УДК 621.01

В.С. Ловейкін, д.т.н., проф. (НУБіПУ, Київ);
Ю.В. Човнюк, к.т.н., проф. (Міжнародна кадрова академія);
К.І. Почка, к.т.н. (КНУБА, Київ)

МІНІМІЗАЦІЯ ФАЗОВИХ КОЛИВАНЬ ЗА НАЯВНОСТІ СИЛ СУХОГО ТЕРТЯ В МЕХАНІЗМАХ ЗІ ЗВОРОТНО-ПОСТУПАЛЬНИМ РУХОМ

АНОТАЦІЯ. Здійснена мінімізація фазових коливань/стрибків у вібраційних системах за наявності сил сухого тертя, що дозволяє оптимізувати їх режими руху.
Ключові слова: коливання, тертя, мінімізація, режими руху.

АННОТАЦИЯ. Осуществлена минимизация фазовых колебаний/прыжков в вибрационных системах при наличии сил сухого трения, что позволяет оптимизировать их режимы движения.
Ключевые слова: колебания, трение, минимизация, режимы движения.

SUMMARY. The minimization of phase oscillations/jumps in the vibrational systems with the Coulomb friction is realized. One may use it for the optimization of their motion regimes.
Keywords: oscillations, friction, minimization, motion regimes.

Вступ. Дослідження вільних та вимушених коливань у нелінійних дисипативних системах з одним ступенем вільності руху різними методами проводились багатьма авторами [1-11]. Автори вказаних робіт зазвичай визначали закони руху (вібраційних) систем за наявності сил сухого тертя або наближеними методами, або користуючись методами розгляду руху системи на кожному окремо взятому інтервалі часу (розгляд поетапний) [9, 10]. Проте не завжди необхідною є процедура визначення (точного/наближеного) розв'язку подібних задач динаміки (зазвичай вони зводяться до лінійних/нелінійних диференціальних рівнянь). Часто особливості функціонування вібраційних систем вимагають на етапі їх пуску/гальмування мінімізації виникаючих коливань (з цієї точки зору – оптимізації режимів руху у моменти пуску/гальмування подібних систем). Наявні у вібраційних системах сили сухого тертя призводять при цьому до виникнення інтенсивних коливань, які можуть викликати небажані перевантаження вібраційних систем. Проблеми оптимізації вібраційних систем у цьому сенсі не розглядались.

Метою даної роботи є встановлення законів руху вібраційних систем за наявності у останніх сил сухого тертя (зокрема, дослідження вільних коливань), що дозволяє оптимізувати режими руху таких систем щодо мінімізації фазових коливань (стрибків), притаманних самим силам сухого тертя.

Виклад основного матеріалу

1. ***Рівняння власних коливань вібраційної системи за наявності сили сухого тертя та його аналітичний розв'язок.***

Вільні (власні) коливання вібраційної системи за наявності у останній сили сухого тертя можна описати рівнянням

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x + F_0 \cdot \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = 0, \qquad (1)$$

де $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, t – час, m – маса, c – жорсткість, F_0 – амплітуда сили сухого тертя.

Розв'язок (1) визначаємо у вигляді

$$x = A \cdot \exp\{j \cdot \Omega \cdot t\}; \quad j = \sqrt{-1}, \qquad (2)$$

де A – амплітуда, Ω – частота власного коливання за наявності сили сухого тертя.

Рівняння (1) розглядаємо за початкової умови

$$x\big|_{t=0} = x_0; \quad \dot{x}\big|_{t=0} = 0. \qquad (3)$$

Нелінійне амплітудно-частотне рівняння для (1), з урахуванням (2), приймає вигляд

$$\Omega^2 = p^2 + j\cdot\frac{F_0}{m\cdot A}; \quad p^2 = \frac{c}{m}. \qquad (4)$$

Тоді

$$\Omega = \left\{p^4 + \frac{F_0^2}{m^2\cdot A^2}\right\}^{1/4}\times$$
$$\times\exp\left\{j\cdot\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\left[\frac{F_0}{m\cdot A\cdot p^2}\right]\right\} =$$
$$= \left\{p^4 + \frac{F_0^2}{m^2\cdot A^2}\right\}^{1/4}\times$$
$$\times\exp\left\{j\cdot\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\left[\frac{F_0}{A\cdot c}\right]\right\}. \qquad (5)$$

Представляємо Ω у вигляді

$$\Omega = \Omega' + j\cdot\Omega'', \qquad (6)$$

тоді з урахуванням (5) отримаємо

$$\begin{cases}\Omega' = \left\{p^4 + \dfrac{F_0^2}{m^2\cdot A^2}\right\}^{1/4}\cdot\cos\left\{\dfrac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\left[\dfrac{F_0}{A\cdot c}\right]\right\};\\ \Omega'' = \left\{p^4 + \dfrac{F_0^2}{m^2\cdot A^2}\right\}^{1/4}\cdot\sin\left\{\dfrac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\left[\dfrac{F_0}{A\cdot c}\right]\right\}.\end{cases} \qquad (7)$$

Тому розв’язок (2) рівняння (1) набуває виду

$$x = A\cdot e^{-\Omega''\cdot t}\cdot\exp\{j\cdot\Omega'\cdot t\}. \qquad (8)$$

Отже, розв’язок (8), поданий у формі залежності $\Omega(A)$, дозволяє стверджувати, що вільні коливання вібраційної системи за наявності сили сухого тертя відбуваються з частотою Ω', яка залежить, як і затухання коливань ($\sim\Omega''$), від амплітуди коливань A. Враховуючи початкову умову (3), можна отримати $A \equiv x_0$.

Якщо вважати, що зменшення початкової амплітуди коливань x_0 на порядок (у 10 разів) практично означає повне затухання виникаючих у вібраційній системі вільних коливань, можна визначити тривалість процесу ($t = t_p$) коливань у системі, викликаних наявністю крім пружних сил ($\sim c\cdot x$) й дисипативних ($\sim$сил сухого тертя):

$$t_p = \frac{\ln 10}{\Omega''} =$$

$$= \frac{\ln 10}{\left\{p^4 + \dfrac{F_0^2}{m^2\cdot x_0^2}\right\}^{1/4}\cdot\sin\left\{\dfrac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\left[\dfrac{F_0}{x_0\cdot c}\right]\right\}}. \qquad (9)$$

2. ***Оптимізація вільних коливань вібраційної системи за наявності сил сухого тертя: мінімізація фазових коливань/стрибків, притаманних нелінійним дисипативним силам.***

Оптимізацію руху вібраційної системи у сенсі мінімізації фазових коливань/стрибків, притаманних силі сухого тертя, здійснимо методом, розвиненим у роботі [12].

Подамо відношення $\dfrac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$, яке описує миттєву фазу сили сухого тертя, у вигляді

$$\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = \frac{m\cdot\ddot{x} + c\cdot x}{(-F_0)}. \qquad (10)$$

Оскільки фаза (гармонічна функція фази) сили сухого тертя може бути різного знаку (додатня/від’ємна), для виконання критерію її мінімізації у процесі пуску/гальмування вібраційної системи, слід обрати квадрат виразу (10) й досягти умови

$$\int_0^{t_p}\left\{\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\right\}^2 dt = \int_0^{t_p}\frac{(m\cdot\ddot{x} + c\cdot x)^2}{F_0^2}dt \Rightarrow \min. \qquad (11)$$

Для реалізації критерію (11) необхідно скласти відповідне до його підінтегрального виразу рівняння Ейлера-Пуассона

$$x^{(IV)} + 2\cdot p^2\cdot\ddot{x} + p^4\cdot x = 0. \qquad (12)$$

Саме розв’язок рівняння (12) визначає такий закон руху системи $x(t)$, за якого виконується критерій (11),

$$x(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot \sin pt + \\ + (C_3 + C_4 \cdot t) \cdot \cos pt, \qquad (13)$$

де константи C_1, C_2, C_3, C_4 визначаються з наступних початкових умов руху вібраційної системи:

$$x\big|_{t=0} = x_0; \quad \dot{x}\big|_{t=0} = 0; \\ x\big|_{t=t_p} = 0; \quad \dot{x}\big|_{t=t_p} = 0. \qquad (14)$$

Для констант C_i, $i = (\overline{1,4})$ отримаємо наступні рівняння, задовольняючи (14) й враховуючи (13),

$$C_3 = x_0;$$

$$\begin{cases} C_1 \cdot p + C_4 = 0; \\ (C_1 + C_2 \cdot t_p) \cdot \sin(p \cdot t_p) + \\ + (x_0 + C_4 \cdot t_p) \cdot \cos(p \cdot t_p) = 0; \\ C_2 \cdot \sin(p \cdot t_p) + (C_1 + C_2 \cdot t_p) \cdot p \cdot \cos(p \cdot t_p) + \\ + C_4 \cdot \cos(p \cdot t_p) + \\ + (x_0 + C_4 \cdot t_p) \cdot (-p) \cdot \sin(p \cdot t_p) = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Систему рівнянь у (15) легко розв’язати, використовуючи правило Крамера,

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot C_1 + \alpha_{12} \cdot C_2 + \alpha_{13} \cdot C_4 = b_1; \\ \alpha_{21} \cdot C_1 + \alpha_{22} \cdot C_2 + \alpha_{23} \cdot C_4 = b_2; \\ \alpha_{31} \cdot C_1 + \alpha_{32} \cdot C_2 + \alpha_{33} \cdot C_4 = b_3, \end{cases} \qquad (16)$$

де $\alpha_{11} = p$; $\alpha_{12} = 0$; $\alpha_{13} = 1$; $\alpha_{21} = \sin(p \cdot t_p)$; $\alpha_{22} = t_p \cdot \sin(p \cdot t_p)$; $\alpha_{23} = t_p \cdot \cos(p \cdot t_p)$; $\alpha_{31} = p \cdot \cos(p \cdot t_p)$; $\alpha_{32} = \sin(p \cdot t_p) + p \cdot t_p \cdot \cos(p \cdot t_p)$; $\alpha_{33} = \cos(p \cdot t_p) - p \cdot t_p \cdot \sin(p \cdot t_p)$; $b_1 = 0$; $b_2 = -x_0 \cdot \cos(p \cdot t_p)$; $b_3 = x_0 \cdot p \cdot \sin(p \cdot t_p)$.

Значення t_p можна знайти наближено, виходячи з розгляду, розвиненого у роботі [10]:

$$t_p \approx \frac{x_0 \cdot p \cdot m \cdot \pi}{2 \cdot F_0} - \frac{\pi}{4 \cdot p}. \qquad (17)$$

У табл. 1 наведені значення t_p, c залежно від p для вібраційних систем, які ущільнюють бетонні суміші: $x_0 = 10^{-3}\,м$; $m = 10^4\,кг$; $F_0 = 10^6\,H$.

Таблиця 1

Значення t_p, c для вібраційних систем ущільнення бетонних сумішей залежно від частоти p, c^{-1}

p, c^{-1}	314	400	500	600	628
t_p, c	$2{,}43 \cdot 10^{-3}$	$4{,}28 \cdot 10^{-3}$	$6{,}3 \cdot 10^{-3}$	$8{,}1 \cdot 10^{-3}$	$8{,}7 \cdot 10^{-3}$

Висновки

1. Отримані основні аналітичні залежності, які описують вільні коливання вібраційних систем за наявності сил сухого тертя, у тому числі їх нелінійні амплітудно-частотні характеристики.

2. Запропоновані режими функціонування/руху вібраційних систем у процесах їх пуску (чи гальмування), за яких мінімізуються стрибкоподібні зміни фази коливань, притаманні силам сухого тертя.

3. Отримані результати можуть бути у подальшому використані при вдосконаленні та уточненні існуючих методів інженерного розрахунку вібраційних систем за наявності у останніх сил сухого тертя.

Література

1. *Сакович В.Л.* Метод решения уравнений динамически нелинейных вибросистем // Научные труды Киевского инженерно-строительного института. Сер.: Вопросы тео-рии проектирования и эксплуатации строи-тельных машин. – 1964. – С. 91-105.
2. *Сакович В.Л.* Вынужденные колебания вибратора при наличии сухого трения // Научные труды Киевского инженерно-строи-тельного института. Сер.: Вопросы теории проектирования и эксплуатации строительных машин. – 1964. – С. 116-127.
3. *Ден-Гартог Дж. П.* Механические колебания. – М.: Физматгиз, 1960. – 350 с.
4. *Den-Hartog J.P.* Forced Vibrations With Combined Coulomb and Viscous Friction // Transactions of ASME. – 1931. – Vol. APM – 53 – 9. – P. 107-115.
5. *Стрекис А.М.* Вынужденные колебания с одной степенью свободы при наличии

сухого трения и при произвольной возмущающей силе // Сб. “Вопросы динамики и динами-ческой прочности”. – 1956. – Вып. 4.
6. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. – М.: ИЛ, 1960. – 832 с.
7. *Пановко Я.Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 240 с.
8. *Вибрации* в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.) – М.: Машиностроение, 1979. – Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И.И. Блехмана. М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.
9. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
10. *Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р.* и др. Основы теории колебаний. – М.: Наука, 1988. – 392 с.
11. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
12. *Ловейкін В.С.* Оптимізація режимів руху машин і механізмів // Машинознавство. – 1999. – № 7 (25). – С. 24-31.

Рецензент: Ю.Д. Абрашкевич, д.т.н., проф. (КНУБА)

Отримано: 9.09.2009 р.