

УДК 629.114

С.А. Коваленко, аспірант КНУБА

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ ТЕЛЕСКОПІЧНОЇ СТРИЛИ АВТОКРАНУ

Актуальність проблеми, передумови та допущення. Для проведення теоретично обґрунтованих розрахунків на міцність конструкцій секцій телескопічної стріли автокрану не достатньо знати тільки закон розподілу контактних напружень. Повна характеристика напруженого стану цього вузла стріли визначається компонентами тензору напружень у кожній точці вузла або у найбільш напружених точках. В роботі робиться припущення, що секції телескопічної стріли на етапі аналітичних досліджень представляються як циліндри. Для визначення компонент тензору напружень у довільній точці охоплюючої секції стріли представляються круговим отвором при дії заданих контактних навантажень. При цьому розглянуті випадки, коли радіуси кругового отвору й внутрішньої секції стріли рівні або мало відрізняються між собою [1].

Методика та результати теоретичних досліджень. Розглянемо пружний циліндр (зовнішній охоплюючий) S_1 з круговим отвором радіуса R_1 , у котрий встановлений круговий циліндр (внутрішня секція) стріли автокрану S_2 радіусу R_2 . У центрі тіла S_2 прикладена зосереджена сила P_0 (враховує вагу внутрішнього та зовнішнього охоплюючого циліндрів секції телескопічної стріли автокрану) див. (рис.1). Вважаємо, що сили тертя на поверхні контакту між тілами S_1 та S_2 відсутні. У такому випадку у області контакту виникають тільки нормальні напруження $\sigma_{\alpha} = -p(\alpha)$, де $p(\alpha)$ - контактний тиск. Задача полягає у встановленні напруженого стану у області S_1 , тобто у визначенні компонентного σ_{α} , $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\tau_{\alpha\alpha}$ тензору напружень для сформульованої задачі.

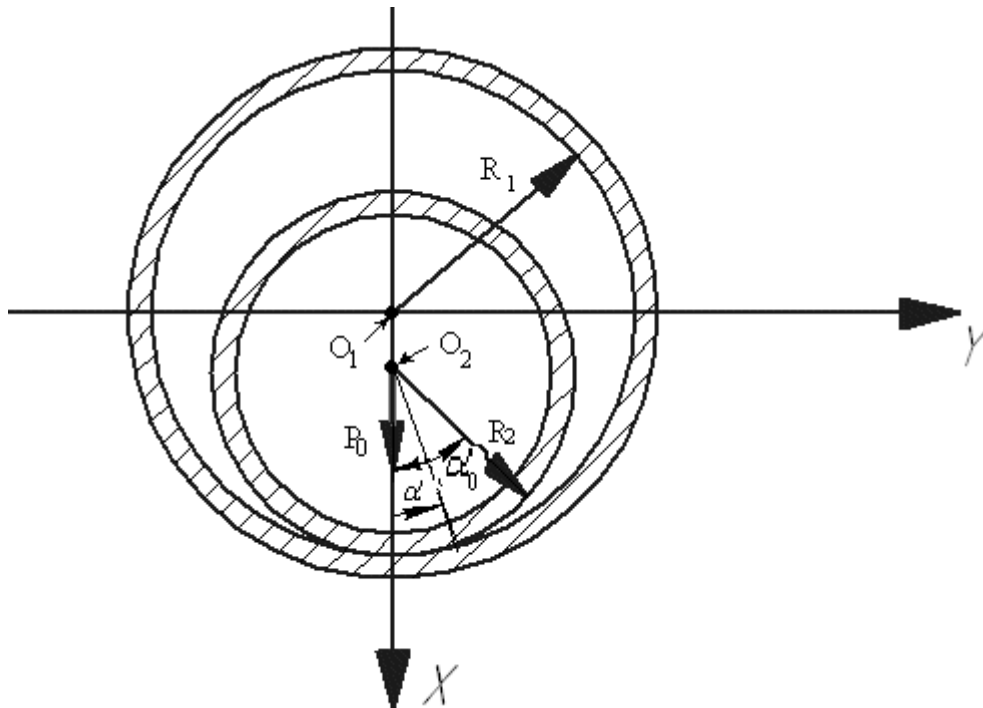


Рис.1. Геометрія задачі



Для плоскої задачі теорії пружності компоненти v_x, v_y, τ_{xy} тензора напружень можна визначити, використовуючи співвідношення для цих величин, отримані у випадку, коли відомі комплексні потенціали Колосова-Мусхемішвілі [3,4] $\phi_1(z)$ та $\psi_1(z)$, а саме:

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p(t)dt}{t-z} + \frac{\alpha_1 \cdot P_0}{2\pi \cdot (1+\alpha_1)z}, \quad i^2 = -1, \quad (1)$$

$$\psi_1(z) = -\frac{R_1^2}{2\pi i z} \int_L \frac{p'(t)dt}{t-z} + \frac{\alpha_1 \cdot P_0 \cdot R_1^2}{\pi \cdot (1+\alpha_1)z^3} + \frac{\alpha_1 \cdot P_0}{2\pi \cdot (1+\alpha_1) \cdot z} + \frac{R_1 A_1}{z^2}, \quad (2)$$

$$A_1 = \frac{R_1}{2\pi i} \int_L \frac{p'(t)dt}{t-z},$$

де $z = r \cdot e^{i\alpha}$ ($r \geq R_1, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$), $t = R_1 \cdot e^{i\theta}$.

При чому:

$$\begin{cases} v_r + v_\alpha = 2 \cdot [\phi_1(z) + \overline{\phi_1(z)}], \\ v_\alpha - v_r + 2i \cdot \tau_{r\alpha} = 2 \cdot [z \cdot \phi_1'(z) + \psi_1(z)] e^{2i\alpha}, \\ 2 \cdot G_1 \cdot (v_r + i v_\alpha) = [\alpha_1 \phi_1(z) - z \cdot \phi_1'(z) - \psi_1(z)] \cdot e^{2i\alpha}, \end{cases} \quad (3)$$

де $\phi(z) = \phi_1'(z)$, $\psi_1(z) = \psi'(z)$, $\phi_1'(z) = \phi''(z)$, а функції $\phi(z)$, $\psi(z)$ - аналогічні (комплексні потенціали), які виражають компоненти напруження (v_x, v_y, τ_{xy}) та переміщення (u, v) у декартовій системі координат [4]. v_r, v_α - складові вектора переміщення у полярній системі координат (r, α). (Риска над функціями у формулах виражає комплексне спрощення щодо комплексної змінної z).

Таким чином, якщо відомий розподіл контактної тиску $p(t)$ у області контакту L , то користуючись формулами, можна обчислити напруження у довільній точці області S_1 .

Використовуючи результати робіт [1,2], можна показати, що у випадку стискування циліндрів (секцій S_1 та S_2 однакових радіусів ($R_1 = R_2$) й довільних пружних властивостей кожної з секцій $p(\alpha)$ розраховують з наступного рівняння:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha - \theta}{2} \right) p'(\theta) d\theta - 2\gamma_1 \cdot p(\alpha) - \frac{4P_0}{\pi R} \cdot \gamma_2 \cdot \cos \alpha - \frac{\gamma_3}{\pi} \cdot \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(\alpha) d\alpha = 0, \quad (4)$$

$$-\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0$$

Тут коефіцієнти $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ визначаються наступними формулами:

$$\gamma_1 = \frac{(1-\alpha_1) \cdot G_2 - (1-\alpha_2) \cdot G_1}{(1+\alpha_1) \cdot G_2 + (1+\alpha_2) \cdot G_1}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_1 \cdot G_2 + G_1}{(1+\alpha_1) \cdot G_2 + (1+\alpha_2) \cdot G_1},$$

$$\gamma_3 = \frac{(1+\alpha_1) \cdot G_2}{(1+\alpha_1) \cdot G_2 + (1+\alpha_2) \cdot G_1}, \quad (5)$$

де $G_{1,2}$ - модулі зсуву тіл S_1 та S_2 , а

$$\alpha_{1,2} = \begin{cases} (3-4\nu_{1,2}) - & \text{для плоскої деформації;} \\ \frac{(3-4\nu_{1,2})}{(1+\nu_{1,2})} - & \text{для узагальненого плоского напруженого стану.} \end{cases}$$

У рівнянні (4) виконаємо заміну змінних, вважаючи:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = a \cdot \cos \theta, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = a \cdot \cos \varphi, \quad a = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_0}{2}\right), \quad (6)$$

$2\alpha_0$ - кут контакту (при посадці S_2 у S_1 із зазором).

Тоді матимемо:

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha-0}{2}\right) &= \frac{1+a^2 \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi}{a \cdot (\cos \theta - \cos \varphi)}; d\theta = -\frac{2a \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi}{(1+a^2 \cdot \cos^2 \varphi)}; \sin \alpha = \frac{2a \cdot \cos \theta}{1+a^2 \cdot \cos^2 \theta}; \\ \cos \alpha &= \frac{(1-a^2 \cdot \cos^2 \theta)}{(1+a^2 \cdot \cos^2 \theta)}; \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha-0}{2}\right) \cdot p'(\theta)d\theta \cdot p'(\varphi)d\varphi - \frac{(1+a^2 \cdot \cos^2 \theta) p'(\varphi)}{a(\cos \varphi - \cos \theta)} d\varphi. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

З урахуванням співвідношень (7) рівняння (4) приймає вид:

$$\frac{(1+a^2 \cdot \cos^2 \theta)}{\pi a} \cdot \int_0^\pi \frac{p'(\varphi)d\varphi}{(\cos \varphi - \cos \theta)} - 2\gamma_1 \cdot p(\theta) - \gamma_3 \cdot \frac{C_0}{\pi} - \frac{4 \cdot P_0 \cdot \gamma_2}{\pi R} \cdot \frac{(1-a^2 \cdot \cos^2 \theta)}{(1+a^2 \cdot \cos^2 \theta)} = 0, \quad (8)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$\text{де } C_0 = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(\alpha) d\alpha = 2a \int_0^\pi \frac{p(\theta) \cdot \sin \theta d\theta}{(1+a^2 \cdot \cos^2 \theta)}. \quad (9)$$

При посадці секції S_2 у круговий отвір у секції S_1 з початковим зазором $\varepsilon = R_1 - R_2$ (див. рис.1) й притискуванні сили P_0 , прикладеної у центрі циліндру, із врахуванням (6), (7) та результатів робіт [1-6], для контактної тиску $p(\theta)$ матимемо наступне рівняння:

$$\frac{(1+a^2 \cdot \cos^2 \theta)}{\pi a} \cdot \int_0^\pi \frac{p'(\varphi)d\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} - 2\gamma_1 \cdot p(\theta) - \gamma_3 \cdot \frac{C_0}{\pi} - \frac{4 \cdot \gamma_2 \cdot P_0}{\pi R} \cdot \frac{(1-a^2 \cdot \cos^2 \theta)}{(1+a^2 \cdot \cos^2 \theta)} = \frac{8\varepsilon\gamma_4 G_1}{R}, \quad (10)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$\text{де } \gamma_4 = \frac{G_2}{(1+\varepsilon_1) \cdot G_2 + (1+\varepsilon_2) \cdot G_1}. \quad (11)$$

Протяжність дуги контакту у розрахованому випадку визначається з умови рівності нулю головного вектору всіх сил, прикладених до циліндра S_2 . Ця умова виражається рівнянням для головного вектора сил зовнішнього впливу P_0 (у якій об'єднана вага тіл S_1 та S_2):

$$P_0 = R \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(\alpha) \cos \alpha d\alpha = 2aR \int_0^\pi \frac{p(\theta)(1-a^2 \cdot \cos^2 \theta) \cdot \sin \theta d\theta}{(1+a^2 \cdot \cos^2 \theta)^2}. \quad (12)$$

(У (12) покладено $R = R_1 \approx R_2$).

Слід зазначити, що визначення контактних напружень у загальному випадку стискування циліндрів з різними пружними властивостями зводиться до розв'язку інтегродиференціальних рівнянь або інтегральних рівнянь Фредгольма з ядрами, які мають логарифмічні особливості.

Оскільки не існує методів побудови точних розв'язків таких рівнянь, крім деяких частинних випадків, слід їх розв'язувати наближено. Зокрема, відомий цілий спектр подібних методів, викладений у роботах [5,6], яким ми й скористаємось.

Широке розповсюдження при розв'язуванні інтегральних рівнянь, до яких зводяться контактні задачі, набув метод Мультиппа, обґрунтований у роботі [7] й вперше застосований до контактних задач у роботі [8]. Результати вказаних робіт також будуть у подальшому використані при наближеному розв'язуванні наведених вище інтегральних (інтегродиференціальних) рівнянь.

Наближений розв'язок (8) та (10) може бути виражений формулою:



$$p(\alpha) = \gamma \cdot \sum_{m=1}^{2N-1} k_m \cdot \sin(m \arccos x), \quad m=1,3,5,\dots,2N-1 \quad (13)$$

Тут $x = \frac{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{a}$, $a = tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $\gamma = \frac{P_0}{R_1}$ та $\gamma = \frac{\varepsilon E_1}{R_1}$ відповідно до випадків рівних і близьких

радіусів контактуючих секцій стріли автокрану, k_m - задані числові коефіцієнти. Використовуючи метод роботи [2] та обираючи у (13) $N=4$, для випадку секцій (циліндрів стріли автокрану однакових радіусів) матимемо:

$$\begin{aligned} v_r + v_\alpha = & 2\gamma \cdot \operatorname{Re} \left\{ k_0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{m_1}}{1+\rho \cdot v} - b_n \right) + b \cdot k_2 \cdot \left(\frac{b \cdot n^2 \cdot \sqrt{m_1}}{1+\rho \cdot v} + b^2 \cdot n^3 + \frac{1}{2} n \right) + \right. \\ & + b \cdot k_4 \cdot \left(\frac{b^3 \cdot n^4 \cdot \sqrt{m_1}}{1+\rho \cdot v} - b^4 \cdot n^5 - \frac{1}{2} b^2 \cdot n^3 + \frac{1}{8} n \right) + \\ & \left. b \cdot k_6 \cdot \left(\frac{b^5 \cdot n^6 \cdot \sqrt{m_1}}{1+\rho \cdot v} + b^6 \cdot n^7 + \frac{1}{2} b^4 \cdot n^5 - \frac{1}{8} b^2 \cdot n^3 + \frac{1}{16} n \right) + 2A_2 \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{2\alpha_1 P_0}{\pi \cdot (1+\alpha_1) \cdot R_1 \cdot \rho \cdot v} \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

$$\text{Тут } \rho = \frac{r}{R_1}, \quad m_1 = (1+b^2) \cdot (1+\rho^2 \cdot v^2) + 2(1-b^2) \cdot \rho \cdot v, \quad v = e^{i\alpha}, \quad n = (1-\rho v) / (1+\rho v),$$

$$b = ctg\left(\frac{\alpha_0}{2}\right), \quad k_0 = k_1 - k_3 + k_5 - k_7, \quad k_2 = 4k_3 - 12k_5 + 24k_7, \quad k_4 = 16k_5 - 8k_7, \quad k_6 = 64k_7 \text{ при}$$

чому коефіцієнти k_1, k_3, k_5, k_7 знаходяться в системі рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{2N-1} k_m \cdot A_{m\mu} = 0, \mu = 1, 2, \dots, N-1, \\ 2\pi \cdot \cos\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) \cdot \sum_{m=1}^{2N-1} k_m \cdot m \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cdot tg^m\left(\frac{\alpha_0}{4}\right) = 1. \end{cases} \quad (14)$$

У (14) знаходимо зі співвідношення:

$$\begin{aligned} A_2 = & \frac{k_2}{2} \cdot (\sqrt{b^2+1} - b) + \frac{1}{2} b \cdot k_2 \cdot \left(b^2 - b\sqrt{b^2+1} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} b k_4 \cdot \left(-b^4 + b^3 \cdot \sqrt{b^2+1} - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{8} \right) + \\ & + \frac{1}{2} b k_6 \cdot \left(b^6 - b^5 \cdot \sqrt{b^2+1} + \frac{1}{2} b^4 - \frac{1}{8} b^2 + \frac{1}{16} \right). \quad (15) \end{aligned}$$

Аналогічним шляхом можна отримати для ($R_1 = R_2$):

$$\begin{aligned} v_\alpha - v_r + 2i \cdot \tau_{r\alpha} = & \gamma \cdot \left\{ \frac{(\rho^2 - 1)}{\rho} \cdot v \left[k_0 \cdot \left(\frac{\sqrt{m_1}}{(1+\rho \cdot v)^2} - \frac{C_1}{\sqrt{m_1} \cdot (1+\rho v)} + \frac{2b}{(1+\rho v)^2} \right) + b \cdot k_2 \cdot \right. \right. \\ & \left. \left(-\frac{bn \cdot (5-\rho v) \sqrt{m_1}}{(1+\rho v)^3} + \frac{b C_1 \cdot n^2}{(1+\rho v) \cdot \sqrt{m_1}} - \frac{6 \cdot b^2 \cdot n^2 + 1}{(1+\rho v)^2} \right) + b \cdot k_4 \cdot \left(\frac{b^3 n^3 \cdot (9-\rho v) \sqrt{m_1}}{(1+\rho v)^3} - \frac{b^3 n^4 C_1}{(1+\rho v) \sqrt{m_1}} + \frac{40b^4 n^4 + 12b^2 n^2 - 1}{4 \cdot (1+\rho v)} \right) + \right. \\ & \left. + b \cdot k_6 \cdot \left(-\frac{b^5 \cdot n^5 \cdot (13-\rho v) \sqrt{m_1}}{(1+\rho v)^3} + \frac{b^6 \cdot n^6 \cdot C_1}{(1+\rho v) \sqrt{m_1}} - \frac{112b^6 \cdot n^6 + 40b^4 \cdot n^4 - 6b^2 \cdot n^2 + 1}{8 \cdot (1+\rho v)^2} \right) \right] + \frac{4A_2}{\rho_2} \left\} + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_1 \cdot P_0 \cdot v}{\pi \cdot (1+\alpha_1) \cdot R_1 \cdot \rho} + \frac{\alpha_1 \cdot P_0 \cdot (2-\rho^2)}{\pi \cdot (1+\alpha_1) \cdot R_1 \cdot \rho^3 \cdot v}, \right. \end{aligned}$$

$$\text{де } C_1 = (1+b^2)\rho v + 1 - b^2, i^2 = -1. \quad (16)$$

За формулами (13) та (16) Були розраховані напруження $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ у охоплюю чому циліндрі (S_1) та (S_2), тобто R_1 і R_2 рівні, а матеріали їх однакові. Для такої задачі коефіцієнти k_1, k_3, k_5, k_7 та α_0 , рад наведені у табл.1.

Таблиця 1. Значення коефіцієнтів $k_m, m=1,3,5,7$ та α_0 , рад.

Співвідношення модулів Юнга	k_1	k_3	k_5	k_7	α_0
$E_2 / E_1 = 0$	0,4918	-0,0815	0,0137	-0,0024	1,615
$E_2 / E_1 = 0,5$	0,5164	-0,0683	0,0101	-0,0015	1,516
$E_2 / E_1 = 1$	0,5261	-0,0630	0,0090	-0,0013	1,481
$E_2 / E_1 = 2$	0,5346	-0,0582	0,0082	-0,0011	1,405
$E_2 / E_1 = \infty$	0,5491	-0,0498	0,0071	-0,0008	1,402

Зміна напружень σ_r та σ_α вздовж вертикальної вісі OX (див. рис. 1) зображена на рис.2. Як видно з цього рисунка, нормальні напруження σ_r та σ_α мають найбільше значення на поверхні кривого отвору у тілі S_1 (циліндрі R_1 -радіусу). При віддаленні від поверхні отвору у S_1 ($r > R_1$) ці напруження поступово зменшуються. Дотичні напруження $\tau_{r\alpha}$ для всіх точок осі OX відсутні. Тому для довільної вісі OX напруження σ_r та σ_α є головними. У відповідності з таким розподілом нормальних напружень максимальні дотичні напруження τ_{\max} , підраховані як напіврізниця головних напружень σ_r та σ_α , мають найбільше значення у поверхневих точках кругового отвору у S_1 (див. рис.2).

Слід зазначити, що напруження на рис.2 виражені у долях p_0 , де $p_0 = -(\sigma_r)_{\max} = -0,6 \cdot P_0 / R$.

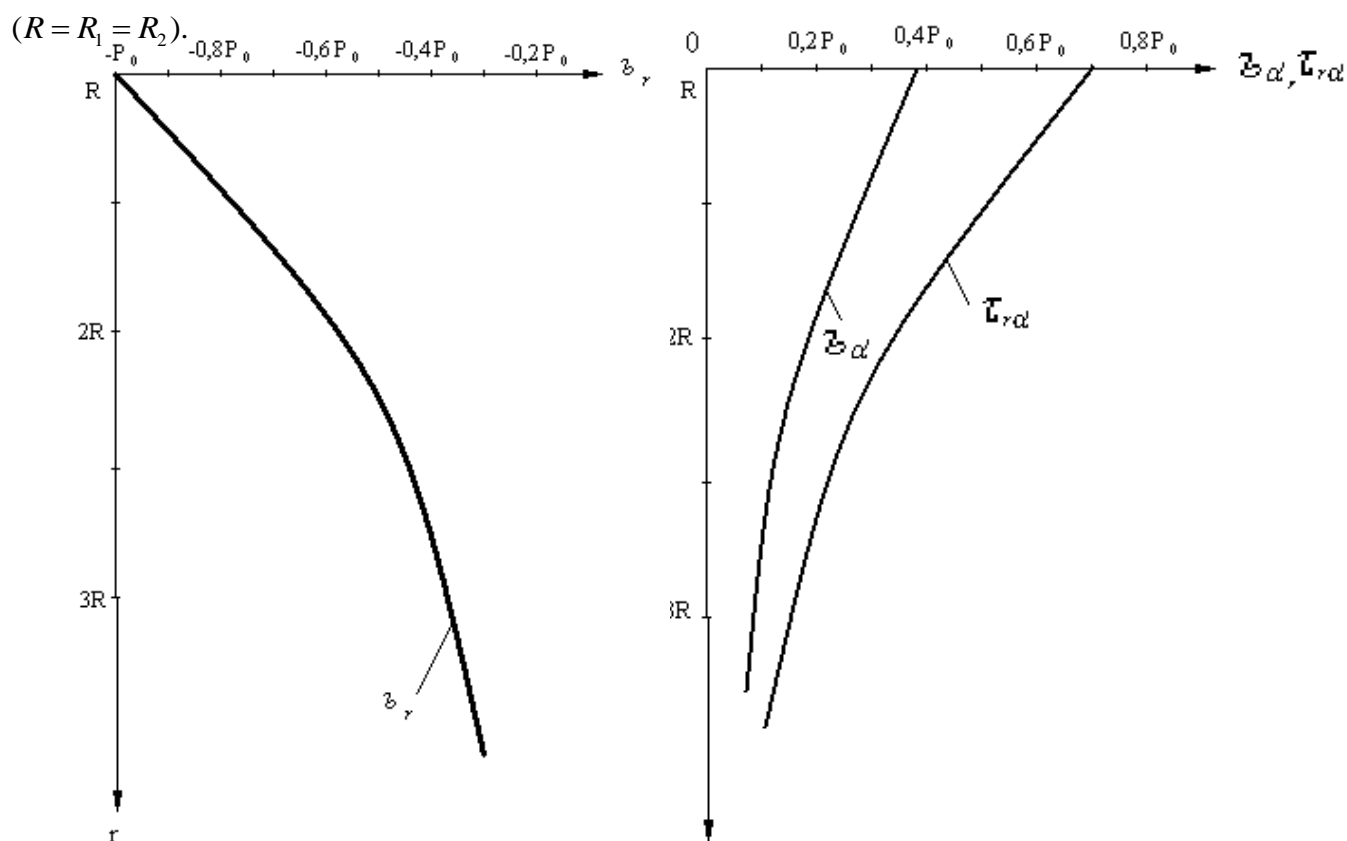


Рис.2. Напруження у тілі S_1 ($r > R_1$) для випадку $R = R_1 = R_2, E_1 = E_2$: $a - \sigma_r; \delta - \sigma_\alpha, \tau_{r\alpha}$



Подальшими дослідженнями передбачається оцінити напруження для різних форм секцій телескопічної стріли, визначити критерії, за якими можна оптимізувати реальну форму перерізу секції.

Висновки:

1. Запропонований метод та отримані результати визначення напружено-деформованого стану секцій телескопічної стріли автокрану.
2. Отримані аналітичні залежності для визначення головного вектора сил зовнішнього впливу з різними пружними властивостями.
3. Виконаний аналіз зміни нормальних напружень для різних точок контакту секцій стріли.

Література

1. *Панасюк В.В., Теплий М.Й.* Розподіл напружень в циліндричних тілах при їх внутрішньому контакті // ДАНУРСР. Серія А – 1971. №6 с.549-553.
2. *Теплий М.Й.* О расчете напряжений в цилиндрических сопряжениях // Проблемы прочности – 1979. №9 с. 97-100.
3. *Колосов Г.В.* Применение комплексной переменной к теории пружности. – М., Л.: ОНТИ, 1935.-250с.
4. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511с.
5. *Гафнер С.Л., Добычин М.Н.* к расчету угла контакта при внутреннем соприкосновении цилиндрических тел, радиусы которых почти равны // Машиноведение. 1973, - №2. – с. 69-73.
6. *Кочанов Ф.П.* Решение обобщенной задачи Н.Я. Штермана // ДАН СССР – 1967. – Т.173, №5 – с. 1028-1031.
7. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 688с.
8. *Каландия А.И.* К контактным задачам теории упругости // Прикладная математика и механика. – 1957. – Т.21. №3, с. 389-398.