

Міхайленко Віктор Мефодійович

Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри ІТППМ, ORCID 0000-0002-9573-9873

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

Філонов Юрій Петрович

Кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, ORCID 0000-0002-1100-4854

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

**НЕОБМЕЖЕНІСТЬ ЗА ЙМОВІРНІСТЮ СИСТЕМ, ЩО КЕРУЮТЬСЯ
ЗАГАЛЬНИМ ОДНОРІДНИМ ЛАНЦЮГОМ МАРКОВА**

Анотація. Досліджено параметр складної системи, малі значення якого відповідають кризам, а великі – розвитку, в припущенні, що цей параметр є функціоналом деякого загального однорідного ланцюга Маркова. Наведено умови, в яких відносна частота криз прямує до 0 з ймовірністю 1 та за ймовірністю цей параметр розвитку необмежено зростає. Розглядаються економічні моделі (межа самоокупності та тимчасові кризи) та динаміка популяції бактерій. Результати виводяться з доведеної тут схеми одержання ознак непозитивності ланцюгів Маркова.

Ключові слова: процес Маркова; ланцюг Маркова; дискретний простір; фазовий простір

Вступ

У роботі для систем, керованих однорідним ланцюгом Маркова (л.М.), наводиться схема отримання тверджень про необмежене (за ймовірністю) зростання системи і показано як схема працює. Матеріал роботи відноситься до кола питань найбільш повно описаних в [1].

Зміст основного результату – теореми 1 – інтегральний критерій непозитивності загального однорідного л.М. Інші інтегральні критерії розглядалися в роботах [1-3]. Розглянуто деякі моделі з економічним та біологічним змістом.

Теорема 2 розрахована на моделі зростання [5]. Теорема 3 відноситься до застосувань в економіці, теорії масового обслуговування (ТМО).

Мета статті

Мета статті – дослідження параметра складної системи, малі значення якого відповідають кризам, а великі – розвитку. Для роботи з результатами достатньо початкових знань з ТМО, для вивчення доведення теореми 1 в розділі 2-6 [6].

Застосування в економіці та елементи ТМО є в роботах [7] (дискретний простір, дискретний та неперервний час) та [8], деякий підхід до даної роботи коротко є в [9]. Інтегральні умови іншого математичного характеру є в роботі [10] за участі авторів цієї роботи.

Виклад основного матеріалу

1.1. Фазовий простір E л.М. (ξ_n) . Дано загальні вимоги до ланцюга (ξ_n) , до E і до тест-функції $F = F(x) > 0, x \in E$ із теорем в термінах [6]

(а потім, в п.1.2., опишемо E детально без термінів з [6], щоб врахувати можливі поєднання дискретних і неперервних складових).

1.1.1. У фазовому просторі E σ – алгебра подій сепарабельна, ланцюг (ξ_n) незвідний, множини $(F < C)$ для великих C є скінченні суми мінорантних множин $((F < C) = \{x | F(x) < C\})$, F – невід’ємна функція на E).

1.1.2. Зауваження про дискретний простір:

Нехай міра μ кожної 1-точкової множини $= 0$ або > 0 . Тоді: сепарабельність – це наслідок зчисленності (дискретності) E ; незвідність – досяжність ланцюгом будь-якої множини A , $\mu A > 0$, з будь-якого стану і недосяжність множини A , $(\mu A = 0)$, із станів x , для яких $\mu\{x\} > 0$, (міра μ максимальна в сенсі нерозширюваності носія: не можна $\mu\{x\} = 0$ замінити на $\mu\{x\} > 0$ ні для яких x). Тобто незвідність означає наявність тільки одного замкнутого класу станів, що сполучаються, досяжного з усіх станів.

Мінорантні (small) множини – це, зокрема, множини $\{x\}$, $\mu\{x\} > 0$.

1.2. Загальна прикладна структура E (але досить часткова для вимоги 1.1.1.).

1.2.1. E вкладається в деяке R^n з наслідуванням околів точок, $E = E' + E^{(1)} + E^{(2)} + \dots$ (доданки не перетинаються), $E^{(i)}$ є зворотні гладкі образи $R^m (m = m(i))$, іншими словами точки, лінії, поверхні.

1.2.2. В $E^{(i)}$ звичайна міра з R^m (1-нична ($m = 0$), довжина ($m = 1$), площа ($m = 2$), ...) або її еквівалентна ($\mu_1 \sim \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1(dx) = p(x)\mu_2(dx)$, щільність $p(x) > 0$ на R^m), μ є сумою (по i) таких мір, $E \setminus E'$ – носій μ , ($\mu E' = 0$); $p(x, y)$ ($p^{(n)}(x, y)$) – щільності перехідних ймовірностей (за n кроків) по μ , ($i = 1, 2, \dots$).

1.2.3. У будь-якої точки $x \in E^{(i)}$ є окіл $V(V \subset E^{(i)})$, для якого $p^{(n)}(x, y) > \varepsilon > 0$ ($x, y \in V, \varepsilon, n$ залежать від V), V досяжна (тобто $\sum_1^\infty p^n(x, V) > 0$) із будь-якого стану E ($i = 1, 2, \dots$).

В описаних умовах (1.2.1. – 1.2.3): простір подій є сепарабельним, μ визначає незвідність ланцюга, μ – максимальна. Околи V з 1.2.3 – мінорантні множини, тобто виконується 2.1.1 (для F потрібно перевіряти можливість скінченного покриття множин ($F < C$) околами V , часто це зводиться до очевидної можливості виконання покриття обмеженої множини скінченною кількістю околів).

Перед п.1.3 нагадаємо знаки $a^{(-)} = \begin{matrix} + \\ (-) \end{matrix} a \vee 0; \vee(\wedge) - \max(\min)$

1.3. Теорема 1 (основна). Нехай для л.М. (ξ_n) разом з умовою 2.1.1 виконуються такі умови 1.3.1-1.3.4. ($\varepsilon, c_1 = \text{const} > 0$):

1.3.1. Функції F, φ, f – необмежені (φ, f – невід’ємні, задані на $[0; \infty)$); φ, f – зростають, f – опукла вгору;

1.3.2. $P\Delta F(\Delta\varphi \wedge I)$ і $|a|$ обмежені на E ; тут $\Delta F = |\delta F|, \delta F = F(y) - F(x), \Delta\varphi = |\varphi(F(y)) - \varphi(F(x))|, a = a(x) = P\delta F = \int P(x, dy)\delta F = M(F(\xi_{n+1}) - F(\xi_n)) \xi_n = x$ – середній стрибок $F(\xi_n)$ в т. $\xi_n = x$;

1.3.3. $P(\delta f < -\varepsilon) > \varepsilon$ при $F(x) > C_1$; тут $\delta f = f(F(y)) - f(F(x))$;

1.3.4. $\sum a_m^- < \infty$; тут $a_m^- = \max(a^- | m \leq f(x) < m+1)$.

Тоді ланцюг неперитивний (часто пишуть неергодичний), $F(\xi_n) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ за ймовірністю (тобто $P\{F(\xi_n) > C\} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ при будь-якому C).

Неперитивність для нашого ланцюга це є відсутність стаціонарності при будь-якому початковому розподілі. Розглядається доведення

теорема 1 в розділах 2-6, мотиви вибору F, φ, f в п. 4.2.

Якщо в теоремі 1 узяти $F = f^2, u = f(x) \in \tilde{E} = [l, \infty)$ (зсув f дозволяє зсунути інтервал \tilde{E}), то отримаємо 1.3.5.

1.3.5. Наслідок.

Позначимо $v = f(\xi_{n+1}) - f(\xi_n) = f(y) - f(x)$ – стрибок функціонала f , $\alpha_{1,2}$ – моменти стрибка ($\alpha_1(x) = Pv, \alpha_2(x) = P(v^2)$). Якщо для деякого числа $c > 0$ та спадної функції $\psi(u) > 0$ справедливі умови:

- а) $-\psi < 2u\alpha_1 + \alpha_2 < c, \alpha_2 < c$;
- б) $p(v < -1/c) > 1/c (u > c)$;
- в) $\int_1^\infty \psi du < \infty$,

то марковський ланцюг неперитивний, $u_n = f(\xi_n) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ за ймовірністю, відносна частота подій ($u_i < c$), $i < n$, напевно прямує до нуля ($c = \text{const}, n \rightarrow \infty$).

Доведення наслідку. Маємо 1.3.3, як умову б) наслідку. Так як $a = P((u+v)^2 - u^2) = 2u\alpha_1 + \alpha_2$, то $a_m^- < \psi(m)$ з умови а).

Значить ряд в 1.3.4 збігається за інтегральною умовою Коші (див. умову в) наслідку). Далі (аналогічно доведенню з 1.4, але при $\varphi = \ln u$):

$$\Delta\varphi = |\ln(1+v/u)| < 2|v|/u \text{ при } |v| < u/2 \text{ і відповідно } \Delta F(\Delta\varphi \wedge I) < |2uv+v^2| \cdot \frac{2|v|}{u} \leq (2|v|+|v|/2) \cdot 2|v| < 5|v|^2, \text{ а}$$

$$\text{при } |v| \geq u/2 \text{ теж } \Delta F(\Delta\varphi \wedge I) \leq \Delta F = (2uv+v^2) \leq 4v^2+v^2 = 5v^2,$$

тобто 1.3.2. виконується, оскільки $P5v^2 = 5\alpha_2$ обмежена за умовою а) наслідку. Поведінка відносно частоти є наслідком неперитивності. Наслідок доведений.

1.3.6. Часто для марковських систем є область значень параметрів, для яких процес ергодичний і область, де процес неергодичний. Складнощі виникають там, де в деякому сенсі система на спільній межі цих областей.

Наприклад, беремо випадкове блукання зі збуренням в околі одиниці (див. 1.3.5 при $u = x$ та без а)-в), але коли v – однаково розподілені і $|v| < c$ при $u > c$). Тоді при $\alpha_1 < -1/c < 0$ буде ергодичність, а при $\alpha_1 \geq 0$ – неергодичність, це відомі критерії Фостера та неперитивності [1; 2]. Наші процеси з 1.3.5. містять, як часткові випадки, і «межеве» блукання з $\alpha_1 = 0$ і просторово неоднорідні процеси з умовою $\alpha_1(u) < 0 (u > c)$

(зміщення характеристик «в бік ергодичності»), які тим не менш, зберігають неергодичність.

Усі результати цієї роботи – «білямежеві», ймовірностні, належать до нескінченного проміжку часу, тому практична перевірка завжди має помилки першого та другого роду.

1.3.7. Приклад застосування теореми 1. Нехай p – щільність популяції бактерій в середовищі (можливі варіанти із забрудненням, старіння системи).

Зазвичай мала p експоненціальна у часі, а далі обмежувальні фактори логістику змінюють. Якість (здоров'я системи) оцінюємо величиною $u = -\ln p$.

З вищесказаного велике u (що відповідає малим p) змінюється лінійно. Вважаємо $u \geq 1$ (вибір одиниць). Подія ($u < u_{кр}$) означає хворобу (злам системи).

Нехай ще постійно є дія лікування (профілактики, очищення системи). Маємо $u_{n+1} = u_n + v$ ($n = 0, 1, \dots$ – час). Середню різницю дій лікування та зараження позначимо $Mv = Pv = \alpha_1$. Позначимо σ – середнє квадратичне відхилення показника v , $\alpha_2 = \sigma^2 + \alpha_1^2$.

Вважаємо, що система розвивається як марківський ланцюг в сенсі 1.2 і виконуються умови подібні (1.3.5 а)-в):

- (а) $-cu^{-1,01} < 2u\alpha_1 + \sigma^2 < c, \sigma^2 < c$;
- (б) $p(v < -1/c) > 1/c(u > c > 1)$.

Величини u, α_1, σ^2 є функціями стану системи.

Працює наслідок 1.3.5. (узяти $\psi = u^{-1,01}$, тоді в) очевидне, (б) співпадає з б); з (а) випливає $|\alpha_1| < c/2$, тобто а) теж виконується з іншим c .

Умова (б) означає, що є відокремлена від 0 можливість погіршення стану, коли він не найгірший. Умова (а) означає асимптотичне наближення до «стабільності» $\alpha_1 = 0$ ($u \rightarrow \infty$): грубо кажучи, за одиницю часу стабільний % «розмноження» бактерій компенсується «загибеллю» цього додаткового % профілактичними засобами або ліками (можливі випадкові коливання), але реально (при неідеальному здоров'ї, тобто $u < \infty$) компенсація може бути, особливо при великому зараженні, неповною. Припустимо повну вибіковність хвороби за скінченний в середньому і обмежений час, але не загибель повної колонії бактерій, які продовжують жити за тим же законом в тому ж середовищі. Наша теорема 1 (конкретніше – наслідок 1.3.5) каже, що прості відхилення (а), (б) від «стабільності» не дають регулярного повторення хвороби, бо відносна частота повторень повинна напевно наближатися до нуля.

Запишемо теорему 2 – ще один наслідок теореми 1 з розрахунком на моделі зростання (але не тільки), так як допускається зростання абсолютних моментів скачків для $F(\xi_n)$ при зростанні $F(x) (\xi_n = x)$.

1.4. Теорема 2. Твердження основної теореми справедливе, якщо виключити її умови з функцією φ , але ввести умову: $\frac{a_2}{F+1}$ обмежено на E ($a_2 = P(\Delta F)^2$ другий початковий момент стрибка для $F(\xi_n)_{\xi_n=x}$).

Доведення. Візьмемо $\varphi = \ln(F+1)$. Будемо писати $\ln F$, вважаючи $F \geq 1$. При $\frac{\Delta F}{F} \geq \frac{1}{2}$ буде

$$(\Delta\varphi \wedge 1) \leq 1 \leq \frac{2\Delta F}{F}, \quad \text{а при } \frac{\Delta F}{F} \leq \frac{1}{2} \quad \text{буде}$$

$$\Delta\varphi \wedge 1 \leq \Delta\varphi = |\ln|F + \Delta F| - \ln F| = \left| \ln \left(1 + \frac{\Delta F}{F} \right) \right| \leq 2 \frac{|\Delta F|}{F}$$

(із розкладу $\ln(1+z) \leq |z| + \frac{|z|^2}{2} + \frac{|z|^3}{3} + \dots$ при $|z| \leq \frac{1}{2}$).

Тобто в будь-якому випадку

$$P\Delta F(\Delta\varphi \wedge 1) \leq 2 \frac{P(\Delta F)^2}{F} = 2 \frac{a_2}{F}, \quad \text{отже для}$$

$\varphi = \ln(F+1)$ (повернулись знову до $F+1$) виконуються всі умови теореми 1 (перевірили тільки неочевидне). Кінець доведення.

1.5. Процес отримання доходів. Опишемо процес, який використовується в подальшому економічному додатку.

Нехай, в стабільних умовах, послідовно від клієнтів фірма отримує (на візит) доходи $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots$ – однаково розподілені випадкові величини (в.в.) з першими двома моментами θ_1, θ_2 , незалежні в сукупності і від часового потоку появи клієнтів. Як це зазвичай передбачають в ТМО, дохід за час t буде $\theta(t) = \theta^{(1)} + \dots + \theta^{(\eta)}$, де $\eta = \eta(t)$ – пуасонівський процес, $M\eta(t) = \lambda_t = t\lambda_1 = \lambda$. Тоді $\theta(t)$ – відомий процес з незалежними стаціонарними приростами. Розподіл $\theta(t)$ – складний пуасонівський (але дискретність $\theta^{(i)}$ не передбачається, оскільки розподіл доходів осіб в економіці описують, наприклад, неперервним логнормальним розподілом). Опускаючи звичайні викладки, можна записати: $M\theta(t) = \lambda_t \theta_1; M\theta^2(t) = \lambda_t^2 \theta_1^2 + \lambda_t \theta_2$.

По центральній граничній теоремі (ЦГТ) при $\lambda_t \rightarrow \infty$ (тобто при $t \rightarrow \infty$) (ЦГТ застосовна для процесів з незалежними стаціонарними приростами

зі скінченням другим моментом) для $I_\lambda = \frac{\theta(t) - \lambda_1 \theta_1}{\sqrt{\lambda_1 \theta_2}}$ буде $P\{I_\lambda \leq -C\} \rightarrow \varepsilon_c > 0 (\lambda \rightarrow \infty)$.

1.5.1. Зауваження до наступного пункту 1.6.: складний пуасонівський розподіл має перетворення

Лапласа $\exp(\lambda(\tilde{\varphi} - 1))$, де $\tilde{\varphi}$ є перетворенням для $\theta^{(1)}$ (використовується в застосуваннях). Час будемо вважати фіктивним: 2 однакових пункти прийому з частотою клієнтів λ дадуть за 1 годину той же розподіл доходів (в сумі), що і перший пункт за 2 години. Тобто будемо рахувати частоту (за 1 сталий період) $\lambda = \lambda(x)$ як величину пов'язану з станом (розміром і т.п.) фірми, а не часом.

1.6 Динаміка розміру фірми. Вважаємо, що послідовність станів $\xi_n \in E$ фірми (n – номер за кількістю періодів часу) в стабільних умовах є однорідний л.М., який разом з функцією $F(x)$ (капітал фірми) задовільняє формальним умовам 1.1.1. За період F змінюється на величину $\theta - r$, де $r = r(x)$ – в сумі очікувані відомі витрати (зарплата, страхові внески, поповнення резерву, ...), θ (складна пуасонівська в.в., см. 1.5.1) – дохід з відомим $\lambda(x)$ – середнім очікуваним числом клієнтів, які в середньому приносять дохід θ_1 на одне обслуговування клієнта, проценти з капіталу вилучаються з розгляду (йдуть акціонерам). При досяганні рівня $F < F_{кр}$ фірма оновлюється (отримання страховки, рекапіталізація, нові володарі з інвестиціями, ...) і процес продовжується (тобто немає обриву л.М.). Позначимо $a = a(x) = \lambda\theta_1 - r$ – середній приріст капіталу. Для простоти далі $F, r \geq 2$ (копійок), але зверху F теоретично необмежена.

Теорема 3. Нехай функція $\rho = \rho(F) \geq 0$ є незростаючою по F і такою, що $\Phi = \rho F \ln^2 F$ не спадає. При виконанні умов (числа $c_{1,2} > 0$):

$$(1.6.1) \quad -\frac{c_1}{\Phi} \leq a \leq c_2;$$

$$(1.6.2) \quad \frac{c_1}{\rho^2} \leq \lambda \leq c_2 F$$

величина $F(\xi_n) \xrightarrow{P} \infty (n \rightarrow \infty)$, фірма розвивається як неопозитивний марківський ланцюг.

Зауваження. Наприклад функції $\rho = 1$,

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{F}}, \quad \rho = \frac{1}{\ln^2 F}$$

можна використовувати в застосуваннях.

Доведення. Визначимо $f(F) = \int_0^F \rho dF$ і перевіримо умови теореми 2.

Із (1.6.2.) випливає нерівність $\rho \geq \sqrt{\frac{c_1}{c_2 F}}$, тобто $f(F)$ необмежена, опуклість вгору є наслідком незростання $\rho = f'(F)$.

Далі $|a|$ (а значить і a^2) обмежені по (1.6.1.), так як Φ не спадає.

Із п.1.5. отримуємо $a_2 = M(\theta - r)^2 = M((\theta - \lambda\theta_1) + a)^2 = \lambda\theta_2 + a^2 \leq c_2 F \theta_2 + a^2$ (див. 2.6.2.). Сумуючи, в результаті отримуємо обмеженість $\frac{a_2}{F+1} + |a|$ для теореми 2.

Перевіримо 4.3.3. Нерівність $\delta F < -\varepsilon$ через опуклість $f(F)$ виконується при $\rho \delta F = f'_F \delta F < -\varepsilon$.

Достатньо перевірити, що $\delta F = \theta - r < -\frac{\varepsilon}{\rho}$ з

ймовірністю $> \tilde{\varepsilon}$ (число $\tilde{\varepsilon} > 0$). Нехай $\varepsilon \downarrow 0, c \uparrow \infty, \varepsilon \sqrt{c} \downarrow 0$. При $\lambda > c$ буде (на основі (2.6.1-2)) $\frac{a + \varepsilon \rho^{-1}}{\sqrt{\lambda \theta_2}} = \frac{a}{\sqrt{\lambda \theta_2}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda \rho^2 \theta_2}} \leq \frac{c_2}{\sqrt{c \theta_2}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{c_1 \theta_2}}$ спадає

величина. Значить ймовірність $P\left(\theta - r < \frac{-\varepsilon}{\rho}\right) = P\left(\frac{\theta - \lambda \theta_1}{\sqrt{\lambda \theta_2}} \leq -\frac{a + \varepsilon \rho^{-1}}{\sqrt{\lambda \theta_2}}\right) > \tilde{\varepsilon}$ за ЦГТ

(див.2.5.) при деякому $\tilde{\varepsilon} > 0$. При $\lambda \leq c$ буде $\varepsilon \rho^{-1} \leq 2 \leq r$, так як $r \geq 2$ за умовою,

$$\rho^{-1} \leq \sqrt{\frac{\lambda}{c_1}} \leq \sqrt{\frac{c}{c_1}}$$

за 1.6.2. і за припущенням $\varepsilon \sqrt{c} \downarrow 0$. Значить у нас буде $\theta - r \leq -\varepsilon \rho^{-1}$ з ймовірністю більшою ніж $P(\theta = 0)$. Але ця ймовірність є ймовірністю відсутності клієнтів, тобто $e^{-\lambda}$ за розподілом Пуасона, і при $\lambda \leq c$ буде $e^{-\lambda} > \tilde{\varepsilon} = e^{-c}$.

Залишилося перевірити 1.3.4. Із нерівності $a^- \leq \frac{c_1}{\Phi}$ (2.6.1) і зростання $\Phi = \Phi(F)$ випливає, що

достатньо встановити збіжність ряду $\sum \frac{1}{m \Phi(F_m)}$, де

F_m визначається з рівності $m = f(F_m)$. Ця збіжність виконується за інтегральним критерієм Коші ($\Delta f = (m+1) - m = 1$):

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{\Phi(F)} df(F) = \int_2^{\infty} \frac{fF'}{\Phi} dF = \int_2^{\infty} \frac{\rho}{\Phi} dF = \int_2^{\infty} \frac{1}{2F \ln^2 F} dF < \infty.$$

Теорема доведена.

1.7. Приклад (більш конкретний випадок теореми 3). Нехай фірма (див. описання перед теоремою 3) при зміні капіталу F змінює кількість робочих місць (може і їх географію, ще щось) десь у порядку $F^{0.5}$ (між $\varepsilon F^{0.5}$ та $\frac{1}{\varepsilon} F^{0.5}$, число $\varepsilon > 0$) і, таким же чином, відповідно змінюється $\lambda(x)$ – (середня) кількість обслуговувань клієнтів (за період). Витрати $r_I(x)$ на одне обслуговування при цьому тримаються в інтервалі.

$$(1.7.1) \quad \theta_I - cF^{-0.5} < r_I < \theta_I + cF^{-1.26}, \quad \text{число } c > 0.$$

Стверджуємо: відносна кількість критичних ситуацій ($F < F_{кр}$) з часом напевно прямує до 0.

Зауважимо про правдоподібність у простих випадках умови $r_I = \theta$, як межі самоокупності.

Доводимо твердження. Візьмемо $\rho = F^{-0.25}$ в теоремі 3. Тоді (1.6.2) виглядає як $c_1 F^{0.5} \leq F^{0.5} < c_2 F$ (виконується, $C_{1,2}$ деякі). Так як $a = \lambda(\theta_I - r_I)$, то з (1.7.1) та з умови на порядок λ нерівність (1.6.1) виглядатиме так: $-c_1 F^{-0.75} \ln^{-2} F < -cF^{0.5} \cdot F^{-1.26} < cF^{0.5} \cdot F^{-0.5} < c_2$ (виконується при відповідних $c_{1,2}, c$). За теоремою 3 маємо неперервність ланцюга, що тягне за собою наше твердження.

Загальні відомості

2.1. Дамо математичні означення додатково. Додатні ядра $P = P(x, dy), G, Q$ (з індексами теж) визначені на просторі E з сепарабельною σ – алгеброю. Про властивості, зв'язані з ядром P , говоримо P – властивість, наприклад: P – ланцюг – л.М. з перехідною ймовірністю $P = P(x, dy)$; P – с-г. функція – супергармонічна функція ($F \geq PF \geq 0$). Букви F, H, S далі – вимірні функції на E з значеннями в $R_+ = [0; \infty]$ значення ∞ можливе для мір, функцій ядер, при цьому $0 \cdot \infty = 0$; міри $\pi = \pi(dx), \mu$ додатні на E ; f, φ – зростаючі (\uparrow) функції ($R_+ \rightarrow R_+$); знак (\downarrow) для спадання, $\downarrow_n(\cdot)$ – границя спадної послідовності; n, m, i, l – натуральні числа, тобто елементи \mathbb{N} ; $(\cdot) \ll (\cdot)$ якщо $(\cdot) \leq (\cdot) \cdot \infty$, для мір і ядер це означає абсолютну неперервність, значить, існування відповідної щільності (оскільки E сепарабельно); оскільки $P, Q \ll P + Q$, то використанням щільності можна вводити

$$P \vee Q, (P - Q)^{\pm}, \downarrow_n Q_n, \uparrow_n Q_n \text{ для ядер, а не тільки}$$

мір, чисел, функцій (різниця розглядається тільки за відсутності істотної невизначеності (див. 2.2) $\infty - \infty, P \sim Q$ є еквівалентність ($P_{\infty} = Q_{\infty}$); ε, c з індексами – скінченні числа > 0 ; запис $F = O(H)$ означає виконання нерівності $F \leq cH$ для деякого c ;

$$F = o(H) \text{ при збіжності означає, що } \lim \left(\frac{F}{H} \right) = 0;$$

I – функція тотожно рівна одиниці, наприклад $F = O(1)$ говорить про обмеженість F .

Використовуємо прямий добуток (позначаємо точками) і згортку (без точок); наприклад далі (не з цієї роботи, на різних просторах будуть визначені ядра): $U(x, du, dt) = T(x, du) \Phi(x, u, dt) Q(x, u, t)$, коротко $U = T \cdot \Phi \cdot \Theta$ (прямий добуток), розглядається як ядро

$$U(x, A) = \int_A T(x, du) \Phi(x, u, dt) \Theta(x, u, t) = T \Phi \Theta \chi_A$$

(згортка). Також пишемо $U(x; A) = UA = U \chi_A = U(\cdot)$,

тобто ототожнюємо множину A , її індикатор χ_A , визначаючи цю множину A деяке висловлювання (\cdot) , наприклад $(2 < x < 3) = \chi(x < x < 3) = \{x | 2 < x < 3\}$.

В згортках позначення аргументів змінюється – для $F(x)$ і $P(x, dy)$ буде $PF = \int P(x, dy) F(y)$, але для $g(x, y)$ $Pg = \int P(x, dy) g(x, y)$.

2.2. Об'єкт, який вивчається в роботі це ядро P – перехідна ймовірність зворотного (1-зворотного [6]) л.М. з гармонічною мірою π , тобто $P1 = 1$, $\pi P = \pi$, $\pi \neq 0$ і π є максимальна міра, яка визначає незводимість P . Слова «істотно», «по мірі π », « π – м.в. (майже всюди)» скрізь опускаємо: $P1 \neq 0$ означає $\pi P1 > 0$; $H > 0$ означає $\pi H > 0$; необмеженість H означає, що немає обмеженості H ні на одній множині повної міри π , тобто H істотно необмежена. Функції F, H, S в роботі скінченні (тобто π – м.в.). Зворотні ядра P можуть бути 0-зворотні ($\pi 1 = \infty$) або додатньо зворотні ($\pi 1 < \infty$, тоді рахуємо $\pi 1 = 1$ і P – ланцюг з початковим розподілом π є стаціонарним).

Деякі загальні властивості ядер

та мір цієї роботи

У розділі виводяться деякі властивості, пов'язані з розбиттям $P = P_I + P', P_I \neq 0$, які в літературі наводяться для розбиття часткового виду (в [6] це звуження P на множину, виділення атомів). Далі $G' = \sum_{n \geq 0} P'^n$ – ядро потенціалу для P' , яке визначає середню кількість влучень P' – ланцюга (з обривом) в множини;

$H_\infty = \lim_n P'^n H$ (для інших функцій і мір $(\cdot)_\infty$ визначається аналогічно). Буквами D, D^* фіксуємо початок і кінець доведень.

3.1. $P'H \leq H, P_1 H = 0 \Rightarrow H = 0$. **D:**

$P'H + P_1 H = P H \leq H$ значить $H = c1$ як с.-г. функція або $H = 0$. Оскільки $P_1 H = 0, P_1 \neq 0$, то саме $H = 0$. **D***.

3.2. $I_\infty = 0$. **D:** $I = P^n I = P^n I + \sum_0^{n-1} P^i P_1 P'^{n-i-1} I$

(розклад бінома $(P_1 + P')^n$ по останньому включенню P_1). За монотоністю існують $I_\infty = \downarrow P'^n I$ і в границі для розкладу (збіжність в інтегралах) буде $I \geq I_\infty + G P_1 I_\infty$, де $G = \sum P^n = \infty$ з причини зворотності P . За необхідністю маємо $P_1 I_\infty = 0$, тобто. (див.3.1) $I_\infty = 0$. **D***

3.3. $G'h^+ < \infty$ (за визначенням $h = P H - H = P \delta H$), $\Rightarrow G'h^- + G'P_1 H + H_\infty = H + G'h^+$ зокрема існує гранична функція H_∞ . **D:** Із визначення h пишемо $h^- + (P_1 + P')H = H + h^+$. Множачи цю рівність на $P'^n (n=1,2,\dots)$ і сумуючи по n зі скороченнями $P^i H$ зліва і справа послідовно маємо існування необхідних елементів і рівність, яку доводимо **D***.

3.4. $\pi P_1 G' = \pi$. **D** За аналогією з доведенням в 4.2 (але, множачи на π зліва) пишемо $\pi = \downarrow \pi P^n = \downarrow \pi P'^n + \pi P_1 G'$. Залишилося побачити, що $\pi_\infty = \downarrow \pi P'^n = 0$ за дуальністю до п.4.2. **D***.

3.5. $\pi S < \infty \Rightarrow G'S < \infty$. **D:** Із 4.4. і визначення G' пишемо $\infty > \pi S = \pi P_1 G'S \geq \pi P_1 P^i G'S$. Так як (ще раз 3.4) $\sum \pi P_1 P^i = \pi$, то із попередньої нерівності $G'S < \infty$. **D***

3.6. $S < \infty \Leftrightarrow \mu S < \infty$ для деякої міри $\mu \sim \pi$ (проста властивість).

3.7. Якщо A є скінченна сума мінорантних множин, то $G'A$ обмежена функція. При цьому $P^n A \rightarrow 0$ для 0-зворотного ядра P . **D:** Якщо χ – індикатор мінорантної множини, то (див.[6]) $\chi = O(P^n P_1 I)$ для деякого n . Із співвідношень $P^n = P'^n + \sum_0^{n-1} P^i P_1 P'^{n-i-1}, P I = 1, P_1 I \leq 1$

отримуємо $\chi = O\left(\sum_0^n P^i P_1 I\right)$. Множачи зліва на G' з врахуванням нерівності $G'P' \leq G'$ отримаємо $G'\chi = O(G'P_1 I) = O(I)$, оскільки $G'P_1 I = 1$ по

дуальності до п.3.4. Перше доведення, а влістивість $P^n A \rightarrow 0 \in$ в [6]. **D***.

Основна лема. 4.1. Лема. (Позначення введені раніше, функція φ , нагадаємо, необмежена, неперервна зліва): $G'(P \Delta H (\Delta \varphi \wedge 1) + h^+) < \infty \Rightarrow H_\infty = 0$ (тут $\varphi = \varphi(H(x))$, за аналогією з $\varphi(F(x))$ в розділі 2).

Доведення наведено далі в п.4.2-6, введемо тут позначення для нього: $H_c = (H - C)^+, H_{\infty c} = (H_c)_\infty, h_c^\pm = (h_c)^\pm (h_c = P \delta H_c)$; індикатори $\chi_1 = (H(x) > c), \chi_2 = (H(x) \leq c < H(y))$ або $H(y) \leq c < H(x)$, $\chi_3 = (\Delta \varphi < 1), \overline{\chi_3} = 1 - \chi_3$ міра $\mu \sim \pi$ і $\mu G'(P \Delta H (\Delta \varphi \wedge 1) + h^+) < \infty$ (див. 4.6. і формування лема).

4.2. $\delta H_c \leq \chi_1 \delta H + \Delta H \chi_2$. **D:** Доведення слідує з усіх варіантів запису нерівності 4.2: а) При $H(y), H(x) \leq c$ буде $0 \leq 0$; б) при $H(x) \leq c < H(y)$ буде $H(y) - c \leq \Delta H$; в) при $H(y) \leq c < H(x)$ буде $c - H(x) \leq \delta H + \Delta H = 0$; г) при $H(x), H(y) > c$ буде $\delta H_c = \delta H \leq \delta H$. **D***.

4.3. $\mu G' P \Delta H \chi_2 \chi_3 \rightarrow 0$ для деякої послідовності $c = c_n \uparrow \infty$. **D:** За визначенням χ_2 пишемо $\int \chi_2 d\varphi(c) = \Delta \varphi$, а використовуючи теорему Фубіні і дані із 4.1. пишемо $\int \mu G' P \Delta H \chi_2 \chi_3 d\varphi(c) = \mu G' P \Delta H (\Delta \varphi \wedge 1) < \infty$. Тепер 4.3 впливає з необмеженості φ . **D***.

4.4. $\mu G' h_c^+ \leq \mu G' \chi_1 h^+ + \mu G' P \Delta H \chi_2 (\chi_3 + \overline{\chi_3})$. **D:** Послідовно в 4.2. множимо зліва на P , виконуємо операцію $(\cdot)^+$, множимо на $\mu G'$. **D***.

4.5. $\mu G' h_c^+ \rightarrow 0$ при $c = c_n \uparrow \infty$ із п.4.3. **D:** Враховуючи визначення μ в 4.1, властивість $\chi_{1,2} \rightarrow 0$ (при $c \rightarrow \infty$ і будь-яких x, y) і принцип обмеженої збіжності в 4.4. на основі 4.3 отримаємо необхідне. **D***.

4.6. $H_{\infty c} \leq H_c + G' h_c^+ (c = c_n$ із 4.3). **D:** Це впливає з нерівності $H_c^+ \leq h^+$, нерівності $G' h^+ < \infty$ (умова лема) і твердження п.3.3 для H_c . **D***.

4.7. $H_\infty = 0$. **D:** З очевидної нерівності $H \leq c1 + H_c$ і того, що $I_\infty = 0$ (див.3.2) впливає $H_\infty \leq H_{\infty c}$ (див. визначення $(\cdot)_\infty$ на початку розділу і п.4.1). Із п.4.6 можна записати: $\mu_1 H_\infty \leq \mu_1 H_{\infty c} \leq \mu_1 H_c + \mu_1 G' h_c^+ (\mu_1 \leq \mu, \mu_1 \sim \mu$ – зменшили μ із умови $\mu G' h^+ < \infty$ (див. 4.1), щоб забезпечити $\mu_1 H < \infty$ (див.3.6) і, $\mu_1 H_c < \infty$).

Переходячи до границі (при $c = c_n \uparrow \infty$) із п.4.5 отримаємо: $\mu_1 H_\infty \leq \downarrow \mu_1 H_{c_n}$ т.я. $\downarrow H_{c_n} = 0$. Значить $H_\infty = 0(\mu_1 \sim \mu \sim \pi)$. **D***.

Вибір тест функцій f, φ, F і ядер $P_1, P' = P - P_1$. 5.1. Часто мають справу з скінченновимірним простором \tilde{E} , в який відображається вимірно E ($u = \Phi(x), u \in \tilde{E}$) і функцію $F(x)$ для критеріїв шукають як $F = F(u)$ (вимірна), тобто $F(x) = F(u(x))$. При зростанні (строго) $\varphi = \varphi(F), f(F)$; є оберненість ($F = F(f), \dots$), тобто мова йде про вибір трійки функцій F, f, φ на \tilde{E} , монотонно змінних (див. теорему 1, наслідок 1.3.5 наприклад).

5.2. Звернемося до умови теореми 1. Очевидно $f'_F P \delta F \geq P \delta f$, коли є опуклість вгору і (вниз) функції f (при оберненні $F(f)$ тип опуклості змінюється).

Неформально: так як $\Delta \varphi \approx \varphi'_F \Delta F$, то збільшення ступеня зростання F (відносно f , f не змінюємо) обмежено умовою 1.3.2, оскільки φ'_F неможна сильно зменшити через потребу необмеженості φ , але збільшення зростання F корисне для виконання умови 1.3.4, так як (див. нерівність вище) зменшує носій a^- . Тепер про функції f : зменшення зростання f (F не змінюємо) корисне для умови 1.3.4, але може порушити умову 1.3.3. Повернемося до формального викладання.

5.3. Нехай $P'f \leq f, P'(\delta f < -\varepsilon) > \varepsilon$ на $(f > c)$ і ще виконується умова мінорантності 1.1.1, але для f ; $A_m = (m < f \leq m+1)$. Тоді $G'A_m = O((f \wedge m) + 1)$ рівномірно по m .

D: Поповнимо E точкою поглинання o' -точкою обриву P' -ланцюга ξ_n і нехай $f(o') = 0$. На основі $P'f \leq f$ отримуємо супермартиггал $f(\xi_n)$. Для нього за відомою теоремою про перетин відрізків середнє число перетинів відрізка $[m-1; m]$ супермартиггалом не перевищує $f(x) \wedge m$ за умови $\xi_0 = x$.

За умови «з ε » із п.5.3. з ймовірністю більшою ε^l , де $l = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, відбувається перетин відрізка $[m-1; m]$ супермартиггалом за умови

$m < f(\xi_0) \leq m+1$ (марковська властивість ланцюга), тут рахуємо $m-1 > c$. Це дає по тій же марківській властивості, твердження п.6.3 при $m-1 > c$. При $m-1 \leq c$ буде $G'A_m < \infty$ за наявності в умові мінорантності і на основі п.4.7. Таким чином 6.3. справедливо в цілому. **D***.

5.4. Якщо функція f опукла вгору, справедливо наступне ($f = f(F)$):

$$a) \quad \delta F < -k < 0 \Rightarrow \delta f < -k \frac{\delta f}{\delta F} \Rightarrow \delta f \leq -k f'_F$$

(просте твердження);

$$б) \quad P'F \leq F \Rightarrow P'f \leq f.$$

D: Послідовно: опуклість f дає $\frac{1}{P'1} P'f \leq f\left(\frac{P'F}{P'1}\right); f\left(\frac{P'F}{P'1}\right) \leq f\left(\frac{F}{P'1}\right)$ (неспадність f і умова); $f\left(\frac{F}{P'1}\right) \leq \frac{1}{P'1}$ (опуклість і додатність f). **D***.

5.5. $P'(\delta f \leq -\varepsilon) = P(\delta f \leq -\varepsilon)$ при $P = P'$ на $\delta f < 0$. Очевидно.

5.6. Вибір P' . Нехай $a = PF - F < \infty$; \tilde{P} є звууження P на $(a^+ > 0) \cap (\delta F > 0)$;

$$P_1 = \frac{a^+}{\tilde{P}F} \cdot \tilde{P}, P' = P - P_1. \quad \text{Тоді: } P_1 \neq 0, P' = P \text{ на } (\delta F \leq 0); P_1 F = a^+; P'F \leq F.$$

D: По-перше $a^+ \neq 0$, інакше функція F була б супергармонічною, і, через зворотність ланцюга, константою. По-друге, за визначенням P_1 буде $P_1 \neq 0$, $P' = P$ на $(\delta F \leq 0)$, $P_1 F = a^+$. Нарешті, через останню рівність буде $P_1 F = [(P_1 + P')F - F]^+ \geq P_1 F + P'F - F$.

Скорочуючи на $P_1 F$, маємо нерівність $P'F \leq F$. **D***.

Висновок

Доведення теореми 1. 6.1. Будемо вести доведення від протилежного. Нехай $\pi l < \infty$, тоді за умовою теореми $\pi(P \Delta F(\Delta \varphi \wedge 1) + a^+) < \infty$ і на основі п.3.5 виконуються умови основної леми (див.4.1) при $H = F$. Таким чином $F_\infty = 0$.

6.2. Виберемо P' як в п.5.6. Запишемо нерівність твердження п.3.3 для $H = F$, $h = a$; $G'a^- + G'P_1 F + F_\infty = F + G'a^+$. Підставляючи $P_1 F = a^+$ і $F_\infty = 0$ (див.5.6 і 6.1) маємо $G'a^- = F$.

6.3. Правильно $P'(\delta f < -\varepsilon) > \varepsilon$ на $(F > c_1)$ на основі: умова 1.3.3, твердження п.5.5 і п.5.6.

6.4. Виконується п.5.3 по п.6.3. при $(f > c) \subset (F > c_1)$, п.5.6. Значить $G'A_m = O((f \wedge m) + 1)$ рівномірно по m , тобто $G'A_m \leq c(1 + f)f_m$, де $f_m = \left(1 \wedge \frac{m}{f+1}\right) + \frac{1}{f+1} \leq 2$ (обмежено рівномірно по m, x) і прямує до 0 коли $F \rightarrow \infty$ (тобто $f \rightarrow \infty$) при кожному m .

6.5. Из п.6.2, умови 1.3.4 і п.6.4 можна писати $(A_m = (m < f(x) \leq m+1))$:

$$F = G'a^- \leq \sum_m G'A_m a_m^- < c(f+1) \sum_m f_m a_m^-.$$

За принципом обмеженої збіжності $\sum_m f_m a_m^- \rightarrow 0$ (при $F \rightarrow \infty$), тобто

$F = o(f)(F \rightarrow \infty)$, що суперечить опуклості f вгору. Теорема 1 доведена.

Список літератури

1. Meyn S.P., Tweedie R.L. (1993). *Markov chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, New York.
 2. Tsygan M., Filonov Y. A certain class of Foster-Lyapunov functions, *Theory of Stochastic processes* 3 (19), 1997, № 1-2, p. 183-192.
 3. Ісакова Т.І., Філонов Ю.П. Інтегральні умови зворотності марківських ланцюгів із загального мірою невідомості // *Укр.мат.журн.*, 2004. – Т. 56. – №11. – С. 705-719.
 4. Філонов Ю.П. Одне узагальнення процесу Гальтона-Ватсона // *Зб. Матеріалів 14 міжнародної наукової конференції ім. М.Кравчука*. – Київ, 2012. – С. 132-133.
 5. Kersting G. On recurrence and transience of growth models. *J.Appl.Probab.*, 1986, 23, p.614-625.
 6. Nummelin E. (1984). *General Irreducible Markov chains and Non-Negative Operators/ Cambridge University Press, London*.
 7. Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. *Вероятность и статистика в примерах и задачах. Том II. Марковские цепи*. – М. : МЦНМО, 2009 (з англійської).
 8. Клейнрок Л. *Теория массового обслуживания*. – М. : Машиностроение, 1979.
 9. Філонов Ю.П. Умова необмеженості за ймовірністю стохастичної моделі зростання // *Матеріали XIII Міжн.н.к. ім. М.Кравчука (III)*. ст. 114, НТУУ, Київ, 2010.
- Tsygan M., A certain class of Foster-Lyapunov functions and ergodic properties for Markov models, *Department of Mathematics, Goterborg*, 1994.

Стаття надійшла до редколегії 31.03.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.О. Білощицький, Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ.

Михайленко Виктор Мефодьевич

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой ИТППМ, ORCID 0000-0002-9573-9873

Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев

Филонов Юрий Петрович

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ORCID 0000-0002-1100-4854

Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев

НЕОГРАНИЧЕННОСТЬ ПО ВЕРОЯТНОСТИ СИСТЕМ, КОТОРЫЕ УПРАВЛЯЮТСЯ ОБЩЕЙ ОДНОРОДНОЙ ЦЕПЬЮ МАРКОВА

Аннотация. Исследован параметр сложной системы, малые значения которого соответствуют кризисам, а большие – развитию, в предположении, что этот параметр является функционалом некоторой общей однородной цепи Маркова. Приведены условия, в которых относительная частота кризисов стремится к 0 с вероятностью 1 и по вероятности этот параметр развития неограниченно растет. Рассмотрены экономические модели (предел самокупаемости и временные кризисы) и динамика популяции бактерий. Результаты выводятся из доказанной в статье схемы получения признаков неположительности цепей Маркова.

Ключевые слова: процесс Маркова; цепь Маркова; дискретное пространство; фазовое пространство

Mikhaylenko Victor

Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department, ORSID 0000-0002-9573-9873

Kyiv National University of Construction and Architecture, Kiev

Filonov Yuri

PhD (Physical and Mathematical Sciences), Associate Professor, Department of Mathematics, ORSID 0000-0002-1100-4854

Kyiv National University of Construction and Architecture, Kiev

**UNLIMITEDNESS BY THE PROBABILITY SYSTEMS THAT
ARE GUIDED BY COMMON HOMOGENEOUS MARKOV CHAIN**

Abstract. This paper shows a diagram of obtaining approvals of unlimited (in probability) growth system and show how the circuit works for systems controlled by homogeneous Markov chain (CM). The content of the main result – integral criterion of non-positiveness of general homogeneous CM In the phase space E σ - separable algebra of events, the chain (ξ_n) is irreducible set is finite $(F < C)$ for large amounts of minor $((F < C) = \{x | F(x) < C\})$ sets F - an essential function in E . Another features to be considered are functions – f, φ and $[0, \infty]$ the ratio between the $f(F), \varphi(F), F$ (test function) which enable to obtain specific criteria of neerhodyc of system using the proposed scheme. Let think p – density populations of bacteria in the environment (options pollution, aging system). Usually small exponential in time, and then the limiting factors change logistics. Quality (health systems) estimate by the value $u = -\ln p$. Event $(u < u_{kp})$ means disease (fracture system). There is no action of constantly treatment (prevention, cleaning system). We have $u_{n+1} = u_n + v$ ($n = 0, 1, \dots$ – time). Lets assume the full curability of the disease for an average of finite and limited time, but not a complete destruction of the colony of bacteria that live on by the same law in the same environment. Our scheme leads to the condition $-cu^{-1,01} < 2uMv + Dv < c, Dv < c$ that mainly provides significant movement in the incidence of 0. Another example. The firm F capital changes the amount of working places (maybe even their geography, something else) somewhere in the order $F^{0.5}$ (between $\varepsilon F^{0.5}$ and $\frac{1}{\varepsilon} F^{0.5}$, $\varepsilon > 0$) and in the same manner, changes $\lambda(x)$ – (average) number of clients serving (for the period). The cost $r_1(x)$ fore one service held in the interval $(x - a$ state company): $\theta_1 - cF^{-0.5} < r_1 < \theta_1 + cF^{-1,26}$, number $c > 0$, θ_1 – average revenue per one service. Approval: relative number of critical situations $(F < F_{kp})$ by the time probably goes to 0, the capital F in probability increases. It is assumed stable economic conditions. The serving flow for one work place is hard-Poisson generalized. Almost half of the work devoted to mathematical justification of the scheme, the other – the application which is similar to showed results.

Keywords: Markov process; Markov chain; discrete space; phase space

References

1. Meyn, S.P. & Tweedie, R.L. (1993). *Markov chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, New York.
2. Tsygan, M. (1997). A certain class of Foster-Lyapunov functions / M. Tsygan, Y. Filonov // *Theory of Stochastic processes*, 3 (19), 1-2, 183-192.
3. Isakov, T.I. (2004). Integrated repayment terms Markov chains with general measure nezvodymosti/ T.I. Isakov, Y. Filonov // *Ukr.mat.zhurn*, 56, №11, 705-719.
4. Filonov, J.P. (2012). One generalization process Galton-Watson, Coll. 14 Materials of international scientific conference named. M. Kravchuka, Kyiv, 132-133.
5. Kersting, G. (1986). On recurrence and transience of growth models. *J.Appl.Probab*, 23, 614-625.
6. Nummelin, E. (1984). *General Irreducible Markov chains and Non-Negative Operators* / Cambridge University Press, London.
7. Kelbert, M. & Sukhov, Y. (2009). *Probability and Statistics in Example and problems. Volume II. Markovskye chain. Moscow, MTSNMO (English)*.
8. Kleinrock, L. (1979). *Theory of mass of service. Moscow, Mashinostroenie, 1979*.
9. Filonov, J.P. (2010). Conditions unboundedness in probability stochastic growth model. *Materials XIII Mizhn.n.k. them. M.Kravchuka (III)*. Kyiv, NTU, 114.
10. Tsygan, M. (1994). A certain class of Foster-Lyapunov functions and ergodic properties for Markov models, Department of Mathematics, Goterborg.

Посилання на публікацію

- APA Mikhaylenko, V., & Filonov, Yu. (2015). Unlimiteness by the probability systems that are guided by common homogeneous Markov chain. *Management of Development of Complex Systems*, 22 (1), 107-115.
- ГОСТ Михайленко В.М. Необмеженість за ймовірністю систем, що керуються загальним однорідним ланцюгом Маркова [Текст] / В.М. Михайленко, Ю.П. Філонов // *Управління розвитком складних систем*. – 2015. - № 22 (1). – С. 107-115.