

УДК 539.3

Солодей І.І., канд. техн. наук

## **ЕФЕКТИВНІСТЬ СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНОЇ БАЗИ НАПІВНАЛІТИЧНОГО МЕТОДА СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ ТІЛ ОБЕРТАННЯ ТА ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ**

**Вступ.** Найбільш універсальним чисельним методом, що дозволяє виконувати розрахунки будівельних конструкцій є метод скінченних елементів (МСЕ). Розгляд просторових моделей, вимоги до детальної дискретизації їх окремих елементів, і в той же час до збереження достатньо регулярної структури сіткової області веде до необхідності розв'язання систем рівнянь високих порядків, тому їх розв'язання проводиться, як правило, в рамках наближених розрахункових схем.

Істотно підвищити ефективність МСЕ дозволяє його поєднання з методом розділу невідомих. Цей підхід одержав назву напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ). НМСЕ був запропонований в роботах [9, 14] як ефективний метод розв'язання просторових задач теорії пружності для невісесиметрично навантажених тіл обертання. Висока ефективність напіваналітичного варіанта в порівнянні з традиційним МСЕ зумовлена, у класичному випадку, зведенням просторової задачі до ряду двовимірних. Сучасні досягнення напіваналітичного методу скінченних елементів в статичних та квазістатичних задачах теорії пружності та пластичності [4], задачах повзучості, континуального та дискретного руйнування [1], у пошуку рішень задач динаміки на основі використання алгоритмів прямого інтегрування рівнянь руху однорідних та неоднорідних тіл [3, 8, 13] створюють міцний базис подальшого розвитку НМСЕ.

Об'єктами дослідження напіваналітичного методу скінченних елементів традиційно вважаються просторові тіла або системи просторових тіл, які утворені рухом складної геометричної фігури (поперечного перерізу тіла) вздовж утворюючої довільної форми. На торцях таких об'єктів можуть бути реалізовані різні типи граничних умов. Зважаючи на те, що реальні елементи конструкцій у своїй масі здебільшого є неоднорідними круговими та призматичними тілами, в рамках НМСЕ розроблено спеціальні типи скінченних елементів (СЕ), що дозволяють з найбільшою ефективністю апроксимувати окремі типи просторових неоднорідних об'єктів дослідження. Сучасні методики, які орієнтовані на розрахунок широкого класу конструкцій, що складаються з масивних і тонкостінних елементів, повинні

поряд з високою точністю опису напружено-деформованого стану об'єктів складної форми та структури забезпечувати високу швидкість збіжності до точного рішення при мінімальних чисельних витратах. Завдяки введенню додаткових гіпотез, що не зменшують точність апроксимації, представленню деформацій і напружень в фізичних термінах та у відповідності до моментної схеми скінченного елемента (МССЕ) [4, 11, 12] вдається, з однієї сторони, уникнути трудомікої процедури чисельного інтегрування по площі поперечного перетину скінченного елемента, з іншої – зберегти високу ефективність просторової дискретизації.

**1. Скінченні елементи НМСЕ для задачі динаміки.** Для дискретизації неоднорідних просторових тіл при динамічному навантаженні застосовуються кільцевий та призматичний скінченні елементи [2, 5, 8, 13] (рис.1, 2).

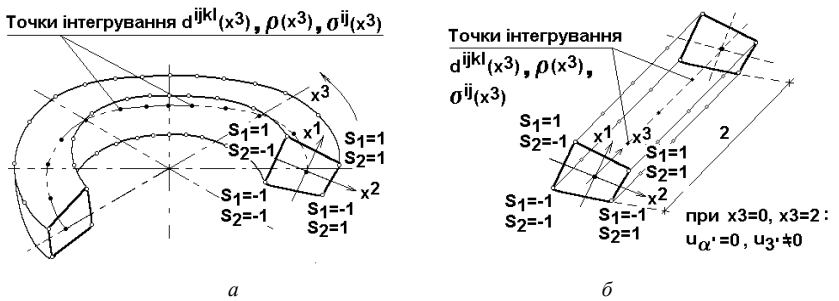


Рис. 1. Неоднорідні скінченні елементи на основі рядів Фур'є: а) замкнутий кільцевий; б) шарнірно опертий призматичний

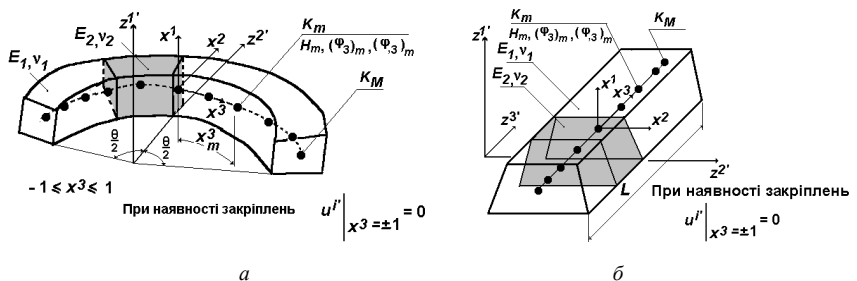


Рис. 2. Неоднорідні скінченні елементи із довільними граничними умовами на торцях: а) незамкнений кільцевий; б) призматичний

Щільність матеріала, компоненти тензора пружних постійних і метричного тензора в області поперечного перетину елемента вважаються незмінними. Напротивагу цьому постійні матеріала і напруження

довільно змінюються вздовж осі  $x^3$  і обчислюються в необхідній кількості точок інтегрування. В площині перетину елемента прийнято білінійне розподілення переміщень, швидкостей та прискорень:

$$(u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'} = \sum_{S_1} \sum_{S_2} P_{(S_1, S_2)}(u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}, \quad P_{(S_1, S_2)} = \prod_{n=1}^2 \left( S_{(n)} x^{(n)} + \frac{1}{2} \right). \quad (1)$$

Компоненти тензора деформацій представлені у відповідності з основними положеннями моментної схеми скінченного елемента:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \frac{1}{g_{(\alpha\alpha)}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \left[ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} h_{(\alpha\alpha), (3-\alpha)} \right] x^{(3-\alpha)} \right\}, \\ \tilde{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} = \frac{1}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{33}}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \left[ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}}{2} (h_{(\alpha\alpha), (3-\alpha)} + h_{33, (3-\alpha)}) \right] x^{(3-\alpha)} \right\},$$

$$\tilde{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{g_{33}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \left[ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} h_{33, \alpha} \right] x^{\alpha} \right\},$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij, \beta} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^{\beta}} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad h_{(ii), \beta} = \frac{g_{(ii), \beta}}{g_{(ii)}}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}}.$$

Як показано в роботах [4, 6, 7, 10, 11], застосування моментної схеми скінчених елементів [12] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження просторових конструкцій на основі МСЕ. Окрім того, МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла як жорсткого цілого, а також усуває явище “хибного зсуву”, що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

Для апроксимації переміщень, швидкостей та прискорень в напрямку утворюючої використовується система координатних функцій  $\psi_{k'}^l$ :

$$(u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} = \sum_{l=l_0}^L (u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}^l \psi_{k'}^l, \quad (3)$$

де для кільцевого замкнутого СЕ на основі рядів Фур'є:

$$\psi_{1'}^l = \psi_{2'}^l = \cos lx^3, \quad \psi_{3'}^l = \sin lx^3, \quad l_0 = 0, \quad 0 \leq x^3 \leq 2\pi, \quad (4)$$

призматичного СЕ на основі рядів Фур'є:

$$\psi_{1'}^l = \psi_{2'}^l = \sin \frac{\pi l}{2} x^3, \quad \psi_{3'}^l = \cos \frac{\pi l}{2} x^3, \quad l_0 = 1, \quad 0 \leq x^3 \leq 2, \quad (5)$$

кільцевого незамкненого та призматичного СЕ із довільними граничними умовами на торцях ( $\psi^l$  – поліноми Лагранжа при  $l = 0, 1$  і Міхліна при  $l = 2, \dots, L$ ):

$$\begin{aligned} \psi_k^0 &= \frac{1}{2}(1-x^3), \quad \psi_{k'}^1 = \frac{1}{2}(1+x^3), \quad -1 \leq x^3 \leq 1, \\ \psi_{k'}^l &= f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2 - 1)^{-1}}, \\ p^{(l)} &= \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{s=0}^l \frac{(-1)^s (l+s)!}{(l-s)! (s!)^2 2^{s+1}} \left[ (1-x^3)^s + (-1)^l (1+x^3)^s \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ способом.

На основі представлених скінченних елементів у співробітництві з Вабішевичем М.О. в рамках задачі динаміки отримані вирази для визначення матриць градієнтів кільцевого та призматичного скінченних елементів, матриць мас та жорсткості однорідного та неоднорідного скінченних елементів, що записані в узагальненому вигляді.

**2. Дослідження ефективності скінченних елементів.** Важливим етапом в реалізації обчислювальних систем для розв'язання просторових задач динаміки є вибір оптимальних, з точки зору швидкості і складності процесів деформування, алгоритмів інтегрування рівнянь руху у часі. Відомо, що вибір того чи іншого алгоритму пов'язаний із швидкістю протікання процесу деформування та характеру навантажень. При аналізі перехідних процесів найбільше розповсюдження отримав метод узагальнених координат, який припускає розклад розшукуваного рішення в ряд по формах власних коливань. В рамках вищезазначеного методу проведено порівняння ефективності представлених скінченних елементів з відомими аналогами, що реалізовані у ліцензованих інженерних комплексах прикладних програм ЛІРА, СКАД і MSC/NASTRAN.

З метою апробації методики для призматичних тонкостінних тіл була розглянута нескінченна плита, на шарнірних опорах, розв'язок якої відповідає теорії коливань одномірних стрижнів. Розрахункова схема та похибка визначення трьох перших власних частот по відношенню до аналітичного розв'язку в залежності від співвідношення товщини і

ширини об'єкту показана на рис. 3. Для третьої власної частоти похибка не перевищує 1% при співвідношенні 1/70.

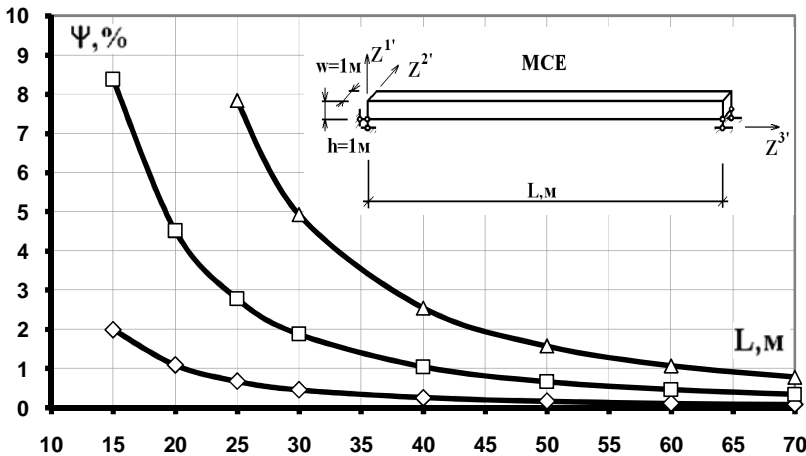


Рис. 3

При зафіксованому співвідношенні проведено дослідження збіжності першої власної частоти до аналітичного розв'язку при зміні густоти сіткової моделі вздовж довжини  $L$  (рис. 4). По висоті та ширині залишали один скінчений елемент. Отримані результати засвідчили, що при використанні 2-х та більше пластинчастих скінчених елементів комплексів СКАД, ЛІРА та 1-го призматичного скінченного елемента вздовж осі  $Z^3$  розв'язок співпадає з аналітичним на всьому інтервалі дослідження; однак, використання тривимірних об'ємних скінчених елементів комплексів СКАД та ЛІРА призводить до значних похибок. Наприклад при апроксимації 140 скінченими елементами по ширині похибка складає близько 20%. На відміну від цього використання скінчених елементів на основі моментної схеми потребує сіткової моделі із 7 скінчених елементів для досягнення точності в межах 1%.

В той же час, використання 15 об'ємних скінчених елементів MSC/NASTRAN (Brick) дає 4% похибки, яка залишається однаковою при подальшому згущенні сіткової моделі.

Для дослідження ефективності призматичного скінченного елемента при аналізі масивних тіл розглянуто товсту нескінченну плиту на шарнірних опорах, в перерізі  $1 \times 2$  м (рис. 5). Для ЛІРА, СКАД і MSC/NASTRAN сіткова область побудована при однаковій кількості скінчених елементів вздовж кожної з координат. Особливістю

напіваналітичного варіанту є сіткова модель з одним скінченним елементом вздовж утворюючої об'єкту.

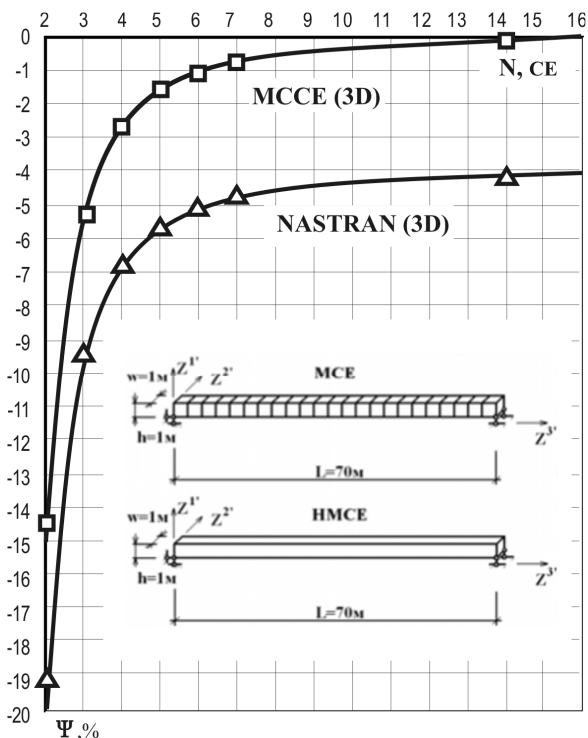


Рис. 4

Ефективність застосування скінченного елемента на основі моментної схеми та об'ємного (Brick) MSC/NASTRAN однакова. Рішення в межах 1% потребує використання сіткової області  $4 \times 4$  CE.

При використанні об'ємних скінченних елементів комплексів СКАД та ЛІРА збіжність значно повільніша і для досягнення 1%-ї похибки по першій формі коливаний потребує сітки  $30 \times 30$  CE. При використанні призматичного скінченного елемента (утворююча вздовж  $Z^3$ ) результат збігається вже при двох скінченних елементах (не приводиться на рисунку).

З метою апробації методики для тонкостінних тіл обертання були розглянуті коливання жорстко закріпленої по зовнішньому контуру кругової пластини радіусом 70м та товщиною 1м (рис. 6).

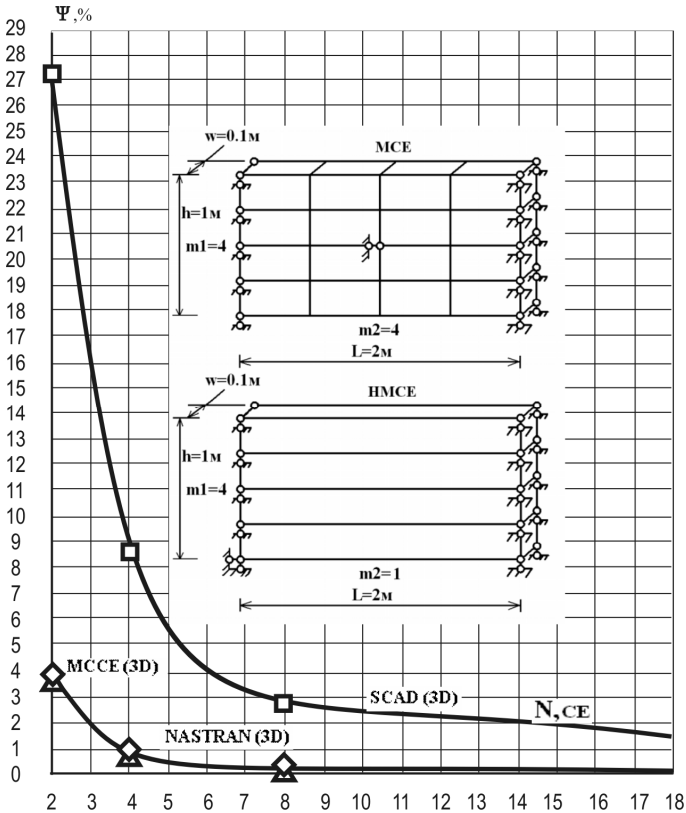


Рис. 5

Побудовані графіки збіжності першої власної частоти (рис.7) свідчать про те, що при використанні пластинчастих скінченних елементів комплексів SKAD та ЛПА вздовж радіуса плити похибка 1% досягається при 11÷12 скінченних елементах. Використання тривимірного об'ємного скінченного елемента комплексів SKAD та ЛПА призводить до значних похибок. Наприклад при апроксимації 140 скінченними елементами по ширині похибка складає близько 55%. На відміну від цього використання кільцевих скінченних елементів на основі моментної схеми потребує сіткової моделі із 14 скінченних елементів для досягнення точності в межах 1%. Збіжність розв'язків на основі об'ємного скінченного елемента MSC/NASTRAN досягається при 9÷10 CE вздовж радіуса плити. Похибка складає 5% та залишається однаковою при подальшому збільшенні сіткової моделі.

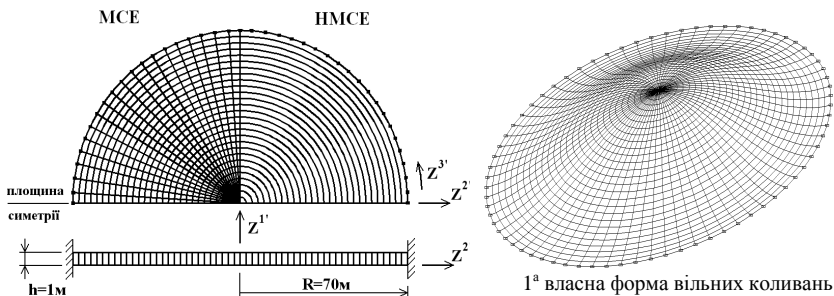


Рис. 6

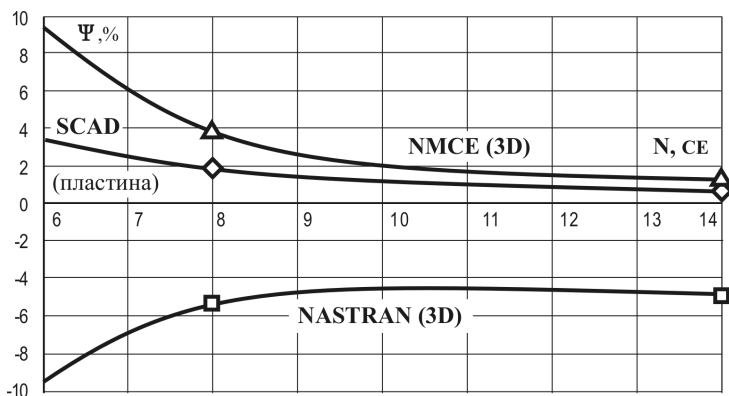


Рис. 7

Для дослідження ефективності кільцевого скінченного елемента при аналізі масивних тіл розглянуто диск радіусом 2м та товщиною 1м жорстко закріплений по зовнішньому контуру. Сіткова модель змінювалась як вздовж радіуса, так і по товщині диску. Результати показали однакову поведінку скінченноелементних баз комплексів СКАД, ЛІРА, MSC/NASTRAN та представлених кільцевих скінченних елементів.

Проведено аналіз динамічного деформування товстостінного металевого циліндру з вирізом, який апроксимувався неоднорідними кільцевими СЕ. Циліндр знаходиться під дією радіального рівномірнорозподіленого тиску, що миттєво прикладений до зовнішньої поверхні  $q = 1 \text{ Н/м}^2$  (рис. 8).



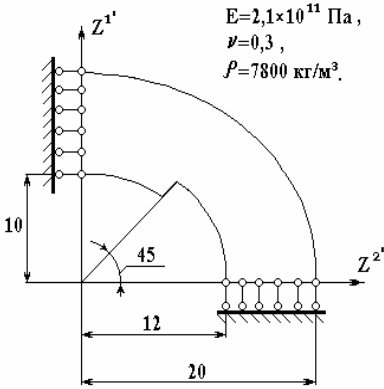


Рис. 8

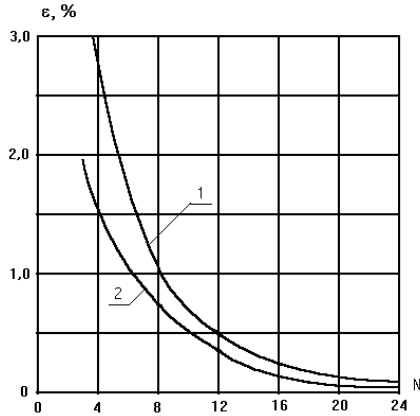


Рис. 9

Таблиця 1

## Порівняння результатів МСЕ і НМСЕ

№ форми	1	2	3	4	5
МСЕ	136.50	356.10	516.90	698.50	950.10
НМСЕ	136.60	357.60	517.60	698.70	954.20
$\epsilon, \%$	0.06	0.25	0.14	0.06	0.41

На першому етапі був проведений аналіз власних форм та частот МСЕ та НМСЕ. Відмінність результатів не перевищила 1% (табл.1). Другий етап - аналіз вимушених коливань циліндру за допомогою НМСЕ та МСЕ під дією рівномірнорозподіленого тиску по зовнішній поверхні. На рис.9 представлені графіки збіжності максимальних значень переміщень в залежності від числа функцій форми  $N$  (скінченні елементи для МСЕ (1) та кількість членів ряду Фур'є (2) для НМСЕ), які апроксимують циліндр вздовж окружної координати. За еталонні прийняті відповідні значення переміщень при утриманні 5 власних форм (подальше їх збільшення несуттєво впливало на кінцевий результат).

**Висновки.** Продуктивність методу скінченних елементів визначається багатьма факторами, серед яких одним з найважливіших є ефективність скінченноелементної бази. Для дискретизації означеного класу об'єктів в рамках задачі динаміки на основі моментної схеми скінченного елемента розроблені універсальні вісесиметричний, просторові кільцеві та неоднорідні прямолінійні призматичні скінченні елементи. Порівняння представленої бібліотеки скінченних елементів з відомими аналогами, що

реалізовані у популярних інженерних комплексах прикладних програм ЛІРА, СКАД і MSC/NASTRAN показало високу ефективність запропонованої бази скінченних елементів з точки зору швидкості збіжності результатів до точного при аналогічних варіантах апроксимації моделей та стійкість і вірогідність розв'язків для широкого спектру тонкостінних, масивних і комбінованих конструкцій.

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Солодей І.І., Шевченко Ю.В.* Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі динаміки для неоднорідних тіл обертання з довільними граничними умовами. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2005 р. - Вип. 77. - с. 3-29.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Топор О.Г., Солодей І.І.* Дослідження динамічної пружнопластичної взаємодії неоднорідних тіл на основі НМСЕ. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. –К.:КНУБА, 2000 р. - Вип.67. – с. 3-18.
4. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376 с.
5. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.І., Андрієвський В.П., Сизевич Б.І.* Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченого елемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності НМСЕ. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2005 р. - Вип. 76. - с. 3-26.
6. *Гуляр А.И., Козак А.Л., Сахаров А.С., Чорный С.М.* Применение МСКЭ к расчету круглых пластин и оболочек вращения. //Сопротивление материалов и теория сооружений. –1978. – Вып.33. – с. 81-85.
7. *Гуляр А.И., Сахаров А.С., Чорный С.М.* Сходимость моментной схемы метода конечных элементов в задачах упругого и пластического осесимметричного деформирования. //Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1978, №32 – с.3-10.
8. *Гуляр О.І., Топор О.Г., Солодей І.І.* Просторова задача динаміки для пружнопластичних неоднорідних тіл обертання в схемі напіваналітичного методу скінченних елементів. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. – К.:КНУБА, 1999 р. - Вип.66. – с.56-57.
9. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике.- М.: Мир, 1975- 539 с.
10. *Кислоокій В.Н., Сахаров А.С., Соловей Н.А.* Моментная схема метода конечных элементов в геометрически нелинейных задачах прочности и устойчивости оболочек. //Проблемы прочности. –1977. -№7. – с.25-33.
11. *Сахаров А.С., Кислоокій В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел.- Киев: Вища школа, 1982.- 479с.
12. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учетом жестких смещений. //Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1974. – Вып.24. – с.147-156.
13. *Солодей І.І.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в дослідженні пружнопластичних коливань неоднорідних призматичних тіл. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.:КНУБА, 2002 р. - Вип.71. – с. 3-17
14. *Wilson E.L.* Structural Analysis of Axisymmetric Solids. - 1965, AIAA J., Vol. 3, No 12, pp.2269-2274.