

УДК 539.3

МОМЕНТНА СХЕМА МСЕ ДЛЯ КРУГОВОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА

В.А. Баженов¹

д-р техн. наук

С.О. Пискунов¹

д-р техн. наук

О.О. Шкрить¹

канд. техн. наук

К.С. Романцова¹

аспірант

¹*Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

Наведені основні співвідношення просторової задачі теорії пружності для кругових тіл в місцевій криволінійній системі координат. На основі основних положень моментної схеми скінченних елементів отримано співвідношення між переміщеннями, деформаціями і напруженнями.

Ключові слова: просторова задача, момента схема МСЕ, напіваналітичний метод скінчених елементів, чисельне інтегрування.

Вступ. При розробці скінченно-елементної бази для розв'язання просторових задач теорії пружності суттєве значення має вибір відповідної схеми отримання розв'язувальних співвідношень. В роботі [5] було проведено отримання розв'язувальних співвідношень НМСЕ із використання моментної схеми МСЕ [4] для призматичного СЕ із чисельним інтегруванням. В даній роботі отримані співвідношення моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) для кругових тіл. В рамках напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) виведені співвідношення між переміщеннями, деформаціями та напруженнями, представленими в базисній циліндричній і місцевій фізичній системі координат.

1. Вихідні співвідношення просторової задачі теорії пружності для кругових тіл. Для дослідження процесів деформування та руйнування кругових тіл із змінними геометричними і фізичними параметрами доцільно використовувати наступні системи координат: базисну циліндричну z^j , яка є незмінною і призначена для задання вихідної інформації про геометрію об'єкта, зовнішні впливи та граничні умови (вісі z^1 та z^2 базисної системи координат розташовані в площині поперечного перетину тіла, а вісь z^3 орієнтована вздовж напрямної) і місцеву систему коорди-

нат x^i , природньо пов'язану з геометрією досліджуваного об'єкта, при цьому вісь x^3 збігається за напрямком з z^3 (рис.1).

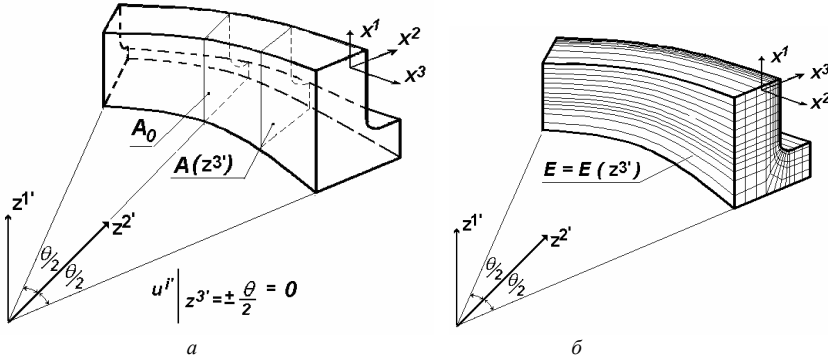


Рис. 1. Неоднорідне кругове тіло із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами (а) і дискретна модель НМСЕ (б)

Будемо вважати, що в кожній точці тіла відомі компоненти тензора перетворення z^i_j місцевої та базисної систем координат [3]:

$$z^i_j = \frac{\partial z^i}{\partial x^j}, \quad z^{\alpha}_3 = z^3_{,\alpha} = 0. \quad (1.1)$$

Тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, будуть приймати значення 1,2, а позначені латинськими – 1,2,3.

Компоненти метричного тензора g_{mn} в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензора базисної системи згідно з формулою:

$$g_{mn} = z^i_{,m} z^j_{,n} g_{i'j'}.$$

При дослідженні кругових тіл для базисної циліндричної системи координат відмінними від нуля будуть такі компоненти метричного тензора:

$$g_{\alpha\beta} = z^{\gamma'}_{,\alpha} z^{\gamma'}_{,\beta}, \quad g_{33} = (z^3_{,3})^2 (z^2)^2.$$

Запишемо співвідношення для визначення компонент деформацій ε_{ij} через переміщення u_i в місцевій системі координат [3]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) - u_k \Gamma^k_{ij}, \quad (1.2)$$

де Γ_{ij}^k – символи Крістофеля другого роду.

Подамо переміщення та символи Крістофеля в місцевій системі координат через їх значення в базисній:

$$u_k = u_s z_{s,k}^{s'}, \quad (1.3)$$

$$\Gamma_{ij}^k = x_{l,i}^k z_{l,i}^{m'} z_{l,j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{l'} + x_{l,i}^k z_{l,i}^{m'} \frac{\partial z_{l,j}^{l'}}{\partial z^{m'}}, \quad (1.4)$$

де $x_{l,i}^k$ – компоненти тензора, оберненого до виразу (1.1).

Після підстановки (1.3) та (1.4) в (1.2), зважаючи, що $z_{s,k}^{s'} \cdot x_{l,i}^k = \delta_{l,i}^{s'}$, одержимо загальний вираз для деформацій у місцевій системі координат через переміщення в базисній:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{l,i} z_{l,j}^{l'} + u_{l,j} z_{l,i}^{l'} \right) - u_{l,i} z_{l,i}^{m'} z_{l,j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{l'}. \quad (1.4)$$

У циліндричній базисній системі координат не дорівнюють нулю тільки такі символи Крістофеля:

$$\Gamma_{3'3'}^{2'} = -z^{2'}, \quad \Gamma_{3'2'}^{3'} = \Gamma_{2'3'}^{3'} = \frac{1}{z^{2'}}.$$

Тоді з формули (1.4) одержимо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(u_{\gamma',\alpha} z_{\beta'}^{\gamma'} + u_{\delta',\beta} z_{\alpha'}^{\delta'} \right); \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left(u_{3',\alpha} z_{3'}^{3'} + u_{\gamma',3} z_{\alpha'}^{\gamma'} - 2u_{3',\alpha} z_{3'}^{2'} z_{3'}^{3'} / z^{2'} \right); \\ \varepsilon_{33} &= u_{3',3} z_{3'}^{3'} + u_{2',3} z_{3'}^{3'} z^{2'}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Передбачається, що пружні деформації малі та пов'язані з напруженнями узагальненим законом Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (1.6)$$

Для ізотропного тіла компоненти тензора пружних сталей C^{ijkl} визначаються через коефіцієнти Ляме:

$$C^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu \left(g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk} \right),$$

де величини λ та μ визначаються через коефіцієнт Пуассона $\nu = \nu(z^{i'}, T)$

і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга) $E = E(z^{i'}, T)$:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

де T – температура.

Фізичні компоненти тензорів деформацій $\tilde{\epsilon}_{kl}$, напружень $\tilde{\sigma}^{ij}$ та пружних констант \tilde{C}^{ijkl} визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_{ij} &= \frac{\epsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}}, \quad \tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}, \\ \tilde{C}^{ijkl} &= C^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}g_{(kk)}g_{(ll)}}.\end{aligned}\quad (1.7)$$

2. Просторовий круговий скінчений елемент загального типу. Розглянемо скінченні елементи загального вигляду із змінними геометричними і фізичними параметрами. На характер розподілення механічних та геометричних параметрів по площі поперечного перерізу СЕ ніяких обмежень не накладається і вони обчислюються в деякій кількості точок інтегрування (рис. 2).

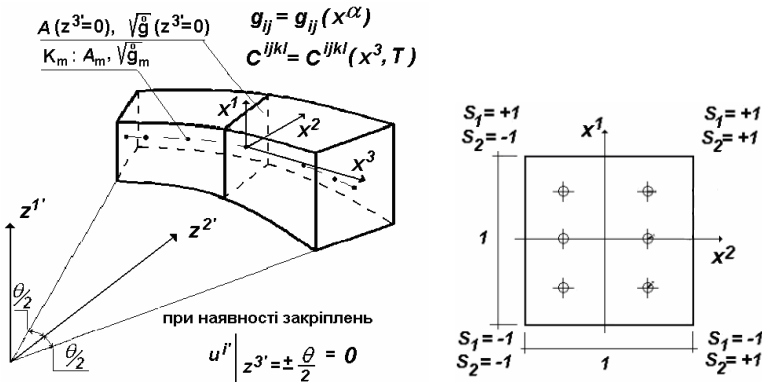


Рис. 2. Просторовий круговий скінчений елемент загального типу

Визначник матриці, складеної із компонент метричного тензора g_{ij} , є змінним за напрямною і обчислюється на основі вихідних даних про геометрію досліджуваного об'єкта – заданого закону зміни площі поперечного перерізу – із використанням співвідношення:

$$\sqrt{g(z^{3'})} = \frac{A(z^{3'})}{A_0} \sqrt{g|_{z^{3'}=0}} = f(z^{3'}) \sqrt{g|_{z^{3'}=0}}. \quad (2.1)$$

Як було показано у попередніх статтях використання такого підходу дозволяє моделювати напружено-деформований стан у випадку змінної вздовж твірної площі тіла як для призматичних тіл (при розтязі і згині) [5], так і для кругових тіл [3].

Розподілення переміщень в межах поперечного перерізу СЕ описується білінійним законом [1,2]:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (2.2)$$

де $u_{m'(S_1S_2)}$ – вузлові значення переміщень, що подані компонентами в базисній системі координат; S_1 і S_2 – координати, що визначають розташування вузлів відносно центру поперечного перетину елемента в місцевій системі координат x^i .

Визначимо похідні від переміщень в центрі поперечного перерізу СЕ виходячи з прийнятого закону їх розподілення (2.2):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{u}_{i'} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1S_2)}; \\ \overset{\circ}{u}_{i',\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1S_2)} S_\alpha; \quad \overset{\circ}{u}_{i',3} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1S_2),3}; \\ \overset{\circ}{u}_{i',12} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1S_2)} S_1 S_2; \quad \overset{\circ}{u}_{i',3\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1S_2),3} S_\alpha. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В напрямку твірної переміщення та їх похідні по напрямку x^3 апроксимуються розкладенням за системою координатних функцій $\varphi^{(l)}$ – поліномам Лагранжа ($l=0,1$) і Міхліна ($l=2,\dots,L$):

$$u_{m'} = \sum_{l=0}^L u_{m'}^l \varphi^{(l)}; \quad u_{m',3} = \sum_{l=0}^L u_{m',3}^l \varphi_3^{(l)}; \quad (2.4)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= \frac{1}{2}(1-x^3), \quad \varphi^{(1)} = \frac{1}{2}(1+x^3), \\ \varphi^{(l)} &= f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2-1)^{-1}}, \\ p^{(l)} &= \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k (l+k)!}{(l-k)! (k!)^2 2^{k+1}} \left[(1-x^3)^k + (-1)^l (1+x^3)^k \right]. \end{aligned}$$

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє найбільш просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, тобто шляхом виключення відповідних рівнянь.

Скінченні елементи, що пропонуються, орієнтовані на розрахунок широкого класу кругових тіл. Вони повинні забезпечувати не тільки високу точність подання напружено-деформованого стану конструкцій складної

форми, але і високу швидкість збіжності результатів до точного розв'язку. Як показано в роботах [1,2], застосування моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження просторових конструкцій на основі МСЕ. Окрім того МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла як жорсткого цілого, а також усуває явище “хибного зсуву”, що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

Подамо компоненти тензору фізичних деформацій в поперечних перерізах, що відповідають точкам інтегрування, у відповідності до МССЕ [2] відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\epsilon}_{12} = \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12}; \\ \tilde{\epsilon}_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\epsilon}_{33} = \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,\beta} x^\beta,\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\text{де } \tilde{\epsilon}^{ij} = \tilde{\epsilon}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}.$$

У відповідності з (1.6) фізичні компоненти тензора напружень визначаються за формулою:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl}, \quad (2.6)$$

Запишемо вираз для компонент тензора напружень (2.6) через коефіцієнти розкладу деформацій в ряд Маклорена (2.5):

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^{ij} &= \tilde{C}^{ij11} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11,2} x^2 \right) + 2\tilde{C}^{ij12} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12} + \tilde{C}^{ij22} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22,1} x^1 \right) + 2\tilde{C}^{ij13} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{13} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{13,2} x^2 \right) + \\ &+ 2\tilde{C}^{ij23} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{23} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{23,1} x^1 \right) + \tilde{C}^{ij33} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,1} x^1 + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,2} x^2 \right).\end{aligned}$$

Після перегрупування складників, що містять величини деформацій та їх похідних, застосовуючи позначення

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} &= \tilde{C}^{ijkl} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{kl}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,2} &= \tilde{C}^{ij11} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11,2} + \tilde{C}^{ij13} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{13,2} + \tilde{C}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,2}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,1} &= \tilde{C}^{ij11} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22,1} + \tilde{C}^{ij23} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{23,1} + \tilde{C}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,1},\end{aligned}$$

отримаємо скорочений запис закону Гука з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена в термінах фізичних величин:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,2} x^2 + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,1} x^1. \quad (2.7)$$

Відкидаючи з (2.7) члени вигляду $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{i\alpha}$ як ті, що не дають вкладення в енергію деформування елемента, подамо напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} x^{(3-\alpha)}; & \tilde{\sigma}^{12} &= \overset{\circ}{\sigma}^{12}; \\ \tilde{\sigma}^{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} x^{(3-\alpha)}; & \tilde{\sigma}^{33} &= \overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} x^{\alpha},\end{aligned}\quad (2.8)$$

де значення коефіцієнтів $\overset{\circ}{\sigma}^{ij}$ і $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij}$ обчислюються в точках інтегрування K_m , що розташовані в поперечних перерізах вздовж вісі x^3 (рис. 2).

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних напружень в ряд Маклорена з урахуванням подання фізичних компонент тензора напружень в місцевій системі координат:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)}; & \overset{\circ}{\sigma}^{12} &= g_{12}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{12}; \\ \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3} &= \sqrt{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3}; & \overset{\circ}{\sigma}^{33} &= g_{33}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{33}; \\ \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} &= g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)}; & \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} &= \sqrt{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3}; \\ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} &= g_{33}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{33}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Аналогічно, коефіцієнти розкладання компонент фізичних деформацій в ряд Маклорена матимуть наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ}} \varepsilon_{\alpha(\alpha)}; & \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}^{\circ} g_{22}^{\circ}}} \varepsilon_{12}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} &= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} g_{33}^{\circ}}} \varepsilon_{\alpha 3}; & \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} &= \frac{1}{g_{33}^{\circ}} \varepsilon_{33}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \left. \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \right|_{x^{\beta}=0} = \left. \frac{\partial (\varepsilon_{\alpha(\alpha)} / g_{\alpha(\alpha)})}{\partial x^{(3-\alpha)}} \right|_{x^{\beta}=0} = \\ &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ}} \left(\varepsilon_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \varepsilon_{\alpha(\alpha)} h_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^{\beta=0}} = \frac{\partial (\varepsilon_{\alpha 3} / \sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{33}})}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^{\beta=0}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{33}}} \left[\varepsilon_{\alpha 3, (3-\alpha)} - \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha 3} \left(\frac{g_{\alpha\alpha, (3-\alpha)}}{g_{\alpha\alpha}} + \frac{g_{33, (3-\alpha)}}{g_{33}} \right) \right] \Big|_{x^{\beta=0}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{g}_{33}}} \left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} \left(\overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)} + \overset{\circ}{h}_{33, (3-\alpha)} \right) \right] \\
\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33, \alpha} &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{33}}{\partial x^{\alpha}} \Big|_{x^{\beta=0}} = \frac{\partial (\varepsilon_{33} / g_{33})}{\partial x^{\alpha}} \Big|_{x^{\beta=0}} = \frac{1}{g_{33}} \left(\varepsilon_{33, \alpha} - \varepsilon_{33} \frac{g_{33, \alpha}}{g_{33}} \right) \Big|_{x^{\beta=0}} = \\
&= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33, \alpha} \right), \tag{2.10}
\end{aligned}$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \Big|_{x^{\alpha=0}}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij, \beta} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^{\beta}} \Big|_{x^{\alpha=0}}, \quad \overset{\circ}{h}_{ij, \delta} = \frac{\overset{\circ}{g}_{ij, \delta}}{\overset{\circ}{g}_{ij}}, \quad \overset{\circ}{g}_{ij, \delta} = \frac{\partial \overset{\circ}{g}_{ij}}{\partial x^{\delta}} \Big|_{x^{\alpha=0}}.$$

Коефіцієнтом розкладення $\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{x^{\beta=0}}$ нехтуємо, як величиною

більш високого порядку малості.

Запишемо ненормовані величини деформацій в криволінійній місцевій системі координат, через які подані фізичні коефіцієнти розкладу деформацій (2.10), через переміщення в базисній системі координат із використанням (1.5):

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(u_{\gamma', \alpha} z'_{, \beta}{}^{\gamma'} + u_{\delta', \beta} z'_{, \alpha}{}^{\delta'} \right) \Big|_{x^{\alpha=0}}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left(u_{3', \alpha} z'_{, 3}{}^{3'} + u_{\gamma', 3} z'_{, \alpha}{}^{\gamma'} - 2u_{3', \alpha} z'_{, 3}{}^{3'} / z'^2 \right) \Big|_{x^{\alpha=0}}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= u_{3', 3} z'_{, 3}{}^{3'} + u_{2', 3} z'_{, 3}{}^{3'} z'^2 \Big|_{x^{\alpha=0}}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} &= \frac{\partial \varepsilon_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^{\alpha=0}} = \frac{\partial (u_{\gamma', \alpha} z'_{, \alpha}{}^{\gamma'})}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^{\alpha=0}} = u_{\gamma', 12} z'_{, \alpha}{}^{\gamma'} + u_{\gamma', \alpha} z'_{, 12}{}^{\gamma'} \Big|_{x^{\alpha=0}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{\partial \varepsilon_{\alpha 3}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\alpha=0} = \frac{1}{2} \left(u_{3',12} z_{,3}^{3'} + u_{\gamma',3(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{\gamma'} + u_{\gamma',3} z_{,12}^{\gamma'} \right) - \\ &- \frac{1}{z^{2'}} \left(u_{3',(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{2'} z_{,3}^{3'} + u_{3'} \left(z_{,12} z_{,3}^{2'} - \frac{z_{,\alpha}^{2'} z_{,3}^{3'} z_{,(3-\alpha)}^{2'}}{z^{2'}} \right) \right) \Big|_{x^\alpha=0} \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0} = u_{3',3\alpha} z_{,3}^{3'} + u_{2',\alpha} \left(z_{,3}^{3'} \right)^2 z^{2'} + u_{2'} \left(z_{,3}^{3'} \right)^2 z_{,\alpha}^{2'} \Big|_{x^\alpha=0}. \quad (2.11) \end{aligned}$$

Введемо наступні позначення для значень похідних від переміщень і компонент тензора перетворення $z_{,i}^{m'}$ в центрі СЕ: $u_{m',i} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{u}_{m',i}$,

$z_{,i}^{m'} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{z}_{,i}^{m'}$. Тоді:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha} z_{,\beta}^{\gamma'} + \overset{\circ}{u}_{\delta',\beta} z_{,\alpha}^{\delta'} \right); \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{u}_{3',\alpha} z_{,3}^{3'} + \overset{\circ}{u}_{\gamma',3} z_{,\alpha}^{\gamma'} - 2 \overset{\circ}{u}_{3'} z_{,\alpha} z_{,3} / z \right); \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \overset{\circ}{u}_{3',3} z_{,3}^{3'} + \overset{\circ}{u}_{2'} z_{,3} z_{,3} z^{2'} \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \overset{\circ}{u}_{\gamma',12} z_{,\alpha}^{\gamma'} + \overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha} z_{,12}^{\gamma'} \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{u}_{3',12} z_{,3}^{3'} + \overset{\circ}{u}_{\gamma',3(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{\gamma'} + \overset{\circ}{u}_{\gamma',3} z_{,12}^{\gamma'} \right) - \\ &- \frac{1}{z^{2'}} \left(\overset{\circ}{u}_{3',(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{2'} z_{,3}^{3'} + \overset{\circ}{u}_{3'} \left(z_{,12} z_{,3}^{2'} - \frac{z_{,\alpha}^{2'} z_{,3}^{3'} z_{,(3-\alpha)}^{2'}}{z} \right) \right) \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \overset{\circ}{u}_{3',3\alpha} z_{,3}^{3'} + \overset{\circ}{u}_{2',\alpha} \left(z_{,3}^{3'} \right)^2 z^{2'} + \overset{\circ}{u}_{2'} \left(z_{,3}^{3'} \right)^2 z_{,\alpha}^{2'} \end{aligned}$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент деформацій з врахуванням прийнятого закону розподілення переміщень в поперечному перерізі СЕ (2.2):

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{\gamma'(S_1, S_2)} \left(S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{\beta'} + S_{\beta} \overset{\circ}{z}_{\alpha'} \right) \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{3'(S_1, S_2)} S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{3'} + \frac{1}{2} u_{\gamma'(S_1, S_2), 3} \overset{\circ}{z}_{\alpha'} - u_{3'(S_1, S_2)} \frac{\overset{\circ}{z}_{2', \alpha'} \overset{\circ}{z}_{3'}}{\overset{\circ}{z}_{2'}} \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{3'(S_1, S_2), 3} \overset{\circ}{z}_{3'} + u_{2'(S_1, S_2)} \overset{\circ}{z}{}^{2'} \left(\overset{\circ}{z}_{3'} \right)^2 \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{\gamma'(S_1, S_2)} \left(2S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{\alpha'} + S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{12'} \right) \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[2 \cdot u_{3'(S_1, S_2)} S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{3'} + u_{\gamma'(S_1, S_2), 3} \left(\frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{12'} + S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{\alpha'} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\overset{\circ}{z}_{3'}}{\overset{\circ}{z}_{2'}} u_{3'(S_1, S_2)} \left(\overset{\circ}{z}_{12'} + \overset{\circ}{z}_{\alpha'} \left(2S_{(3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{z}_{2', (3-\alpha)}}{\overset{\circ}{z}_{2'}} \right) \right) \right] \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \overset{\circ}{z}_{3'} \left[2u_{3'(S_1, S_2), 3} S_{\alpha} + u_{2'(S_1, S_2)} \overset{\circ}{z}_{3'} \left(\overset{\circ}{z}_{\alpha'} + 2S_{\alpha} \overset{\circ}{z}{}^{2'} \right) \right]. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Із урахуванням розкладу переміщень в напрямку твірної (2.4), отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів розкладу деформацій через коефіцієнти розкладу вузлових переміщень:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L u'_{\gamma'(S_1, S_2)} \left(S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{\beta'} + S_{\beta} \overset{\circ}{z}_{\alpha'} \right) \varphi^{(l)} \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L \left[\left(u'_{3'(S_1, S_2)} \overset{\circ}{z}_{3'} \left(S_{\alpha} - \frac{\overset{\circ}{z}_{2', \alpha'}}{\overset{\circ}{z}_{2'}} \right) \right) \varphi^{(l)} + \frac{1}{2} u'_{\gamma'(S_1, S_2)} \overset{\circ}{z}_{\alpha'} \varphi^{(l)} \right] \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L \left[u'_{3'(S_1, S_2)} \overset{\circ}{z}_{3'} \varphi_{3'}^{(l)} + u'_{2'(S_1, S_2)} \overset{\circ}{z}{}^{2'} \left(\overset{\circ}{z}_{3'} \right)^2 \varphi^{(l)} \right] \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L u'_{\gamma'(S_1, S_2)} \left(2S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{\alpha'} + S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{12'} \right) \varphi^{(l)} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha 3, (3-\alpha)}^{\circ} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L \left[u_{3'(S_1, S_2)}^{l'} z_{,3}^{\circ 3'} \left[2 \cdot S_1 S_2 - \frac{1}{z_{,2'}} \left(z_{,12}^{\circ 2'} + z_{,\alpha}^{\circ 2'} \times \right. \right. \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left. \left(2S_{(3-\alpha)} - \frac{z_{,3}^{\circ 2'}(3-\alpha)}{z_{,2'}} \right) \right] \right] \varphi^{(l)} + u_{\gamma'(S_1, S_2)}^{l'} \left(\frac{1}{2} z_{,12}^{\circ \gamma'} + S_{(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{\circ \gamma'} \right) \varphi_{,3}^{(l)} \right] \\ \varepsilon_{33, \alpha}^{\circ} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} z_{,3}^{\circ 3'} \left[\sum_{l=0}^L \left[2u_{3'(S_1, S_2)}^{l'} S_{\alpha} \varphi_{,3}^{(l)} + u_{2'(S_1, S_2)}^{l'} z_{,3}^{\circ 3'} \left(z_{,\alpha}^{\circ 2'} + 2S_{\alpha} z_{,2'}^{\circ 2'} \right) \varphi^{(l)} \right] \right]. \quad (2.13) \end{aligned}$$

Наведені співвідношення, які визначають зв'язок між переміщеннями і деформаціями а також між деформаціями і напруженнями в рамках моментної схеми СЕ, дозволяють отримувати розв'язувальні співвідношення НМСЕ для різних модифікацій кругового СЕ з перемінними геометричними і механічними параметрами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.: НИИСМ, 1993. – 376 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл: Монографія – К.: Каравела, 2014. – 298 с.
4. *Сахаров А.С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислооккий, В.В. Киричевский. – К.: Вища шк., 1982. – 480 с.
5. *Шкриль О.О.* Призматичний скінченний елемент на основі моментної схеми скінченних елементів // Опір матеріалів і теорія споруд. – № 93, 2014.– 19-26 с.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Hulyar A.Y., Sakharov A.S., Topor A.H.* Poluanalytycheskyy metod konechnykh elementov v mekhanike deformyruemykh tel (Semi-analytical finite element method in the mechanics of deformable bodies) – K.: NYYSM, 1993. – 376 s.
2. *Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Piskunov S.O., Saharov O.S.* Napivanalitychnyj metod skinchennykh elementiv v zadachakh rujnuvannya prostorovykh til: Monografiya – K.: KNUBA, 2005. – 298 s.
3. *Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Piskunov S.O., Saharov O.S.* Napivanalitychniy metod skinchennogo elementiv v zadachakh kontinualnogo rujnuvannya prostorovykh til: Monografiya – K.: Karavela, 2014. – 298 s.
4. *Sakharov A.S.* Metod konechnykh elementov v mekhanike tverdyykh tel (The Finite Element Method in Mechanics of Solids) / A.S. Sakharov, V.N. Kyslookyy, V.V. Kyrychevskyy. – K.: Vyshcha shk., 1982. – 480 s.
5. *Shkriil' O.O.* Pryzmatychnyj skinchennyj element na osnovi momentnoyi sxemy skinchennykh elementiv // Opir materialiv i teoriya sporud, № 93, 2014.– 19-26 s.

Баженов В.А., Пискунов С. О., Шкріль О.О., Романцова К. С.

МОМЕНТНАЯ СХЕМА МКЭ ДЛЯ КРУГОВОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Приведены основные соотношения пространственной задачи теории упругости для круговых тел в местной криволинейной системе координат. На основании положений моментной схемы конечных элементов получено соотношения между перемещениями, деформациями и напряжениями.

Ключевые слова: пространственная задача, моментная схема МКЭ, полуаналитический метод конечных элементов, численное интегрирование, упругое деформирование.

Bazhenov V., Pyskunov S., Shkril' A., Romantsova K.

MOMENTARY SCHEME OF FEM FOR CIRCULAR FINITE ELEMENT

Basic correlations of spatial problem of theory of elasticity are resulted for circular bodies in the local curvilinear coordinates system. On the basis of substantive provisions of momentary scheme of finite elements the relations between displacements, deformations and stress values are obtained.

Keywords: spatial problem, momentary scheme of FEM, semianalitic finite element method, numerical integration, elastic deformation.