

УДК 539.3

Іванченко Г.М., канд. техн. наук

ФОКУСУВАННЯ ПЛОСКОЇ РОЗРИВНОЇ ХВИЛІ АНІЗОТРОПНИМИ ЛІНЗАМИ МАЛОЇ КРИВИНИ

Дослідження явищ фокусування і розсіювання нестационарних розривних хвиль поверхнями та межами розділу середовищ з різними механічними властивостями має місце в сейсмології та сейсморозвідці. Воно особливо актуальне у випадках, коли необхідно аналізувати пружно-деформований стан земних порід з неоднорідними включеннями та поблизу їх вільних поверхонь. В гірничій справі такі ситуації виникають при визначенні міцності та стійкості гірських виробок, у будівництві – при вивченні динамічної поведінки наземних і підземних споруд під впливом сейсмічних і вибухових хвиль. Особливості цих явищ полягають у тім, що вони можуть супроводжуватися концентрацією механічної енергії (кінетичної і потенційної) у зонах фокусування фронтів розривних хвиль на криволінійних ділянках вільних поверхонь гірських порід та шарами порід перемінної товщини з різними механічними властивостями, що посилює дії цих хвиль. Для постановки та розв'язування таких задач в теорії пружності використовуються методи геометричної оптики, як то нульове наближення променевого методу [1, 2, 5].

§1. Постановка задачі. Динамічний стан середовища, яке має щільність $\rho = const$ і параметри пружності c_{ikpq} , в декартовій системі координат $O x_1 x_2 x_3$ в момент часу t визначається вектором пружних переміщень його частинок $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$, котрий задовольняє рівняння руху [7]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \frac{c_{ikpq}}{\rho} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

з початковими умовами $\vec{u} = \vec{u}_0$, $\dot{\vec{u}} = \dot{\vec{u}}_0$ та деякими граничними умовами.

В анізотропних середовищах виникає три по різному поляризовані розривні хвилі [7]. Поверхня фронту кожної з них ($r = 1, 2, 3$) може бути представленою співвідношенням

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \quad (2)$$

в якому τ – функція, що задовольняє диференціальним рівнянням [6, 8]

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \frac{c_{ikpq}}{\rho} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (3)$$

де: $p_k \equiv \partial\tau/\partial x_k = n_k/v_r(\bar{n})$ – компоненти вектора рефракції, \bar{n} – нормаль до фронту хвилі, v_r – модуль вектора фазової швидкості r -хвилі, спрямованого по нормалі до фронту; A_q, A_i – компоненти вектора її поляризації.

Система рівнянь (3) для пружного однорідного анізотропного середовища за допомогою методу характеристик приводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \frac{c_{ikpq}}{\rho} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad \frac{dp_k}{d\tau} = 0, \quad (4)$$

які дозволяють побудувати промені, уздовж яких зі швидкістю ξ поширюється енергія хвильового поля.

§2. Взаємодія хвилі з поверхнею розділу середовищ. Обмежимося розглядом вісесиметричної задачі, коли вісь Ox_2 є віссю симетрії поверхні розділу двох середовищ і їх пружних властивостей. Тоді буде достатнім досліджувати еволюцію сліду фронтів на одній із площин, якій належить вісь симетрії задачі. На обох межах розділу середовищ кути між нормальми до поверхонь лінзи та нормальми до фронтів хвиль підкоряються закону Снелліуса [3, 4]

$$\frac{\sin(\gamma)}{v} = \frac{\sin(\Theta_v - \gamma)}{v_v(\Theta_v)} = \frac{\sin(\bar{\Theta}_\mu + \gamma)}{\bar{v}_\mu(\bar{\Theta}_\mu)},$$

$$\frac{\sin(\Theta - \varphi)}{v(\Theta)} = \frac{\sin(\Theta_v + \varphi)}{v_v(\Theta_v)} = \frac{\sin(\bar{\Theta}_\mu - \varphi)}{\bar{v}_\mu(\bar{\Theta}_\mu)}, \quad v, \mu = 1, 2, \quad (5)$$

де: γ і φ – кути нахилу дотичних до поверхонь в точках падіння променя на межу розділу середовища, Θ_1, Θ_2 – кути між віссю Ox_2 і напрямками векторів фазових швидкостей відбитих квазіпоздовжньої qP і квазіпоперечної qS хвиль; $\bar{\Theta}_1, \bar{\Theta}_2$ – аналогічні кути для хвиль, що проникли за межу розділу середовищ; v, v_v, \bar{v}_μ – величини фазових швидкостей падаючої поздовжньої хвилі, відбитих і заломлених (індекс 1 відповідає квазіпоздовжній, 2 – квазіпоперечній) хвилі.

Розв'язування систем (5) проводиться методом продовження по параметру [3]. Зміна кута γ , наприклад, на величину $\Delta\gamma$ викличе збільшення

направляючих кутів векторів фазових швидкостей відбитих хвиль обох типів

$$\Delta\Theta_v^n = \frac{\cos\gamma \cdot v_v(\Theta_v^n) + \cos(\Theta_v^n - \gamma) \cdot v}{\cos(\Theta_v^n - \gamma) \cdot v - \sin(\gamma) \cdot \partial v_v(\Theta_v^n) / \partial \Theta_v} \cdot \Delta\gamma + r, \quad (6)$$

де: $r_v^n = \sin(\Theta_v^n + \gamma) \cdot v - \sin(\Theta - \gamma) \cdot v_v^n(\Theta_v^n)$ нев'язка рівняння.

За стартовий стан розв'язування задачі зручно прийняти промінь, що падає на лінзу вздовж осі симетрії задачі.

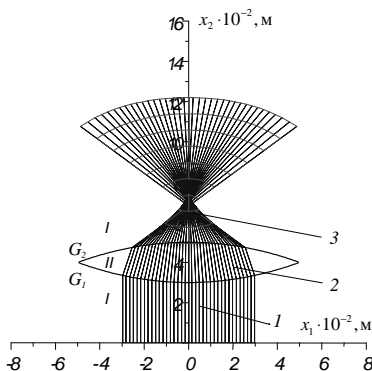


Рис. 1

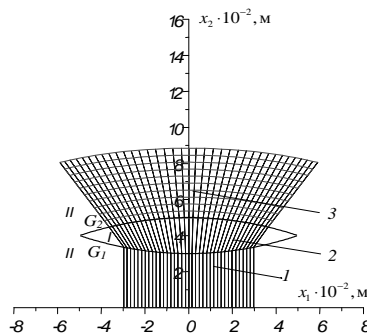


Рис. 2

§3. Аналіз результатів розрахунку. По запропонованій методиці досліджено перебудову фронту падаючої плоскої поздовжньої хвилі на параболічних поверхнях пружних лінз. На рисунках 1–4 показані сітки еволюціонуючи фронтів та променів, заломлених лінзами різних типів. Для середовища, позначеного на малюнках цифрою \bar{I} пружні характеристики становлять: $\rho_1 = 2.650 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_1 = 4.972 \times 10^{10} \text{ Па}$, $\mu_1 = 3.906 \times 10^{10} \text{ Па}$, а для середовища \bar{II} – $\rho_2 = 2.760 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_2 = 1.587 \times 10^9 \text{ Па}$, $\mu_2 = 1.429 \times 10^{10} \text{ Па}$. Для обох середовищ значення коефіцієнтів анізотропії приймалися $l_i = 0.1\lambda_i$, $m_i = 0.2\mu_i$ та $p_i = 0.4(\lambda_i + 2\mu_i)$ ($i=1,2$).

Здатність лінзи фокусувати промені залежить не лише від її геометричних параметрів а і від послідовності середовищ на шляху променів.

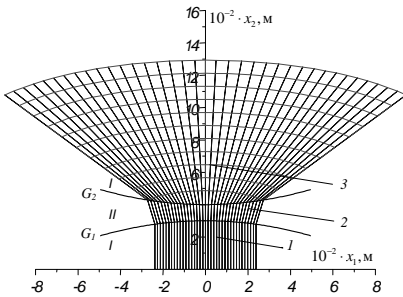


Рис. 3

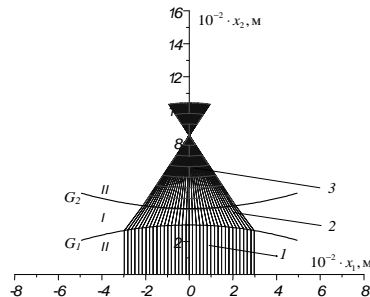


Рис. 4

Приведена методика дозволяє прогнозувати положення зон фокусування променів хвиль обох орієнтацій, породжених взаємодією розривної хвилі в анізотропному середовищі з його криволінійними поверхнями розділу середовищ.

1. Арнольд В.И. Критические точки функций и классификация каустик. – УМН, 1974, т. 29, вып. 3, с. 243-244.
2. Аникьев И.И., Гуляев В.И., Иванченко Г.М., Луговой П.З., Сущенко Е.А., Яковенко Е.В. Об эффекте квазиполного внутреннего отражения ударных волн на границе раздела упругих сред. // Прикл. механика и техн. физика. – 2000. – 41, №1. – С. 21–27.
3. Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Яковенко Е.В. Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000. – 64, №3. – С. 394–402.
4. Gulyaev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M. Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media // International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40. – P. 237-247.
5. Кравцов Ю. А. Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
6. Lugovoy P.Z., Goulaiev V.I. Propagation of shock wave fronts in anisotropic layered media. CP505, Shock Compression of Condensed Matter – 1999 edited by M.D.Furnish, L.C.Chhabildas and R.S.Nixon. Proceeding of the Conference of the American Physical Society, Snowbird, Utah, USA. P. 1287-1290.
7. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. – Ленинград: Наука, 1980. – 220 с.
8. Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Применение лучевых методов в задачах распространения и рассеяния волн. (Обзор) // Прикл. механика. – 1996. – 32, №12. – С.3-27.

Матеріал надійшов до редакції 08.06.04.