

УДК 539.3

Іванченко Г.М., канд. техн. наук

ВПЛИВ ПОПЕРЕДНІХ НАПРУЖЕНЬ У ЗЕМНІЙ КОРИ НА ПОШИРЕННЯ В НІЙ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ

Вступ. Розрив розв'язку рівнянь теорії пружності називається сильним, якщо він має місце у похідних нижчого порядку. Рухомі фронти сильних розривів в нелінійній теорії пружності називають розривними хвилями [1], оскільки до них належать хвилі, перед рухомими фронтами яких середовище знаходиться у ненапруженому стані, за фронтом напруги мають кінцеві величини, а на поверхні фронту вони терплять розрив безперервності. У лінійній теорії пружності рухомі фронти розривів напружень називаються слабкими ударними хвилями. Вони переносять на фронтах скачок тиску і мають швидкість звуку.

У ряді випадків при теоретичному моделюванні явищ поширення в тектонічних структурах нестационарних хвиль, ініційованих сейсмічними процесами або вибухами, можна будувати профілі хвиль, що розповсюджуються, в класі ламаних функцій, вважаючи, що рухомі поверхні, на яких перші похідні від функції переміщень терплять розрив, є фронтами хвиль. При цьому важливо враховувати, що через вікові умови формування механічні параметри скельних порід, що становлять дану тектонічну структуру, володіють властивості неоднорідності і анізотропії. Тому для вивчення їх динамічної поведінки слід застосовувати динамічну теорію пружності анізотропних середовищ [3-5, 8, 10-12].

Особливість тектонічних структур полягає у тому, що їх скельні породи напружені силами тяжіння верхніх шарів, що приводить до необхідності використання нелінійної теорії пружності. Якщо інтенсивність розривної хвилі невелика, то можна її досліджувати на основі рівнянь, лінеаризованих в околі незбуреного стану [2]. Навіть для початкової однорідної ізотропії побудовані таким чином рівняння динаміки формою мають вигляд рівнянь анізотропного середовища, якщо поле попередніх пружних напружень анізотропне. Тому така штучна анізотропія іноді називається „наведеною”. У даній роботі досліджується вплив неоднорідного поля попередніх напружень в однорідному ізотропному пружному середовищі на характер розповсюдження в ньому розривної хвилі, ініційованої в малому сферичному джерелі.

1. Постановка задачі. Сформулюємо задачу про поширення розривної хвилі в переднапруженому середовищі з використанням

значень основних величин, в певних межах і з деякими спрощеннями, характерних для верхніх шарів Землі.

Розглянемо напівнескінченне однорідне пружне середовище $x_3 \leq 0$. Нехай на її елементи діють сили тяжіння, де g – прискорення вільного падіння. Під дією цих сил в середовищі створюється поле початкових напружень

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^0 &= \sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0 = g\rho x_3, \\ \sigma_{12}^0 &= \sigma_{23}^0 = \sigma_{31}^0 = 0,\end{aligned}\quad (1.1)$$

яке є рівняннями рівноваги. Воно відповідає гідростатичному розподілу напружень, обумовленим віковими релаксаціями деформацій.

Поширення пружних хвиль в цьому середовищі описується лінеаризованими рівняннями [2]

$$\nabla_i (\sigma^{ij} + \sigma_0^m \nabla_n u^j) - \rho \ddot{u}^j = 0 \quad (i, j, n = 1, 2, 3), \quad (1.2)$$

складеними у базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Тут u^i – контраваріантні компоненти вектора переміщень; шукані величини без нуля характеризують динамічний стан середовища, ініційований в її переднапруженому стані; крапкою над буквою позначене диференціювання за часом; символ коваріантної похідної визначається формулою

$$\nabla_n u^j = \frac{\partial u^j}{\partial x^n} + \Gamma_{nm}^j u^m, \quad (1.3)$$

де Γ_{nm}^j – символ Крістоффеля другого роду.

Рівняння (1.2) отримані в [2] в припущенні малих деформацій в початковому переднапруженому стані. Рівняння (1.2) в декартовій прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$ з урахуванням (1.1) мають вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \sigma_{ii}^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{33}^0}{\partial x_3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \rho \ddot{u}_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.4)$$

Побудована система лінеаризованих рівнянь динаміки переднапруженого ізотропного пружного середовища по своїй структурі еквівалентна рівнянням руху неоднорідного анізотропного пружного середовища, які можна представити у вигляді [6]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 c_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} + \sum_{k,p,q=1}^3 \frac{\partial c_{ik,pq}}{\partial x_k} \frac{\partial u_q}{\partial x_p} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i=1, 2, 3), \quad (1.5)$$

де $c_{ik,pq}$ – компоненту тензора пружних постійних. Завдяки симетрії, його зручно подати у формі квадратної (6 x 6) матриці.

Для системи (1.1), (1.2) цій матриці зручно надати форму

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu + \rho g x_3 & \lambda - \rho g x_3 & \lambda - \rho g x_3 \\ \lambda - \rho g x_3 & \lambda + 2\mu + \rho g x_3 & \lambda - \rho g x_3 \\ \lambda - \rho g x_3 & \lambda - \rho g x_3 & \lambda + 2\mu + \rho g x_3 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} \mu + \rho g x_3 & 0 & 0 \\ 0 & \mu + \rho g x_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \rho g x_3 \end{pmatrix}.$$

Важливо зазначити, що в загальному випадку для неоднорідного анізотропного середовища елементи $c_{ik,pq}$ матриці $C_{\alpha\beta}$ підпорядковані нерівностям

$$c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad |c_{\alpha\beta}| > 0, \quad (1.7)$$

які витікають з умови позитивної визначеності потенційної енергії середовища.

За допомогою рівнянь (1.5) досліджуються явища поширення фронтів розривних хвиль, породжених ударною дією рівномірного тиску на поверхню сферичної порожнини малого розміру, заглибленої в пружному переднапруженому середовищі уздовж осі Ox_3 на відстані $x_3 = -h$ від її вільної поверхні $x_3 = 0$. У загальному випадку при дії на вільну поверхню анізотропного пружного середовища зовнішнього ударного тиску від неї починають виходити три розривні хвилі, перша – квазіподовжня, дві інші – квазіпоперечні [6]. У даному випадку через симетрію геометричних і механічних параметрів системи щодо осі, інтенсивність квазіпоперечної хвилі, поляризованої в окружному напрямі по відношенню до цієї осі, рівна нулю, тому тут вона розглядатися не буде.

2. Рішення задачі. Для вирішення даної задачі використовуємо нульове наближення променевого методу [7-9], яке дозволяє будувати промені і fronti розривних хвиль та обчислювати значення розривів деформацій на поверхні фронту [3-5, 8, 10-12]. Фронт хвилі є поверхня

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) = 0, \quad (2.1)$$

під час переходу через яку поле переміщень \vec{u} залишається безперервним, але, принаймні, одна з часткових похідних першого порядку від його складових терпить розрив безперервності [8].

У регулярних точках поверхні (2.1) її рух визначається вектором нормалі

$$\vec{n} = \frac{\text{grad } \psi}{|\text{grad } \psi|}, \quad (2.2)$$

де

$$\text{grad } \psi = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \vec{i}_k \equiv \sum_{k=1}^3 p_k \vec{i}_k. \quad (2.3)$$

Швидкість v руху фронту (2.1) уздовж нормалі \vec{n} в будь-якій його точці N називається фазовою. Вона має значення

$$v(N, t) = \frac{-\psi}{|\text{grad } \psi|} \equiv \frac{-p_0}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^3 p_k^2\right)}}. \quad (2.4)$$

Енергія хвилі на її фронті переноситься уздовж променя з променевою швидкістю, яка в загальному випадку не ортогональна поверхням хвильових фронтів і пов'язана з фазовою швидкістю співвідношенням

$$\vec{\xi} \cdot \vec{n} = v. \quad (2.5)$$

У анізотропних середовищах вектор зсуву \vec{u} в загальному випадку не є паралельним або перпендикулярним напрямку розповсюдження, а визначається вектором поляризації \vec{A} . Для вибраного напрямку \vec{n} швидкість v і вектор \vec{A} будуються як власні числа і вектори рівнянь Крістоффеля [5, 6], з умов існування нетривіальних розв'язків цієї системи виходить рівняння третього ступеня щодо квадрата фазової швидкості v^2

$$\left| \sum_{k,p,q=1}^3 c_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \rho \delta_{ik} \right| = 0. \quad (2.6)$$

Для побудови хвильового фронту в неоднорідному анізотропному середовищі необхідно знайти розв'язки рівняння, яке з використанням методу характеристик приводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$dx_m/d\tau = \xi_m, \quad dp_m/d\tau = \eta_m \quad (m = 1, 2, 3), \quad (2.7)$$

де

$$\xi_m \equiv \xi_m^{(r)}(\vec{n}, x_k) = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad (2.8)$$

$$\eta_m \equiv \eta_m^{(r)}(\vec{n}, x_k) = -\frac{1}{2} \sum_{i,p,q=1}^3 \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}. \quad (2.9)$$

Перша група рівнянь системи (2.7) описує поширення хвилі уздовж променя із променевою швидкістю $\xi_m \equiv \xi_m^{(r)}(\vec{n}, x_k)$. Друга група рівнянь визначає геометрію цього променя. Якщо пружне середовище однорідне (такі випадки розглянуті в [3-5, 10-12]), то похідні $\partial \lambda_{ik,pq} / \partial x_m$ у правих частинах рівності (2.9) дорівнюють нулю, тому всі η_m рівно нулю, рівняння другої групи системи (2.7) елементарно інтегруються і проміння виявляється прямолінійними. У випадках, що розглядаються, унаслідок неоднорідності поля поперечної напруженості функції η_m відмінне від нуля і промені набувають викривленість. Тому для інтеграції системи (2.7) доводиться використовувати чисельні методи. При цьому поверхні, що містять знайдені точки променів із координатами, відповідними заданим значенням, визначаються поверхні фронтів розривних хвиль, що трансформуються зі зміною τ .

3. Результати дослідження. По запропонованій методиці досліджено видозміну фронтів розривних хвиль, які поширюються в пружних середовищах густиною $\rho = 3180 \text{ кг/м}^3$ із модулем пружності $E = 8.7 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2$ та різними значеннями коефіцієнта Пуассона. Враховуючи осьову симетрію сформульованої задачі, розглядатимемо геометрію променів та слідів фронтів розривних хвиль обох поляризацій на одній із рівноправних вертикальних площинах, які містить джерело розривної хвилі.

На рис.1 показана сітка променів і десять положень фронтів квазіпоперечної розривної хвилі, породженої миттєвою зміною тиску в сферичній порожнині малих розмірів при коефіцієнті Пуассона середовища $\nu = 0,05$. Еволюціонуючий фронт квазіподовжньої хвилі, який виникає на поверхні порожнини-джерела одночасно з квазіпоперечною, має менші особливості, тому на малюнку показаний тільки один його стан, співпадаючий за часом з десятим положенням фронту квазіпоперечної хвилі. Видно, що фронт квазіподовжньої хвилі завжди випереджає фронт квазіпоперечної, оскільки її фазова швидкість $v_{(1)}$ має більше значення, ніж швидкість квазіпоперечної хвилі – $v_{(2)}$. На фронті квазіподовжньої хвилі позначені місця його перетину із

променями, які виходять від точок, розташованих на поверхні порожнини-джерела із кроком 4° . Промені квазіпоперечних хвиль, виходячи з тих же точок поверхні джерела, поблизу особливих напрямів (співпадаючих із напрямками осей Ox_1 і Ox_3) перетинаються, утворюючи каустики, на яких інтенсивність хвилі значно зростає. Крім того, всі промені, особливо квазіпоперечної хвилі, вигинається у бік ущільнення середовища.

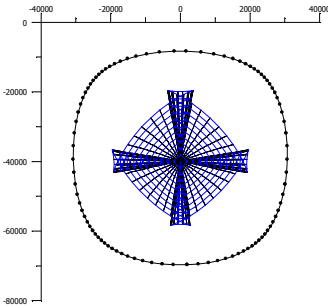


Рис. 1

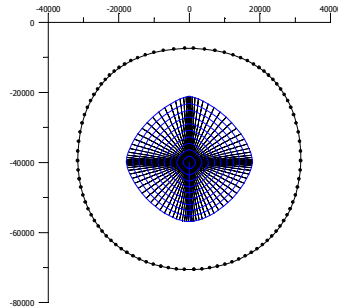


Рис. 2

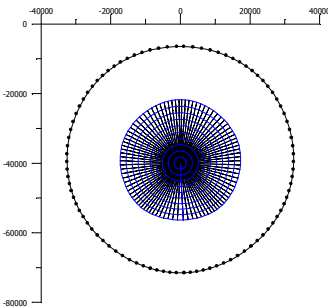


Рис. 3

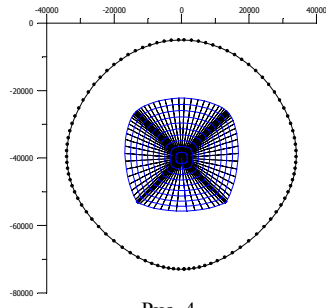


Рис. 4

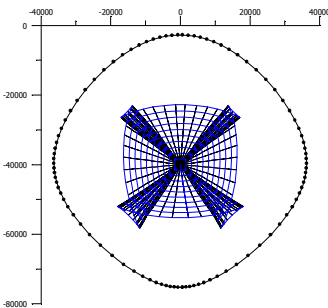


Рис. 5

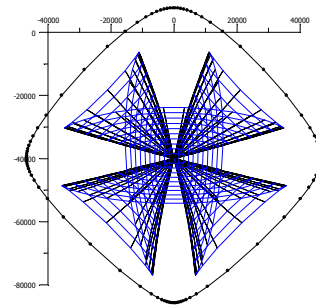


Рис. 6

При зростанні коефіцієнта Пуассона до $\nu = 0,15$ картина розбіжності променів розривних хвиль обох поляризацій декілька змінюється (рис.2). У цьому середовищі замість каустик поблизу особливих напрямів спостерігається тільки згущування променів, які не перетинаються.

У свою чергу точки перетину сімейства променів з фронтом квазіпоперечної хвилі поблизу цих особливих напрямів залишаються, як і у попередньому випадку, дещо розрідженими.

Найближчим до ізотропного є середовище, що володіє вказаними густиною і модулем пружності, в якій коефіцієнт Пуассона складає $\nu = 0,20$ (рис. 3). Як квазіпоперечна так і квазіпоздовжня розривні хвилі мають майже сферичні фронти, на яких рівномірно розташовані точки їх перетину із променями, дещо викривленими у бік зменшення координати x_3 .

Подальше збільшення коефіцієнта Пуассона до $\nu = 0,25$ приводить до незначного згущення променів квазіпоздовжньої хвилі в околі особливих напрямів (рис. 4). При цьому промені квазіпоперечних хвиль біля особливих напрямів розріджуються, а оддалік їх – зближуються не перетинаючись.

На рис. 5 зображена геометрія аналогічних фронтів і променів розривних хвиль обох поляризацій для пружного середовища з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,30$. У такому середовищі криволінійні промені квазіпоперечної хвилі утворюють каустики оддалік особливих напрямів, причому у бік заглиблення в середовище каустики обширніші. Квазіпоздовжня хвиля навпаки – концентрується уздовж координатних осей Ox_1 і Ox_3 , про що свідчить згущення поблизу осей точок перетину променів з фронтом. Причому унаслідок поперечної напруженості середовища власною вагою це згущення виразніше на великих глибинах.

Зростання коефіцієнта Пуассона до $\nu = 0,40$ (рис.6) ще більше трансформує фронти розривних хвиль: квазіпоздовжньої наближається до квадратної форми з концентрацією інтенсивності на вершинах (уздовж осей координат), квазіпоперечної – обширно каустує на решті частин даної площини.

Приведені ілюстрації свідчать про значний вплив на геометрію фронтів розривних хвиль в пружних попередньо напружених середовищах коефіцієнта Пуассона, зміна якого перерозподіляє напрями і характер згущення променів обох хвиль. У місцях таких згущень зростає інтенсивність хвилі. Слід мати на увазі, що у всіх випадках зростання інтенсивності хвилі однієї поляризації супроводжується її зменшенням для хвилі іншої поляризації.

1. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. – М.: Мир, 1972. – 183с.
2. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: В 2 т. Т.1 Общие вопросы. К.: Наукова думка, 1986.
3. Гуляев В.И., Иванченко Г.М. Фокусировка и рассеивание плоских ударных волн на поверхности раздела анизотропных упругих сред //Прикл. механика и техн. физика. – 2002. –**43**, №5. – С. 21–27.
4. Гуляев В.И., Иванченко Г.М. Фокусировка и рассеивание плоской акустической волны трансверсально-изотропными упругими линзами //Акустический журнал. – 2004. **50**, №2 – С.177–183.
5. Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М., Яковенко Е.В. Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000. – **64**, №3. – С. 394–402.
6. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. М.: Наука, 1982 (Dieulesaint E. et Royer D. Ondes Elastiques Dans Les Solides. Application au Traitement du Signal. Masson et C^{ie}, 1974)
7. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304с.
8. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград: Наука, 1980. 280 с.
9. Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. К.: Наукова думка, 1988. 220 с.
10. Gulyaev V.I., Lugovoi P.Z., Ivanchenko G.M. Focusing and scattering the nonstationary wave by the free surface of an anisotropic elastic medium //Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, №7. – P.86–93.
11. Gulyaev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M. Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media //International Journal of Solids and Structures – 2003. – **40**. – P. 237–247.
12. Lugovoy P.Z., Gouliayev V.I. Propagation of shock wave fronts in anisotropic layered media. CP505, Shock Compression of Condensed Matter – 1999/ Edited by M.D.Furnish, L.C.Chhabildas and R.S.Nixon //Proceeding of the Conference of the American Physical Society, Snowbird, Utah, USA. – P. 1287-1290.

Надійшло до редакції 08.12.2006 р.