i = \\ & = \frac{q'_i}{EI_x} - \left(\frac{M_x^{\bullet\bullet\bullet} N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet}}{M_x^{\bullet\bullet} N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet}} - \frac{M_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet}}{M_x^{\bullet\bullet}} \right) \frac{M_{ixOz}}{EI_x} + \frac{N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet}}{N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet}} \frac{Q_{ixOz}}{EI_x}. \end{aligned} \quad (14)$$

де:

$$\begin{aligned} K_{x-n-m}^{\bullet\bullet\bullet\bullet} &= K_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} - N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} K_x^{\bullet\bullet\bullet} / N_x^{\bullet\bullet\bullet}, \\ L_{x-n-m}^{\bullet\bullet\bullet\bullet} &= L_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} + N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \left(\frac{L_x^{\bullet\bullet} M_x^{\bullet\bullet\bullet}}{M_x^{\bullet\bullet} N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet}} - \frac{L_x^{\bullet\bullet\bullet}}{N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet}} \right) - \frac{L_x^{\bullet\bullet} M_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet}}{M_x^{\bullet\bullet}}, \\ I_{x-n-m}^{\bullet\bullet\bullet\bullet} &= I_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} + N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \left(\frac{I_x^{\bullet\bullet} M_x^{\bullet\bullet\bullet}}{M_x^{\bullet\bullet} N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet}} - \frac{I_x^{\bullet\bullet\bullet}}{N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet}} \right) - \frac{I_x^{\bullet\bullet} M_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet}}{M_x^{\bullet\bullet}}. \end{aligned}$$

Якщо ж вузол, що розглядається, є передостаннім перед краєм конструкції (див. вузол №2, рис. 1.), то рівняння його рівноваги включає лише один законтурний вузол (№4). Для того, щоб виразити переміщення цього вузла через відомі (у межах контура), запишемо рівняння типу (9) для останнього крайнього вузла контура m (на рис. 1. даний вузол позначено як №3):

$$L_{xm}^{\bullet\bullet} \cdot u_i + I_{xm}^{\bullet\bullet} \cdot u_m + M_{xm}^{\bullet\bullet} \cdot u_n = -M_{mxOz}/EI_x. \quad (15)$$

Тут індекси m говорять про те, що коефіцієнти $L_{xm}^{\bullet\bullet}$, $I_{xm}^{\bullet\bullet}$ та $M_{xm}^{\bullet\bullet}$ мають бути визначені відносно вузла m . Із формули (15) визначаємо величину переміщення законтурного вузла u_n та підставляємо у вирази (8) і (12). Маємо:

$$\begin{aligned} & K_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_k + L_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_l + I_{x-n}^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_i + M_{x-n}^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_m = \\ & = q_i/EI_x + (N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} M_{mxOz}) / (M_{xm}^{\bullet\bullet} EI_x), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & K_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_k + L_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_l + (I_{x-n}^{\bullet\bullet\bullet\bullet} + k_i/EI_x) \cdot u_i + M_{x-n}^{\bullet\bullet\bullet\bullet} \cdot u_m = \\ & = q'_i/EI_x + (N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} M_{mxOz}) / (M_{xm}^{\bullet\bullet} EI_x), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{де: } I_{x-n}^{\bullet\bullet\bullet\bullet} = I_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} - L_{xm}^{\bullet\bullet} N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} / M_{xm}^{\bullet\bullet}, \quad M_{x-n}^{\bullet\bullet\bullet\bullet} = M_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} - I_x^{\bullet\bullet} N_x^{\bullet\bullet\bullet\bullet} / M_{xm}^{\bullet\bullet}.$$

Вираз для обчислення поперечних зусиль у передостанньому вузлі по осі Ox (№2, рис.1.), із урахуванням формули (15), матиме наступний вигляд:

$$K_x^{\bullet\bullet\bullet} \cdot u_k + L_x^{\bullet\bullet\bullet} \cdot u_l + I_{x-n}^{\bullet\bullet\bullet} \cdot u_i + M_{x-n}^{\bullet\bullet\bullet} \cdot u_m - (N_x^{\bullet\bullet\bullet} M_{mxOz}) / (M_{xm}^{\bullet\bullet} EI_x) = -Q_{ixOz}/EI_x, \quad (18)$$

$$\text{де: } I_{x-n}^{\bullet\bullet\bullet} = I_x^{\bullet\bullet\bullet} - L_{xm}^{\bullet\bullet} N_x^{\bullet\bullet\bullet} / M_{xm}^{\bullet\bullet}, \quad M_{x-n}^{\bullet\bullet\bullet} = M_x^{\bullet\bullet\bullet} - I_x^{\bullet\bullet} N_x^{\bullet\bullet\bullet} / M_{xm}^{\bullet\bullet}.$$

Маючи усі необхідні скінченно-різницеві співвідношення для надземних і підземних точок палі, можемо перейти до розгляду конкретного прикладу розрахунку. Використаємо деякі величини, одержані в роботі [1].

Розглядатимемо в якості досліджуваного об'єкту палю ($\varnothing=1.0$ м), що входить до складу однорядної ПС. Модуль пружності залізобетону приймемо рівним $E=2,65 \times 10^4$ МПа. Вважатимемо, що уся конструкція розташована в тугопластичному суглинку (ПГЕ-1) з наступними характеристиками: щільність – $\rho=1,8$ т/м³; щільність сухого ґрунту – $\rho_d=1,5$ т/м³; щільність твердих частинок – $\rho_s=2,7$ т/м³; питома вага – $\gamma=17,66$ кН/м³; коефіцієнт пористості – $e=0,8$; число пластичності – $I_p=0,08$; число текучості – $I_L=0,25$; щеплення – $C=23,5$ кПа; кут внутрішнього тертя – $\varphi=22,5^\circ$; модуль пружності – $E=15,5$ МПа. У роботі [1] було виявлено, що максимальний коефіцієнт постелі для даного ґрунту становив $k=17320$ кН/м². Приймемо цю величину для усіх точок ПС, що лежать нижче РРК. Геометричні параметри, прийняті навантаження, а також крок дискретизації досліджуваної палі показано на рисунку 2.а.

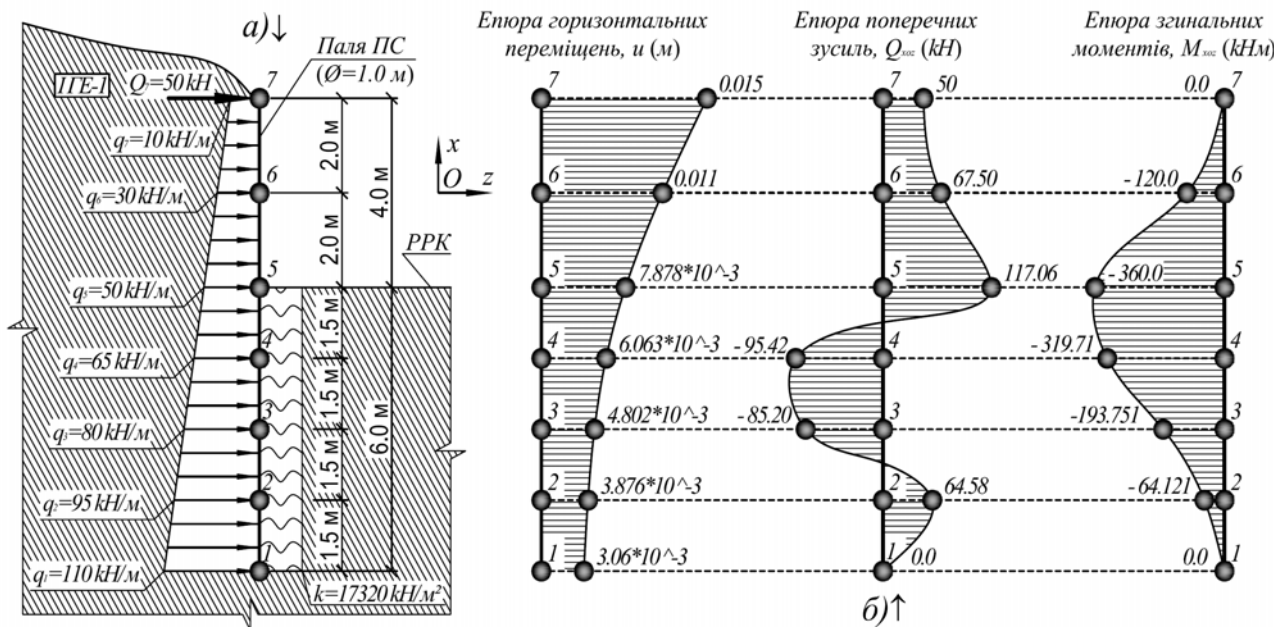


Рис. 2.

Користуючись скінченно-різницевиими співвідношеннями (8), (13), (16) та (12), (14), (17) відповідно для точок палі, що розміщені вище та нижче РРК, слід скласти систему лінійних рівнянь та розв'язати їх відносно невідомих переміщень u_i .

Одержані значення переміщень необхідні для розрахунку згинальних моментів та поперечних зусиль вище і нижче РРК. Для цього слід застосовувати співвідношення (9), (10) та (18).

Результати розрахунків приведеного прикладу за допомогою вище описаної методики показані у формі епюр переміщень, поперечних зусиль та згинальних моментів на рисунку 2.б. Для виконання усіх необхідних обчислень було використано програмний комплекс Mathcad 14.0.

Висновки. Очевидно, що використання скінченно-різницевих співвідношень для нерівномірного кроку інтерпретаційної сітки розширює межі

застосування методу скінченних різниць у цілому, так як виникає можливість більш детального розрахунку шуканих величин саме у тих місцях, де досліджуваний процес (або явище) виявляє найменш передбачуваний характер. Приведений приклад застосування даної методики говорить про можливість легкого об'єднання вище наведених скінченно-різницевоїх формул та інших фізико-математичних теорій і гіпотез зі збереженням подальшої коректності розрахунків. Слід також відмітити можливість застосування запропонованих співвідношень при зміні геометричних параметрів поперечного перерізу палі (чи іншої конструкції) по довжині.

Список використаних джерел:

1. Бондарева Л.О.. Взаємодія палі у складі підпірної стіни з основою. Основи і фундаменти: Міжвідомчий н. т. збірник. – Вип. 32 / Відповідальний редактор І.П. Бойко. – К.: КНУБА, 2010 – 2011. В друці.
2. Самарский А.А.. Теория разностных схем. – 3-е изд., испр. – М.: Наукв. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 616 с.
3. Самарский А.А., Вабищев П.И.. Численные методы решения задач математической физики: Учебное пособие. Изд. 3-е. – М.: Издательство ЛКИ, 2009. – 480 с.
4. Самарский А.А., Гулин А.В.. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наукв. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 432 с.
5. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. – Ч. 1, кн. 3. Опір дво- і тривимірних тіл: Підручник / В.Г. Піскунов, В.С. Сіпетов, В.Д. Шевченко, Ю.М. Федоренко; За ред. В.Г. Піскунова. – Київ.: Вища школа, 1995. – 271 с.: іл.
6. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И.. Расчет конструкций на упругом основании. - 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1984. – 679 с., ил.

Аннотация

В работе рассматриваются некоторые принципы и алгоритмы использования метода конечных разностей в процессе определения напряженно-деформированного состояния сваи в составе подпорной стены, при условии неравномерности разбиения изучаемой конструкции.

The summary

This article describes some simple algorithms of finite difference method using in pile (of the retaining wall) deflected mode determination, under the stipulation that fragmentation of the construction is irregular.