УДК 530.12; 531.51 канд. фіз.-мат. наук Ф.Є. Хлистун
Київський національний університет будівництва і архітектури.

ПОВНИЙ НАБІР ТЕНЗОРІВ ТА ІНВАРІАНТІВ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО ТЕНЗОРА МАКСВЕЛЛА З ВИКОРИСТАННЯМ БІКОМПЛЕКСНОГО ВЕКТОРА РІМАНА – ЗІЛЬБЕРШТЕЙНА.

В роботі запропоновано метод коваріантного описання величин доступних при спостереженнях електромагнітного випромінювання, для описання якого використовують тензор Максвелла в комплексній формі, в будь якому ізотропному середовищі через компоненти бікомплексного вектора Рімана-Зільберштейна.

В багатьох випадках при розгляді конкретних задач зручно користуватись електричними і магнітними векторами в комплексній формі. В роботі [1] показано, що будь яке електромагнітне поле в однорідному середовищі може бути описане компонентами комплексного тензора і вектора Рімана-Зільберштейна, де ми використали уявну одиницю «i».

$$\Phi^{nm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[f^{nm} + i\hat{f}^{nm} \right]; \qquad \hat{\Phi}^{nm} = -i\Phi^{nm}; \qquad z_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[uD_n + iH_n \right];$$

$$\Phi^{nm} = \begin{bmatrix} 0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ -z_1 & 0 & -iz_3 & iz_2 \\ -z_2 & iz_3 & 0 & -iz_1 \\ -z_3 & -iz_2 & iz_1 & 0 \end{bmatrix}; \; f^{nm} = \begin{bmatrix} 0 & uD_1 & uD_2 & uD_3 \\ -uD_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -uD_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -uD_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Тут $\vec{D};\vec{H}$ - дійсні значення електричного і магнітного векторів.

Для квазімонохроматичного випромінювання, яке розповсюджується вздовж фазових поверхонь $\psi\left(x^{\nu}\right) = const$, компоненти векторів $\vec{D};\vec{H}$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} D_n &= {}_1d_n \cos\psi - {}_2d_n \sin\psi = \mathrm{Re}_j\left[d_n e^{j\psi} \right]; \qquad d_n = {}_1d_n + j\,{}_2d_n; \\ H_n &= {}_1h_n \cos\psi - {}_2h_n \sin\psi = \mathrm{Re}_j\left[h_n e^{j\psi} \right]; \qquad h_n = {}_1h_n + j\,{}_2h_n. \end{aligned} \qquad (2)$$

Тут ми використали іншу уявну одиницю «j», тому що в z_n ми уже використали уявну одиницю «i». Виходячи з визначення z_n в (1), маємо:

$$z_n = \left[a_n \cos\psi - b_n \sin\psi\right] = \mathrm{Re}_j\left[\left(a_n + jb_n\right)\exp\left(j\psi\right)\right] = \mathrm{Re}_j Z_n;$$
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[u_1 d_n + i_1 h_n\right]; \quad c_n = \left(a_n + jb_n\right); \quad Z_n = c_n e^{j\psi}. \tag{3}$$

Замість тензора Максвелла f^{nm} з дійсними векторами напруженості електричного і магнітного поля $\vec{D};\vec{H}$ введемо комплексний тензор Максвелла ψ^{nm}, матриця якого матиме вигляд матриці f^{nm}, але вектори електричного і магнітного поля будуть комплексними по уявної одиниці «j». За аналогією з комплексним тензором Рімана-Зільберштейна Φ^{nm} введемо бікомплексний тензор з тим же іменем:

$$F^{nm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{nm} + i\hat{\psi}^{nm}) = \begin{bmatrix} 0 & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ -Z_1 & 0 & -iZ_3 & iZ_2 \\ -Z_2 & iZ_3 & 0 & -iZ_1 \\ -Z_3 & -iZ_2 & iZ_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{F}^{nm} = -iF^{nm}. \tag{4}$$

Тут $\hat{\psi}^{nm}$ означає дуальний тензор, а F^{nm} - самодульний тензор. Вектор Z_n є бікомплексною величиною, яка містить дві незалежні уявні одиниці: $i \neq j$; $i^2 = j^2 = -1$; $ij = ji$. Комплексну спряженість від бікомплексних величин по уявній одиниці «i» будемо позначати: $\tilde{F}^{nm};\tilde{Z}_n$, комплексну спряженість по «j»: $\bar{F}^{nm};\bar{Z}_n$, а комплексну спряженість по обох одиницях так: $\tilde{\bar{F}}^{nm};\tilde{\bar{Z}}_n$.

Знайдемо інваріанти і всі можливі суми по одному індексу тензорів F^{nm}. Для цього будемо використовувати метрику:

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2; \; g_{kr} = (1;-1;-1;-1), \tag{5}$$

де $dx^0 = udt$; $u = \left(c/\sqrt{\varepsilon\mu}\right) \leq c$ - швидкість світла в однорідному середовищі; dt - проміжок власного часу спостерігача; dx^n - проміжки просторових координат. Оскільки тензор F^{nm} - самодульний, то для нього (без урахування комплексних спряжень по двох уявних одиницях!) існує тільки чотири можливі суми по одному індексу тензорів F^{nm}:

$${}_0S^{nm} = F^{nk}F^{mk}g_{kk}; \; {}_1S^{nm} = F^{nk}\bar{F}^{mk}g_{kk}; \; {}_2S^{nm} = F^{nk}\tilde{F}^{mk}g_{kk}; \; {}_3S^{nm} = F^{nk}\tilde{\bar{F}}^{mk}g_{kk}. \tag{6}$$

Позначимо через ${}_n l$ чотири можливих скалярних добутки бікомплексного вектора Z_n.

$$
{}_0 l = \vec{Z}\vec{Z} = \left[\vec{a}\vec{a} - \vec{b}\vec{b} + 2j\vec{a}\vec{b}\right]e^{j\psi}; \quad {}_3 l = \vec{Z}\vec{\tilde{\bar{Z}}} = \left[\vec{a}\vec{\tilde{a}} + \vec{b}\vec{\tilde{b}} + j\left(\vec{\tilde{a}}\vec{b} - \vec{a}\vec{\tilde{b}}\right)\right].
$$

$$
{}_1 l = \vec{Z}\vec{\bar{Z}} = \left[\vec{a}\vec{a} + \vec{b}\vec{b}\right]; \qquad {}_2 l = \vec{Z}\vec{\tilde{Z}} = \left[\vec{a}\vec{\tilde{a}} - \vec{b}\vec{\tilde{b}} + j\left(\vec{\tilde{a}}\vec{b} + \vec{a}\vec{\tilde{b}}\right)\right]e^{j\psi}; \tag{7}
$$

Скалярні добутки векторів $\vec{a};\vec{b}$ запишемо використовуючи формули (3).

$$
\vec{a}^2 = \frac{1}{2}\left[u^2\,{}_1\vec{d}^2 - {}_1\vec{h}^2 + 2iu\,{}_1\vec{d}\,{}_1\vec{h}\right]; \quad \vec{b}^2 = \frac{1}{2}\left[u^2\,{}_2\vec{d}^2 - {}_2\vec{h}^2 + 2iu\,{}_2\vec{d}\,{}_2\vec{h}\right];
$$

$$
\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}\left[u^2\,{}_1\vec{d}\,{}_2\vec{d} - {}_1\vec{h}\,{}_2\vec{h} + iu\left({}_1\vec{d}\,{}_2\vec{h} + {}_2\vec{d}\,{}_1\vec{h}\right)\right]; \quad \vec{a}\vec{\tilde{a}} = \frac{1}{2}\left[u^2\,{}_1\vec{d}^2 + {}_1\vec{h}^2\right]; \tag{8}
$$

$$
\vec{b}\vec{\tilde{a}} = \frac{1}{2}\left[u^2\,{}_1\vec{d}\,{}_2\vec{d} + {}_1\vec{h}\,{}_2\vec{h} + iu\left({}_1\vec{d}\,{}_2\vec{h} - {}_2\vec{d}\,{}_1\vec{h}\right)\right]; \quad \vec{b}\vec{\tilde{b}} = \frac{1}{2}\left[u^2\,{}_2\vec{d}^2 + {}_2\vec{h}^2\right].
$$

З наведених формул видно, що інваріанти ${}_0 l;\,{}_1 l$ дорівнюють нулю, якщо в обох хвилях вектори $u\vec{d};\vec{h}$ взаємно ортогональні та рівні за модулями. При цьому кожна пара векторів може бути повернута в своїй площині відносно іншої на довільний кут α та їхні модулі можуть відрізнятись на довільний множник k.

Інваріанти ${}_2 l;\,{}_3 l$ пропорційні комбінаціям густин енергій кожної з двох хвиль, причому в інваріанті ${}_3 l$ дійсна частина пропорційна повній густині енергії електромагнітної хвилі, а другий дійсний доданок має множник (ij).

Можна показати, що матриці тензорів (6) мають вигляд:

$$
{}_0 S^{nm} = \begin{bmatrix} -{}_0 l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}_0 l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}_0 l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}_0 l \end{bmatrix}; \qquad
{}_1 S^{nm} = \begin{bmatrix} -{}_1 l & {}_1 q_1 i & {}_1 q_2 i & {}_1 q_3 i \\ -{}_1 q_1 i & {}_1 l & {}_1 q_3 & -{}_1 q_2 \\ -{}_1 q_2 i & -{}_1 q_3 & {}_1 l & {}_1 q_1 \\ -{}_1 q_3 i & {}_1 q_2 & -{}_1 q_1 & {}_1 l \end{bmatrix};
$$

$$
{}_2 S^{nm} = \begin{bmatrix} -{}_2 l & -{}_2 q_1 i & -{}_2 q_2 i & -{}_2 q_3 i \\ -{}_2 q_1 i & {}_2\sigma^{11} & {}_2\sigma^{12} & {}_2\sigma^{13} \\ -{}_2 q_2 i & {}_2\sigma^{21} & {}_2\sigma^{22} & {}_2\sigma^{23} \\ -{}_2 q_3 i & {}_2\sigma^{31} & {}_2\sigma^{32} & {}_2\sigma^{33} \end{bmatrix}; \quad
{}_3 S^{nm} = \begin{bmatrix} -{}_3 l & -{}_3 q_1 i & -{}_3 q_2 i & -{}_3 q_3 i \\ -{}_3 q_1 i & {}_3\sigma^{11} & {}_3\sigma^{12} & {}_3\sigma^{13} \\ -{}_3 q_2 i & {}_3\sigma^{21} & {}_3\sigma^{22} & {}_3\sigma^{23} \\ -{}_3 q_3 i & {}_3\sigma^{31} & {}_3\sigma^{32} & {}_3\sigma^{33} \end{bmatrix}. \tag{9}
$$

Тут ${}_1 q_n;\,{}_2 q_n;\,{}_3 q_n$ означають компоненти векторних добутків:

$$
\begin{aligned}
&{}_1\vec{q} = \left[\vec{Z}\vec{\bar{Z}}\right] = -j\left\{\left(u^2\left[{}_1\vec{d}\,{}_2\vec{d}\right] - \left[{}_1\vec{h}\,{}_2\vec{h}\right]\right) + iu\left(\left[{}_1\vec{d}\,{}_2\vec{h} - {}_2\vec{d}\,{}_1\vec{h}\right]\right)\right\};\\
&{}_2\vec{q} = \left[\vec{Z}\vec{\tilde{Z}}\right] = -i\left\{{}_1\vec{P} + j\,{}_2\vec{P}\right\}e^{2j\psi}; \quad {}_3\vec{q} = \left[\vec{Z}\vec{\tilde{\bar{Z}}}\right] = -i\left\{{}_0\vec{P} + ij\,{}_k\vec{P}\right\};\\
&{}_1\vec{P} = u\left(\left[{}_1\vec{d}\,{}_1\vec{h}\right] - \left[{}_2\vec{d}\,{}_2\vec{h}\right]\right); \qquad {}_0\vec{P} = u\left(\left[{}_1\vec{d}\,{}_1\vec{h}\right] + \left[{}_2\vec{d}\,{}_2\vec{h}\right]\right);\\
&{}_2\vec{P} = u\left(\left[{}_1\vec{d}\,{}_2\vec{h}\right] + \left[{}_2\vec{d}\,{}_1\vec{h}\right]\right); \qquad {}_k\vec{P} = \left(u^2\left[{}_1\vec{d}\,{}_2\vec{d}\right] + \left[{}_1\vec{h}\,{}_2\vec{h}\right]\right);
\end{aligned} \tag{10}
$$

які характеризують певні потоки енергії: ${}_0\vec{P}$ - повний потік; ${}_k\vec{P}$ - потік поляризованого по кругу випромінювання; ${}_1\vec{P};\,{}_2\vec{P}$ - потоки двох незалежних складових лінійної поляризації.

Можна показати, що при ${}_0l = {}_1l \equiv 0$:

$$
{}_1\vec{q} \equiv 0;\ {}_0\vec{P} = \left(1+k^2\right)\vec{e};\ {}_1\vec{P} = \left(1-k^2\right)\vec{e};\ {}_2\vec{P} = 2\vec{e}k\cos\alpha;\ {}_k\vec{P} = 2\vec{e}k\sin\alpha;
$$

$$
{}_2l = \left[w\left(1-k^2\right) + jwk\cos\alpha\right]e^{2j\psi}; \qquad {}_3l = \left[w\left(1+k^2\right) - ijwk\sin\alpha\right], \tag{11}
$$

де позначено: $\vec{e} = u\left[{}_1\vec{d}\,{}_1\vec{h}\right]$; $w = \frac{1}{2}\left(u^2\,{}_1\vec{d}^2 + {}_1\vec{h}^2\right)$; множник k - коефіцієнт пропорційності між довжинами відповідних векторів, кут між якими складає α.

Не важко переконатись, що ${}_0\vec{P}^2 = {}_1\vec{P}^2 + {}_2\vec{P}^2 + {}_k\vec{P}^2$, тобто квадрат повного потоку дорівнює сумі квадратів потоків з лінійною та круговою поляризаціями.

Відповідні просторові симетричні тензори напружень побудовано таким чином:

$$
\begin{aligned}
&{}_2\sigma^{nm} = \left\{\left[{}_2^1\sigma_{nm} + j\,{}_2^2\sigma_{nm}\right]e^{2j\psi} - {}_2l\delta_{nm}\right\};\\
&{}_2^1\sigma_{nm} = \left[u^2\left({}_1d_n\,{}_1d_m - {}_2d_n\,{}_2d_m\right) + \left({}_1h_n\,{}_1h_m - {}_2h_n\,{}_2h_m\right)\right]\\
&{}_2^2\sigma_{nm} = \left[u^2\left({}_1d_n\,{}_2d_m + {}_2d_n\,{}_1d_m\right) + \left({}_1h_n\,{}_2h_m + {}_2h_n\,{}_1h_m\right)\right]
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}_3\sigma^{nm} = \left\{\left[{}_2^0\sigma_{nm} + ij\,{}_2^k\sigma_{nm}\right] - {}_3l\delta_{nm}\right\};\\
&{}_3^0\sigma_{nm} = \left[u^2\left({}_1d_n\,{}_1d_m + {}_2d_n\,{}_2d_m\right) + \left({}_1h_n\,{}_1h_m + {}_2h_n\,{}_2h_m\right)\right]\\
&{}_3^k\sigma_{nm} = u\left[\left({}_1d_n\,{}_2h_m + {}_1d_m\,{}_2h_n\right) - \left({}_2d_n\,{}_1h_m + {}_2d_m\,{}_1h_n\right)\right]
\end{aligned} \tag{13}
$$

Можна перевірити, що всі компоненти бікомплексного тензора ${}_3S^{nm}$ складаються з суми двох дійсних величин одна з яких має множник (ij), тоді як ${}_2S^{nm}$ є комплексним лише по «j» і має множник $\exp(j2\psi)$. Таким чином ці два тензори можна представити у вигляді:

$$I^{nm} + ijK^{nm} = -\mu\mu_{0\,3}S^{nm} \quad ; L^{nm} = -\mu\mu_{0\,2}S^{nm}\exp\left(-j2\psi\right) \qquad (14)$$

Множник $\left(-\mu\mu_0\right)$ тут підібрано таким чином, щоб компоненти тензора I^{nm} співпадали з компонентами тензора енергії-імпульсу електромагнітного поля в системі **СІ.**

В роботі [2] показано, що тензори ${}_2S^{nm}$; ${}_3S^{nm}$ мають такі самі властивості, як і тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля (а саме мають нульовий слід і нульову коваріантну дивергенцію!), а їх складові характеризують, відповідно: I^{nm} - повний світловий потік; K^{nm} - його частину з круговою та L^{nm} - з лінійною поляризацією. Тензор лінійної поляризації L^{nm} не має високочастотного множника, а дві його комплексно спряжені по уявної одиниці « j » частини характеризують дві незалежні складові лінійної поляризації.

Можна показати, що у випадку коли ${}_0l = {}_1l \equiv 0$, то відмінні від нуля компоненти тензорів напружень дорівнюють:

$${}_2\sigma^{nm} = -w\left[\left(1-k^2\right)+2jk\cos\alpha\right]e^{2j\psi}; \quad {}_3\sigma^{nm} = -w\left[\left(1+k^2\right)-2ijk\sin\alpha\right]. \qquad (15)$$

Висновок. В роботі наведено повний комплект матриць для дослідження властивостей електромагнітного випромінювання з ненульовими інваріантами (${}_0l = {}_1l \neq 0$) як у вакуумі так і в однорідному ізотропному середовищі. Ці формули дають більш повну інформацію про потоки енергії і викликані полем напруження в середовищі навіть у випадку випромінювання з нульовими інваріантами, яке приблизно реалізується у дальній хвильовій зоні.

Список літератури.

1. Ф.Є. Хлистун. Запис рівнянь Максвелла в коваріантній формі з використанням вектора Рімана-Зільберштейна. – Містобудування та територіальне планування. Київ КНУБА 2011, вип.39, 421-424.

2. Ф.Е. Хлыстун. Тензоры и параметры поляризации электромагнитного излучения. – Вестник Киевского университета. «Астрономия», 1977, вып.19, 68-74.

Аннотация.

В роботе получен полный комплект тензоров и инвариантов, характеризующий электромагнитное излучения, описываемое комплексным тензором Максвелла, через компонентЫ. вектора Римана-Зильберштейна.

Abstract.

A complete set of tensors and invariants which characterize the electromagnetic radiation described by a complex tensor Maxwell through the components of the Riemann-Silberstein vector was obtained