

ГЕОДЕЗІЯ

УДК 528.36.23

О.В.Кучер, канд.техн.наук,

Науково-дослідний інститут геодезії і картографії (НДІГК),

В.С. Старовєров, канд.техн.наук, професор кафедри інженерної геодезії,

Г.С. Акчуріна, студент,

Київський національний університет будівництва і архітектури

СУЧАСНИЙ ПІДХІД ДО ВИРІВНЮВАННЯ НІВЕЛІРНОЇ МЕРЕЖІ УКРАЇНИ

Зазначено, що неоднорідність дійсного гравітаційного поля призводить до неоднозначності у визначенні висот. Нормальні висоти, які використовують в Україні, належать до геопотенціальних систем висот, що потребує використання геопотенціальних чисел.

Наведено методику вирівнювання нівелірних мереж, зважаючи на гравітаційне поле Землі.

Розглянуто особливості вирівнювання нівелювання в геопотенціальних числах.

Наведено загальні рекомендації щодо процесу вирівнювання та способи розв'язання проблем, які при цьому виникають.

Запропоновано схеми обов'язкових робіт з вирівнювання нівелірної мережі в геопотенціальних числах.

Наведено приклад вирівнювання нівелювання в геопотенціальних числах.

Ключові слова: *нормальні висоти, гравітаційне поле, геопотенціальні числа, вирівнювання нівелювання.*

Постановка проблеми. Висотна основа країни є невід'ємною частиною загальнодержавної системи геодезичного забезпечення, тому концепцію її розвитку потрібно розглядати в контексті сучасного розвитку геодезичної референцної системи УСК-2000. В цих умовах під час виконання основних геодезичних робіт слід забезпечити, з одного боку, максимальну ефективність застосування сучасних супутникових технологій, а з другого – зберегти і реалізувати весь потенціал системи висотного забезпечення, створеної на основі традиційних методів геодезичних вимірювань.

З цією метою слід розробити методику, за якої висоти будуть визначені однозначно. Однозначність визначення висот полягає в обґрунтуванні польових

вимірювань, вибору методів вирівнювання, визначенні основної відлікової поверхні, встановлення системи відліку висот відносно середнього багаторічного рівня моря в одному вихідному пункті.

Методика і точність польових вимірювань під час нівелювання регламентовано інструкцією. Вибір і визначення відлікової поверхні залежить від змісту розв'язуваної задачі. Наприклад, зображуючи рельєф на топографічних картах, використовують нормальні висоти, які відлічують від поверхні квазігеоїда. Останнім часом за супутниковими геодезичними спостереженнями визначають геодезичну висоту, що дає можливість будувати квазігеоїд у різних системах.

Відомі нині принципи встановлення системи відліку висот відносно середнього багаторічного рівня моря в одному вихідному пункті створюють ряд суперечностей, які не можуть бути розв'язані традиційними методами геодезичних вимірювань. Ці протиріччя полягають у тому, що різниці середніх рівнів морів у різних рівневимірних постах можуть сягати метра і більше, а складові геодезичної висоти відносно поверхні прийнятого відлікового еліпсоїда (нормальна висота і висоти квазігеоїда) були визначені із незіставленими точностями і належали до різних систем відліку, тому виміряти безпосередньо геодезичну висоту відносно загального земного еліпсоїда було неможливо. Якщо у розв'язанні більшості задач традиційної геодезії такі невизначеності не викликали особливих проблем, то за точності сучасних супутникових технологій такі суперечності не можуть бути проігноровані, особливо коли йдеться про розв'язання фундаментальних задач сучасної геодезії чи використання методу GPS-нівелювання.

Сучасний підхід до встановлення єдиної загальноземної чи континентальної системи висотного забезпечення полягає в тому, що вихідні дати у конкретному пункті, який можна було б вважати за початковий для відліку висот, не встановлюють, а рівневимірні дані на футштоках для задачі безпосередньо не використовують. Відліковою поверхнею є екіпотенціальна поверхня з потенціалом, що дорівнює нормальному $W_0=U_0$ на поверхні загальноземного еліпсоїда. Вихідними даними, які реалізують приведення висот до загальноземної системи, є такі: нормальні висоти H^N з нівелювання, висоти квазігеоїда ζ , визначувані на основі комбінації наземних гравіметричних та супутникових даних (планетарних моделей гравітаційного поля), геодезичні висоти з ГНСС (Глобальних навігаційних супутникових систем). Тоді систему висот зумовлює сукупність пунктів, в яких дотримано рівності геодезичної висоти H^G , визначуваної із супутникових спостережень, та геодезичної висоти $H^G = H^N + \zeta$, отриманої як сума нормальної висоти H^N та висоти квазігеоїда ζ . Такий принцип встановлення висотної системи є оптимальним для всієї загальної системи геодезичного забезпечення, що базується на сучасних супутникових технологіях.

За такого підходу вихідні нівелірні пункти, як, наприклад, Кронштадтський футшок, в принципі відсутні, як немає і пункту у загальноземній референційній системі ITRS. Нормальна висота в цьому випадку буде дорівнювати нулю ($H^N=0$) в тій i -й точці земної поверхні, в якій реальний потенціал W_i дорівнює нормальному U_0 на поверхні еліпсоїда GRS-80, який нині вважають за нормальний.

Вирівнювання результатів геометричного нівелювання призводить до неоднозначності визначення висоти, суть якої полягає в такому. Якщо виконують

вимірювання в замкнутому нівелірному полігоні, тобто повертаються до вихідного пункту, то алгебраїчна сума всіх вимірних перевищень не буде строго дорівнювати нулю, як можна було б сподіватися, навіть якщо була можливість виконувати спостереження абсолютно точно. Ця нев'язка свідчить про те, що нівелювання являє собою більш складну процедуру, ніж може здатися на перший погляд.

Як відомо, геопотенціальні висоти (ортометричні, нормальні) визначають з різниці потенціалів дійсної сили ваги двох рівневих поверхонь, одну з них беруть за основну, іншу – за визначувану, тобто ту, на котрій лежить точка, висоту якої треба визначити. При цьому слід виконати гравіметричні вимірювання. Нівелювання в сукупності з гравіметричними вимірюваннями визначає різницю потенціалів, тобто фізичну величину. Отже, розглядаючи процес вирівнювання, потрібно виходити з того, що вирівнюються не геометричні величини у вигляді перевищень, а вирівнюванню підлягають фізичні величини у вигляді різниці потенціалів.

Постановка завдання. Мета статті – розглянути послідовність застосування методики вирівнювання нівелірних мереж за різницею потенціалів реального гравітаційного поля.

Виклад основного матеріалу. Основні уявлення визначення висоти в реальному гравітаційному полі. У реальному гравітаційному полі Землі висоти відраховують від основної рівневої поверхні. У такому разі висота набуває певного фізичного змісту і визначається роботою, виконуваною в полі сили ваги. Вперше поняття про основну рівневу поверхню Землі було сформульоване Гаусом ще у 1828 р. і тільки у 1872 р. визначення геоїда як математичної поверхні Землі введено Лістінгом. Розглянемо рівневі поверхні, що проходять через дві близькі точки O_1 та O_2 на поверхні Землі (рис.1).

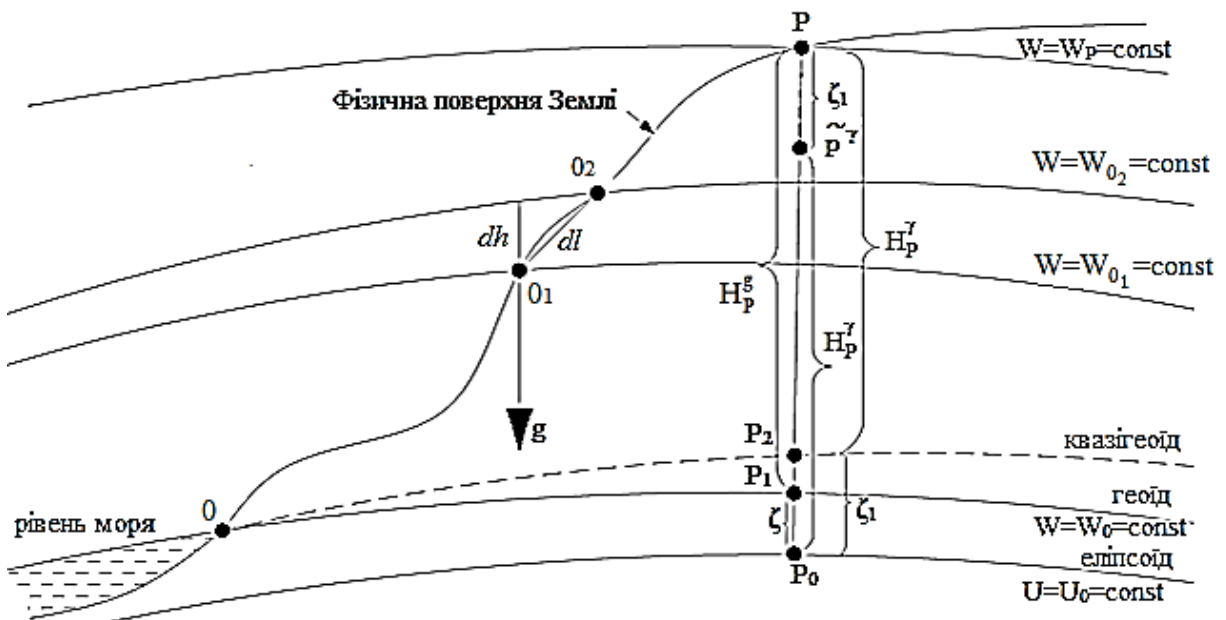


Рис.1. До визначення висоти в реальному гравітаційному полі:

$PP_1 = H^S$ – ортометрична висота; $PP_2 = H^N$ – нормальна висота;

$PP_0 = H^G$ – геодезична висота; ζ – висота геоїда над поверхнею еліпсоїда (аномалія

висоти); ζ_1 – висота квазігеоїда над поверхнею еліпсоїда (аномалія висоти)

Нехай відстань між цими точками дорівнює dl . Сила ваги g спрямована по нормалі до цих поверхонь, за переміщення уздовж них робота дорівнює нулю. Позначимо як dW роботу, яку потрібно виконати для переходу з однієї рівневої поверхні на іншу.

Відомо, що робота дорівнює добутку переміщення dl на проекцію $g \cdot \cos(g^\wedge l)$ сили ваги g на напрямок переміщення:

$$dW = g \cos(g^\wedge l) dl. \quad (1)$$

Але згідно з рис.1, добуток $\cos(g^\wedge l) dl$ є проекцією відрізка dl на напрямок сили, тобто дорівнює відстані dh між рівневими поверхнями.

Відстань між близькими рівневими поверхнями називають ще перевищенням. Перевищення є додатним, якщо воно спрямоване протилежно напрямку сили ваги, тобто рівнева поверхня, що проходить через кінцеву точку O_2 відрізка dl , лежить вище від рівневої поверхні, що проходить через його початкову точку O_1 . Тому

$$dh = -\cos(g^\wedge l) dl \quad (2)$$

і

$$dW = -g dh. \quad (3)$$

Знайдемо роботу, виконану силою ваги під час переміщення вздовж рівневої поверхні. У розгляданому випадку в рівності (1) $\cos(g^\wedge l) = 0$, тому

$$dW = 0,$$

отже,

$$W = \text{const}. \quad (4)$$

Функцію W називають потенціалом сили ваги, а вираз (4) є рівнянням рівневої поверхні. Оскільки потенціал на рівневій поверхні постійний, цю поверхню називають також екіпотенціальною.

Підсумовуючи елементарні різниці (3) від деякої початкової точки O до точки P на поверхні Землі, отримаємо

$$W_0 - W_P = C_P = \int_0^P g dh. \quad (5)$$

Точку O вибирають зазвичай на рівні моря. У такому разі різницю $W_0 - W_P = C_P$ називають геопотенціальною величиною, або геопотенціальним числом. Фактично геопотенціальне число – це робота, виконувана під час переміщення від рівня моря до точки P на поверхні Землі. Через те що і силу ваги g , і перевищення dh можна виміряти на поверхні Землі, геопотенціальне число C_P вважають вимірюваною величиною і розглядають як одну з природних, або натуральних, координат.

Для перетворення геопотенціального числа C_P в лінійну міру потрібно виконати таке. Через точку P (рис.1) проводять нормаль PP_0 до поверхні еліпсоїда і знаходять на цій нормалі таку точку \tilde{p}^y , для якої робота з переміщення від точки P_0 еліпсоїда тотожно дорівнює геопотенціальному числу. Висота цієї точки \tilde{p}^y над еліпсоїдом називається нормальною висотою точки P поверхні Землі. Множина точок \tilde{p}^y відповідна поверхні, що називається телуроїдом.

Поняття «нормальні висоти» введено М.С. Молоденським. За відлікову поверхню в системі нормальних висот беруть поверхню квазігеоїда. Термін «квазігеоїд» вжито в роботі Молоденського 1948 року.

Згідно з рис.1, щоб перейти від нормальної висоти H_P^N (відрізок $P_0\tilde{p}^N$) до геодезичної висоти H_P^G (відрізок нормалі PP_0), потрібно додати до нормальної висоти відрізок $\tilde{p}^N P = \zeta_1$, який називають аномалією висоти:

$$H_P^G = H_P^N + \zeta_1. \quad (6)$$

Це просте співвідношення відіграє нині важливу роль у сучасній геодезії.

Зауважимо, що нормальна висота H_P^N визначається різницею потенціалів точок земної поверхні, обчислюється за вимірами на поверхні Землі і має для даної точки єдине значення за незмінного положення точки O початку відліку геопотенціального числа. Нормальну висоту визначають за формулою:

$$H_P^N = \frac{W_0 - W_P}{\gamma_m^P} = \frac{\int_0^P g dh}{\gamma_m^P}, \quad (7)$$

де γ_m^P – середнє значення нормальної сили ваги на відрізку PP_1 силової лінії нормального поля.

У геодезії нормальну висоту називають ще абсолютною, а різницю нормальних висот – відносною висотою точки. Чисельне значення абсолютної висоти звичайно називають позначкою. Якщо йдеться про нормальні висоти, то за відлікову поверхню беруть квазігеоїд.

Значення висот зазвичай отримують з нівелювань, проте отримані висоти редуковано не до еліпсоїда, а до деякої іншої поверхні – рівневої, за яку беруть середній рівень моря, тобто поверхню геоїда. Якщо припустити, що нівелірні висоти відраховують від поверхні, яка визначається рівнянням $W_0 = const$ і збігається з рівнем моря, то виникає задача з визначення потенціалу сили ваги W_0 в точці O , яку вважають початком відліку висот.

Методика визначення потенціалу сили ваги W_0 на рівневій поверхні геоїда для висотної референцної системи. Розглянемо випадок, коли для кожного геодезичного пункту відомими є два значення нормальної висоти в різних вертикальних референцних системах. Для переходу від нормальної висоти H^N до геодезичної потрібно додати до нормальної висоти аномалію висоти ζ_1 , що чисельно дорівнює так званій висоті квазігеоїда

$$H^G = H^N + \zeta_1. \quad (8)$$

Таким чином, нормальні висоти H^N допоміжної поверхні або телуроїда можуть бути знайдені відносно прийнятого еліпсоїда через геопотенціальне число $C_P = W_0 - W_P$ за допомогою умови Молоденського:

$$W_0 - W_P = U_0 - U_{\tilde{p}}, \quad (9)$$

де, крім вже зазначених величин, U_0 – нормальний потенціал на поверхні прийнятого еліпсоїда $U_0 = W_0$; $U_{\tilde{p}}$ – нормальний потенціал у деякій точці \tilde{p} телуроїда; точки P та \tilde{p} , розміщені на одній нормалі до еліпсоїда; відстань $P\tilde{p}$ являє собою аномалію висоти ζ_1 у формулі (8). При цьому вертикальний датум висотної системи є зафіксованим як мінімум однією точкою із значенням W_0 .

Нехай у локальній референцній системі координат (LRS) відомі геодезичні координати B_{LRS} , L_{LRS} і нормальні висоти $H_{Балт77}^N$, задані у Балтійській системі висот 1977 року. У випадку глобальної геодезичної референцної системи ITRF2000/ETRS89 відомі широти B_{GRS} , L_{GRS} і, через формулу Молоденського,

$H'_g = H^G - \zeta_g$. Нормальну висоту H'_g вважатимемо віднесеною до іншого нуля-пункту (іншої висотної референцної системи).

Тоді, порівнявши (B_{GRS}, L_{GRS}, H'_g) та $(B_{LRS}, L_{LRS}, H'_{Балм77})$, можна отримати сім параметрів трансформування координат [8]:

$$B_{GRS}, L_{GRS}, H'_g \Leftrightarrow B_{LRS}, L_{LRS}, H'_{Балм77}$$

відносно гіпсометричної поверхні, використовуючи замість традиційної геодезичної висоти її частину – нормальну висоту.

Це можна зробити, використовуючи вектор $p^{H'}$ параметрів трансформування Гельмерта до нормальних висот

$$p^{H'} = [D_x^{H'}, D_y^{H'}, D_z^{H'}, \mu^{H'}, \varepsilon_x^{H'}, \varepsilon_y^{H'}, \varepsilon_z^{H'}]^T = [p_1^{H'}, p_2^{H'}, p_3^{H'}, p_4^{H'}, p_5^{H'}, p_6^{H'}, p_7^{H'}]^T, \quad (10)$$

та розв'язавши обернену задачу їх знаходження на основі різниць

$$\Delta H' = H'_g - H'_{Балм77}$$

Обчислення параметрів $p^{H'}$ дає можливість розв'язати пряму задачу у такому вигляді:

$$H'_{Балм77} = H'_g + \sum_{i=1}^7 (d_{H'} \cdot D_i^{H'}) \cdot p_i^{H'} + \Delta H \quad (11)$$

$$H'_g = H'_{Балм77} + \sum_{i=1}^7 (d_{H'} \cdot D_i^{H'}) \cdot p_i^{H'} - \Delta H. \quad (12)$$

Або, беручи до уваги формулу (8), отримаємо:

$$H'_g + \sum_{i=1}^7 (d_{H'} \cdot D_i^{H'}) \cdot p_i^{H'} + \Delta H + \zeta_{LRS} = H'_g + \zeta_{GRS} + \sum_{i=1}^7 (d_H \cdot D_i) \cdot p_i + \Delta H \quad (13)$$

$$H'_g + \zeta_{GRS} = H'_g + \sum_{i=1}^7 (d_{H'} \cdot D_i^{H'}) \cdot p_i^{H'} + \Delta H + \zeta_{LRS} - \sum_{i=1}^7 (d_H \cdot D_i) \cdot p_i - \Delta H. \quad (14)$$

Визначивши для території України множину значень різниць $\Delta H' = H'_g - H'_{Балм77}$, знаходимо усереднену величину потенціалу $W_0^{Балм.}$ на підставі рівняння $(\Delta H')_{сер} = - \frac{(W_0 - W_0^{Балм.})}{\gamma}$.

У формулах (13) та (14) скалярні добутки записують у вигляді:

$$(d_H \cdot D_1) = \cos B (\cos L + \sin L \cdot \varepsilon_z) - \sin B \varepsilon_y$$

$$(d_H \cdot D_2) = \cos B (\sin L - \cos L \cdot \varepsilon_z) + \sin B \varepsilon_x$$

$$(d_H \cdot D_3) = \cos B (\cos L \cdot \varepsilon_y - \sin L \cdot \varepsilon_x) + \sin B$$

$$(d_H \cdot D_4) = H + N \cdot W^2$$

$$(d_H \cdot D_5) = N \cdot e^2 \sin B \cos B \sin L$$

$$(d_H \cdot D_6) = - N \cdot e^2 \sin B \cos B \cos L$$

$$(d_H \cdot D_7) = N \cdot e^2 \sin B \cos B (\sin L \cdot \varepsilon_y + \cos L \cdot \varepsilon_x).$$

Тут $W = \frac{a}{N}$, $N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$, a , e^2 – параметри еліпсоїда.

Останнім часом набула поширення так звана супутникова альтиметрія, яку використовують для визначення поверхні Світового океану у вигляді висот поверхні моря (SSH) з точністю 2÷3 см. Крім того, визначення топографії Світового океану за допомогою сучасних методів дає змогу не тільки знаходити значення W_0 , а й достатньо надійно його оцінювати, а також визначати його вікові та сезонні варіації в часі, що може бути використане для з'ясування зв'язків між відомими регіональними системами висот. Значення W_0 в Балтійській системі висот 1977 р., отримане за результатами супутникової альтиметрії, дорівнює $W_0^{Балм.} = 62636855,77 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$.

Вихідні дані для вирівнювання нівелювання в геопотенціальних числах. Вирівнювання даних нівелювання I і II класів, а також III класу, виконаного у гірських районах, починається лише після введення у перевищення поправки за непаралельність рівневих поверхонь, або поправки за перехід до нормальних висот. Саме перевищення з поправкою за непаралельність рівневих поверхонь вважають безпосередньо виміряною величиною. Отже, для двох реперів i та k потрібно обчислити

$$H_k^\gamma - H_i^\gamma = h_{ik} + f, \quad (15)$$

де H_i^γ, H_k^γ – нормальні висоти реперів i, k ; h_{ik} – виміряне перевищення репера k над репером i ; f – поправка за перехід до нормальних висот (поправка за непаралельність рівневих поверхонь);

$$f = -\frac{1}{\gamma_m} (\gamma_{0k} - \gamma_{0i}) H_m + \frac{1}{\gamma_m} (g - \gamma)_m \cdot h_{ik}, \quad (16)$$

де $\gamma_m = 980000 \text{ Мгал}$; γ_{0k}, γ_{0i} – нормальна сила ваги на поверхні рівневого еліпсоїда в точках k та i ; H_m – середня виміряна висота реперів i та k ; g і γ – виміряна і нормальна сила ваги; $(g - \gamma)_m$ – середнє значення аномалії сили ваги в точках i та k .

Тільки після обчислення поправки за непаралельність рівневих поверхонь (16) рекомендовано застосування кількох схем вирівнювання нівелірної мережі, які фактично базуються або на корелатній, або на параметричній версії методу найменших квадратів – залежно від жорсткості мережі.

Беручи за основу визначення геопотенціальних чисел формулу

$$C_P = W_0 - W_P = \sum_{i=1}^m g_i \cdot h_i, \quad (17)$$

можна дійти висновку, що вихідними даними для вирівнювання в розгляданому випадку будуть такі:

- насамперед виникає потреба в числовому значенні W_0 у вихідному пункті нівелювання, який часто поєднується з одним з відомих футштоків, що зумовлює вертикальні дати класичної нівелірної мережі за допомогою відомої інформації про рівень моря. Слід зауважити, що за наявності кількох футштоків такі дані рекомендовано для додаткового визначення варіацій рівня моря і значення W_0 з метою їх зведення на фіксовану епоху. Методику визначення потенціалу сили ваги W_0 на рівневій поверхні геоїда розглянуто у попередньому розділі статті;
- у визначенні нормальних висот окремих GPS-пунктів вимоги до точності нівелювання повинні бути відповідні вимогам нівелювання першого класу, або менше 1 мм на 1 км ходу;
- різниця геопотенціальних чисел ΔC вздовж лінії нівелювання обчислюється за формулою $\Delta C = \sum_{i=1}^n g_i \cdot h_i$, де h_i – перевищення між проміжними точками. При цьому величина g_i являє собою середню силу ваги $g_i = (g_P + g_B) / 2$ в системі IGSN71, яка визначається на основі значень сили ваги в околі проміжних пунктів. P та B – суміжні пункти нівелювання, для яких визначено перевищення h_{PB} (рис.2);

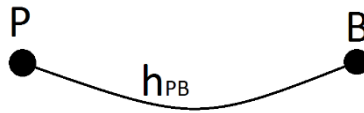


Рис.2. Нівелірна секція

- значення сили ваги для трансформації даних нівелювання в геопотенціальні числа повинні бути відомими в проміжних пунктах на відстані близько 1км з точністю $\cong 1\text{мГал}$. Для відстаней менше 0,5 км достатньо використовувати значення сили ваги лише в одній з цих точок, наприклад, в точці P або B .

Обчислення різниць геопотенціальних чисел нівелірної секції. Послідовність обчислень є такою:

1. Якщо P і B є кінцевими реперами нівелірної секції, то різниця геопотенціальних чисел обчислюється за формулою

$$\Delta C_{PB} = C_P - C_B = g_{PB} h_{PB},$$

де C_P і C_B – геопотенціальні числа реперів P і B ; h_{PB} – перевищення по секції; g_{PB} – середнє значення сили ваги між реперами P і B .

2. Обчислення середнього значення сили ваги g_{PB} :

$$g_{PB} = \frac{(g_P + g_B)}{2},$$

де g_P – сила ваги в точці P ; g_B – сила ваги в точці B .

3. Обчислення значення дійсної сили ваги в точках P і B за аномаліями Буге:

$$\begin{aligned} g &= \Delta g_{\text{Buge}} + \delta_{\text{Buge}} + \gamma_Q; \\ \delta_{\text{faa}} &= 0; \\ \delta_{\text{Buge}} &= 2\pi G \rho H^n; \\ \gamma_Q &= \gamma_0^{\text{Helmert}} - k_1 H^n + k_2 (H^n)^2; \\ \gamma_0^{\text{Helmert}} &= \gamma_a (1 + 0.005302 \sin^2 B - 0.000007 \sin^2 2B); \\ \gamma_a &= 9.78030; \\ k_1 &= 0.30855 (1 + 0.00071 \cos 2B); \\ k_2 &= 0.0723 \cdot 10^{-6}, \end{aligned}$$

де Δg_{Buge} – аномалія Буге (беруть з бази даних);

δ_{faa} – поправка у вільному повітрі, яку традиційно вводять в аномалію Буге;

δ_{Buge} – редукція Буге, або поправка за проміжний шар;

γ_Q – нормальна сили ваги в точці Q на поверхні телуроїда;

H^n – нормальна висота (беруть з бази даних);

G – гравітаційна стала ($G = (6,673 \pm 0,003) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$);

ρ – величина середньої густини в одиницях г/см^3 (для регіону України традиційне значення $\rho = 2,3 \text{ г/см}^3$);

$\gamma_0^{\text{Helmert}}$ – нормальна сила ваги на еліпсоїді Красовського в точці Q' (розмірність мГал);

γ_a – нормальна сили ваги на екваторі (м/с^2);

B – геодезична широта на еліпсоїді Красовського.

Значення сили ваги для редуції даних нівелювання в геопотенціальні числа повинні бути відомі в проміжних точках на відстані близько 1 км з точністю на рівні 1 мГал.

Особливості вирівнювання нівелювання в геопотенціальних числах. Загальні рекомендації. Вирівнювання геопотенціальних чисел та їх різниць є подібним до опрацювання розглянутих типів висот або їх різниць. Можна стверджувати, що будь-який метод вирівнювання, який застосовують у практиці опрацювання нівелірних мереж, може бути використаний і для вирівнювання нівелірної мережі України в геопотенціальних числах.

Головна проблема вирівнювання нівелірних мереж при цьому не зникає: детермінант матриці нормальних рівнянь дорівнює нулю, що свідчить про некоректність або сингулярність розв'язуваної задачі.

Як відомо, така проблема може бути розв'язана кількома шляхами:

- найбільш проста версія розв'язання – фіксація одного геопотенціального числа (кількох) в деякій наближеній системі (що буде відповідним фіксації однієї висоти (кількох) в наближеній системі) та виконання загального вирівнювання мережі нівелювання;
- другий можливий підхід – використання прикордонних зв'язків нівелювання між такими країнами, як Польща, Словаччина, Угорщина, Румунія, в тих місцях, де геопотенціальні числа вже обчислено в системі UELN (United European Levelling Network – Об'єднана Європейська мережа нівелювання) і віднесено до Амстердамського футштоку;
- третя можливість обґрунтована з математичного погляду розв'язання некоректних задач – це застосування методу регуляризації за Тихоновим без фіксації одного або кількох геопотенціальних чисел. Однією з найбільш поширених версій регуляризації для розв'язання некоректних задач є так званий метод SVD (Singular Value Decomposition);
- четвертим можна вважати комбінований перехід, тобто загальне вирівнювання нівелювання I, II, III класів з фіксацією кількох найбільш надійно визначених геопотенціальних чисел та застосування методу SVD для отримання надійного розв'язку.

Зважаючи на простоту запису різниці геопотенціальних чисел ΔC вздовж лінії нівелювання

$$\Delta C = \sum_{i=1}^n g_i h_i,$$

основним методом вирівнювання нівелірної мережі як вільної системи можна вважати параметричний спосіб найменших квадратів з розв'язуванням системи нормальних рівнянь за методом SVD.

Висловлені зауваження стосовно вихідних даних та методу вирівнювання дають можливість перейти до схеми обов'язкових робіт з вирівнювання нівелірної мережі в геопотенціальних числах.

На наш погляд, процес вирівнювання нівелірної мережі I, II, III класів в геопотенціальних числах для створення висотної основи України потребує:

- перевірки вихідних даних нівелювання для виділення помилок перед обчисленням геопотенціальних чисел;

- створення на район України в цифровому вигляді ґриду $1' \times 1.5'$ аномалій Буге у системі IGSN71 з точністю ≤ 1 мГал;
- створення ґриду $1' \times 1'$ нормальних висот на регіон України в цифровому вигляді з точністю не гірше ніж 5 м;
- побудови моделі аномалій сили ваги в регіоні України з точністю 0.5 мГал для оцінювання сили ваги на станціях нівелювання без виконання гравіметричних робіт;
- обчислення геопотенціальних чисел на пунктах нівелювання I, II, III класів;
- побудови бази даних вертикальної основи за рекомендаціями IAG/EUREF з обов'язковим залученням значень геопотенціальних чисел на пунктах нівелювання;
- сумісного вирівнювання нівелювання I і II класів в геопотенціальних числах;
- фіксації вирівняних пунктів I і II класів та виконання сумісного вирівнювання нівелювання III класу в геопотенціальних числах;
- встановлення зв'язку отриманої реалізації висотної основи з іншими системами висот.

Названі обов'язкові роботи не можна розглядати як остаточні, оскільки їх практична реалізація гарантує побудову лише статичної вертикальної основи.

Використання сучасного світового досвіду приводить до необхідності побудови кінематичної вертикальної основи, фіксованої на певну епоху. У разі створення саме кінематичної вертикальної мережі додатковою обов'язковою роботою є об'єднання такої мережі з мережею перманентних GPS-станцій для визначення швидкості руху вертикальної основи саме за GPS-спостереженнями, зважаючи на можливість такого комбінованого підходу і його більшу надійність.

Приклад вирівнювання нівелірної мережі (ходу) в геопотенціальних числах. Для вирівнювання нівелювання I класу використано програмний продукт GeoLab, основне призначення якого – виконання тривимірного вирівнювання різних типів спостережень та їх комбінацій за методом найменших квадратів з детальною оцінкою точності елементів мережі.

Основні функції програмного продукту GeoLab:

- вирівнювання вертикальних, горизонтальних, тривимірних спостережень та їх комбінацій за методом найменших квадратів, при цьому кількість пунктів в мережі є необмеженою;
- апріорна оцінка мережі;
- інтерполяція моделі геоїда та сумісне вирівнювання гравіметричних та традиційних даних;
- перетворення систем координат та картографічних проекцій;
- підтримання різноманітних картографічних проекцій у процесі вирівнювання;
- формування схем геодезичних мереж.

За допомогою цього програмного продукту вирівнюють систему ходів нівелювання I класу. Вихідними пунктами є ґрунтові репери 21 (Словаччина) та 6859 (Польща) (рис.3).

Процес вирівнювання складається з кількох етапів:

1. Складання списку вихідних даних

Вихідними даними для вирівнювання слугують значення геопотенціальних чисел для вихідних пунктів та значення різниць геопотенціальних чисел між пунктами ходи. Значення геопотенціальних чисел отримано за формулою:

$$C_P = H^p \cdot \bar{\gamma} = \sum g \cdot dh,$$

де

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_P^{Helmert} = \gamma_0^{Helmert} - 0,30855(1 + 0,00071 \cos^2 B) H^p + 0,0723 (H^p)^2 \cdot 10^{-6};$$

$$\gamma_0^{Helmert} = 978030(1 + 0,005302 \sin^2 B - 0,000007 \sin^2 2B).$$

Методику обчислення різниць геопотенціальних чисел висвітлено в статті. Вихідні дані для вирівнювання наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Вихідні пункти

Назва пункту	Нормальна висота, H^p , м	Значення C_{Pi} , $m^2 \cdot c^{-2}$
21	101,796	986,3151
6859	204,884	2005,1600



Рис.3. Схема ходів

2. Визначення ваг нівелірних секцій.

Вагу вимірних нівелірних секцій ділянок (ходів) в межах одного класу нівелювання визначають за формулою

$$P = \frac{c}{L},$$

де c – постійний коефіцієнт, який дорівнює 10, застосований з розрахунком, щоб вага для секції була в межах від 1 до 10; L – довжина секції, км.

3. Формування даних для вирівнювання. Дані наведені в табл. 2 – 9.

Таблиця 2

Хід X10683

Початковий пункт	Кінцевий пункт	Перевищення, м	Відстань між пунктами, м	Різниця геопотенціальних чисел, m^2c^{-2}
6859	5731	900	900	0.8799
5731	6849	1900	1900	-6.096
6849	8849	2200	2200	-14.3102
8849	140	1100	1100	1.8715
140	BN2	1800	1800	-1.5779
BN2	BN1	1100	1100	-3.9372
BN1	26	900	900	7.6783
26	19	3300	3300	-15.1539
19	93	1600	1600	-10.9896
93	98	3700	3700	-5.8619
98	165	1200	1200	0.879
165	2557	3500	3500	6.7372

Таблиця 3

Хід X10016_1

Початковий пункт	Кінцевий пункт	Перевищення, м	Відстань між пунктами, м	Різниця геопотенціальних чисел, m^2c^{-2}
2557	27	-10.3413	1800	-10.1384
27	1578	-4.6215	4700	-4.529
1578	3504	-22.7269	12700	-22.2929
3504	BN/On	1.4459	2300	1.4151
BN/On	33	-2.5076	1600	-2.4544
33	169	-4.1171	4800	-4.0372
169	304	-4.3712	2400	-4.292
304	379	11.1492	7500	10.9315

Таблиця 4

Хід X10016_2

Початковий пункт	Кінцевий пункт	Перевищення, м	Відстань між пунктами, м	Різниця геопотенціальних чисел, m^2c^{-2}
379	89	-10.2575	2100	-10.0558
89	C-89	2.5919	3300	2.5475
C-89	4063	-7.4774	2000	-7.3357
4063	3923	-2.9137	2100	-2.8376
3923	4335	-3.4593	4400	-3.3953
4335	414	2.0222	3200	1.9785
414	4436	-5.7726	2900	-5.6665
4436	4216	-0.4754	2700	-0.4714
4216	1747	-0.6556	3100	-0.65

Хід X10016_3

Початковий пункт	Кінцевий пункт	Перевищення, м	Відстань між пунктами, м	Різниця геопотенціальних чисел, $\text{м}^2\text{с}^{-2}$
8	6114	1.2204	100	1.1971
6114	362	0.9047	1700	0.8866
362	5010	-4.23773	8300	-4.1571
5010	5016	0.6047	3200	0.5916
5016	207	2.9296	2500	2.8849
207	1747	-4.0118	2200	-3.9520

Таблиця 6

Хід X10019

Початковий пункт	Кінцевий пункт	Перевищення, м	Відстань між пунктами, м	Різниця геопотенціальних чисел, $\text{м}^2\text{с}^{-2}$
2557	3972	1.4489	100	1.4177
3972	5025	7.9341	3400	7.7831
5025	4673	4.6084	2400	4.5257
4673	6(1)	6.1751	3600	6.0575
6(1)	4392	29.5484	8000	29.3488
4392	4427	16.7127	2100	7.7305
4427	104	0.828	2600	8.6565
104	86	10.3574	1600	10.1603
86	4360	16.6381	2300	16.32
4360	4124	28.5698	2500	28.0216
4124	74	39.0348	7100	38.2857
74	4293	-16.032	1800	-15.7209
4293	302	-28.0165	3300	-27.4741
302	374	-37.2625	5400	-36.5428
374	4284	-21.4534	3400	-21.0414
4284	6	-19.4778	6200	-19.1078

Таблиця 7

Хід X10020_1

Початковий пункт	Кінцевий пункт	Перевищення, м	Відстань між пунктами, м	Різниця геопотенціальних чисел, $\text{м}^2\text{с}^{-2}$
88	201	-6.1487	2300	-6.0293
201	84	-0.5325	1500	-0.522
84	62	-3.9571	4400	-3.8814
62	316	-3.185	2900	-3.1246
316	4194	-5.235	2300	-5.1347
4194	195	-1.8275	11200	-1.7921
195	4863	-2.8836	2200	-2.8283
4863	4	2.1377	1400	2.102
4	8	-4.2556	5100	-4.1794

Таблиця 8

Хід X10020_2

Початковий пункт	Кінцевий пункт	Перевищення, м	Відстань між пунктами, м	Різниця геопотенціальних чисел, $\text{м}^2\text{с}^{-2}$
6	4970	-15.7933	4100	-15.4861
4970	BN/b17	2.0724	200	2.0343
BN/b17	4609	-3.9675	1900	-3.8321
4609	24	-26.8473	11300	-26.3317
24	449	-9.8502	5500	-9.6581
449	4762	-13.8294	3700	-13.5709
4762	7	-7.0134	3400	-6.8828
7	6492	0.5905	100	0.5787
6492	88	1.8074	1800	1.7759

Таблиця 9

Хід X10687

Початковий пункт	Кінцевий пункт	Перевищення, м	Відстань між пунктами, м	Різниця геопотенціальних чисел, $\text{м}^2\text{с}^{-2}$
1747	BN3	4.2021	2600	4.1216
Bn	1899	-0.1211	100	-0.1188
1899	1291	-1.2339	500	-1.2102
1291	417	0.7944	2900	0.7944
417	9753	-1.3071	1200	-1.3071
9753	21	-1.7862	1200	-1.7862

4. Вирівнювання ходів.

У процесі сумісного вирівнювання ходів отримано значення геопотенціальних чисел та висот на кожний пункт нівелірного ходу. Результати вирівнювання наведені в табл. 10 – 11.

Таблиця 10

Значення геопотенціальних чисел пунктів нівелювання

Назва пункту	$C_{Pi}, \text{м}^2\text{с}^{-2}$	Назва пункту	$C_{Pi}, \text{м}^2\text{с}^{-2}$	Назва пункту	$C_{Pi}, \text{м}^2\text{с}^{-2}$	Назва пункту	$C_{Pi}, \text{м}^2\text{с}^{-2}$
104	1974,5135	195	1847,7412	201	1862,2456	207	1838,0560
1291	1000,6663	21	986,3151	3923	1847,2485	6859	2005,1602
140	1967,0801	2557	1915,1453	4063	1850,9050	8849	1971,8418
1578	1897,6320	26	1950,2196	414	1843,6315	89	1858,4371
165	1909,0647	27	1902,5252	4216	1000,4900	93	1920,2032
169	1865,2103	304	1859,5223	4335	1835,4395	9753	993,6376
1899	1033,9876	3504	1875,2890	5731	1996,1310	BN/On	1875,1850
19	1934,3287	379	1870,3118	6849	1987,8140	BN1	1952,4501
BN2	1963,0205	BN3	1836,8833	C-89	1860,2476	24	1902,1731
302	2024,0353	316	1857,6800	362	1838,7532	374	1987,4905
3972	1910,4558	4	1846,9712	4194	1849,5338	4216	1835,5726
4284	1966,4438	4293	2051,5150	4360	2000,9585	4392	1958,1494
4427	1965,8661	449	1892,5130	4609	1928,5053	4673	1922,7488
4762	1878,9376	4863	1844,9003	4970	1931,8447	5010	1834,5952

Закінчення таблиці 10

Назва пункту	$C_{Pi}, \text{м}^2\text{с}^{-2}$	Назва пункту	$C_{Pi}, \text{м}^2\text{с}^{-2}$	Назва пункту	$C_{Pi}, \text{м}^2\text{с}^{-2}$	Назва пункту	$C_{Pi}, \text{м}^2\text{с}^{-2}$
5025	1918,2337	6	1947,3344	6(1)	1928,8015	6114	1837,8877
62	1857,8119	6492	1866,5294	6859	2005,1600	7	1872,0496
74	2067,2548	8	1842,7895	84	1861,6942	86	1984,6500
88	1868,2864						

Таблиця 11

Значення висот пунктів нівелювання

Назва пункту	$H_i^y, \text{м}$	Назва пункту	$H_i^y, \text{м}$	Назва пункту	$H_i^y, \text{м}$	Назва пункту	$H_i^y, \text{м}$
104	230,0075	195	108,3395	201	123,0786	207	104,5151
1291	102,8569	21	100,5510	3923	108,8447	6859	204,4130
140	186,5348	2557	162,9949	4063	111,7589	8849	184,6293
1578	148,0321	26	188,7335	414	107,4072	89	116,6452
165	156,9953	27	152,6532	4216	101	93	162,0749
169	120,1257	304	115,7542	4335	105,3852	9753	102,3405
1747	100,5028	33	124,2428	4436	101,6343	98	156,0990
1899	104,1097	3504	125,3061	5731	205,4362	BN/On	126,7507
19	173,2828	379	126,9032	6849	199,2198	BN1	180,9085
BN2	184,9261	BN3	104,7042	C-89	119,2369	24	157,7654
302	280,5563	316	115,4025	362	105,2192	374	243,2937
3972	164,2025	4	107,5919	4194	285,5710	4216	101,1586
4284	221,8401	4293	308,5730	4360	257,0016	4392	212,4677
4427	229,1798	449	147,9151	4609	184,6127	4673	176,7444
4762	134,0855	4863	105,4554	4970	186,5688	5010	101,5859
5025	172,1364	6	202,362	6(1)	182,9193	6114	118,5878
62	118,5878	6492	127,4211	6859	204,4130	7	127,0719
74	324,6057	8	103,3362	84	122,5450	86	240,3639
88	129,2277						

Висновок. Вирівнювання нівелірних мереж в геопотенціальних числах дає найбільш об'єктивну характеристику висотного положення пунктів нівелірних мереж. При цьому береться до уваги неоднозначність дійсного гравітаційного поля Землі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бровар В.В. Потенциалы начальных пунктов изолированных нивелирных сетей / В.В. Бровар // Геодезия и картография. – 1988. – №2. – С. 21-24.
2. Вировец А.М. Основная нивелирная сеть СССР / А.М. Вировец // Сб. науч.-техн. и произв. статей. – 1948. – Вып 19. – С. 38-52.
3. Еремеев В.Ф. О системе высот нивелирной сети СССР/ В.Ф. Еремеев., В.И. Звонов // Труды ЦНИИГАиК. – 1953. – Вып. 96.
4. Мещерский И.Н. Главная высотная основа страны /И.Н. Мещерский // Геодезия и картография. – 1983. – №1. – С. 22-26.
5. Мещерский И.Н. Анализ результатов нивелирования I и II классов (1957-1695 гг.) / И.Н. Мещерский, И.И. Энтин // Тр.ЦНИИГАиК.- 1972. – Вып. 169. – С. 3-26.
6. Павлив П.В. Проблемы высокоточного нивелирования / П.В. Павлив. – Львів: Вища школа, 1980. – 124 с.

7. Пеллинен Л.П. Новые возможности использования гравитационных данных при реализации геодезических систем координат / Л.П. Пеллинен // Геодезия и картография. – 1987. – №3. – С. 10-13.

8. Савчук С.Г. Основи формування геодезичної референцної системи України: дис. ... д-ра тех. наук: 05.24.01 / С. Г. Савчук. – Львів, 2005. – 275 с.

9. Юркина М.И. Потенциал в начале счета высот и контроль геометрического нивелирования / М.И. Юркина // Геодезия и картография. – 1981. – №10. – С. 11-15.

REFERENCES

1. Brovar V.V. (1988) *Potencialy nachalnyh punktov izolirivanykh nivelirnykh setey [The potentials of the initial points of isolation leveling networks]*. Geodesiya i kartographia. – Moscow [in Russia].

2. Virovec A.M. *Osnovnaya nivelirnaya set SSSR [The main leveling network of the USSR]*. Collection of scientific, technical and industrial articles, № XIX. – Moscow [in Russia].

3. Eremeev V.F., Zvonov V.I. (1953) *O sisteme vysot nivelirnoy seti SSSR [About height leveling network of the USSR]*. Tr. TsNIIGAiK, №96. – Moscow [in Russia].

4. Mescherskiy I.N. *Glavnaya vysotnaya osnova strany [The main high base of the country]*. Geodesic cartography, №1. – Moscow [in Russia].

5. Mescherskiy I.N. Entin I.I. (1972) *Analiz rezultatov nivelirovaniya I i II klassov (1957-1966 goda) [Analysis of the results of leveling I and II classes (1957-1965)]*. Tr. TsNIIGAiK, №169. – Moscow [in Russia].

6. Pavliv P.V. (1980) *Problema vysokotochnogo nivelirovaniya [The problem of high-rise leveling]*. High school. Publishing in Lvivskiy University. – Lviv [in Ukraine].

7. Pellinen L.P. (1987) *Novye vozmozhnosti ispolzovania dannyh pri realizazii geodezicheskikh system koordinat [New features of the gravity data in the implementation of geodetic reference systems]*. Geodesy and cartography, №3/ - Moscow [in Russia].

8. Savchuk S.G. (2005) *Osnovy formuvannya geodezychnoyi referencznoyi systemy Ukrayiny [Bases of formation of geodetic reference system of Ukraine]*. Doctor's thesis/ L'viv: Nacional'nyj universytet «L'vivska politehnika» [in Ukraine].

Urkina M.I. (1981) *Potencial v nachale scheta vysot i control geometricheskogo nivelirovaniya [Potential early in the count, and the heights of geodetic leveling control]*. Geodesy and cartography, №10. – Moscow [in Russia].

О.В. Кучер

В.С. Староверов

А.С. Акчурина

СОВРЕМЕННЫЙ ПОДХОД К УРАВНИВАНИЮ НИВЕЛИРНОЙ СЕТИ УКРАИНЫ

Указано, что неоднородность действительного гравитационного поля приводит к неоднозначности определения высот. Нормальные высоты, используемые в Украине, относятся к геопотенциальным системам высот, что требует использования геопотенциальных чисел.

Приведена методика уравнивания нивелирных сетей с учетом гравитационного поля Земли.