

УДК 539.3

Дзира Б.І.,
Чорнописький Д. Г., канд. техн. наук

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ПЕРШОГО ВАРІАНТУ МЕТОДУ ЗБУРЕННЯ ФОРМИ ГРАНИЦІ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ У ВИПАДКУ ТІЛ ОБЕРТАННЯ, БЛИЗЬКИХ ДО КАНОНІЧНИХ

У статті отримано розклад точного розв'язку задачі кручення суцільного вала з еліпсоїдальною порожниною в ряд по ступенях параметра ϵ , який характеризує її ексцентриситет. Для точок порожнини з максимальним (мінімальним) значенням концентрації напружень показано співпадіння коефіцієнтів розкладу при ступенях ϵ точного і наближеного розв'язку, отриманого на основі першого варіанту збурення форми границі, що застосовується для розв'язку просторових задач теорії пружності у випадку тіл обертання, близьких до канонічних. Встановлено збіжність послідовних наближень як ітераційного процесу до точних розв'язків.

Метод збурення відомий своїм застосуванням при розв'язку ряду задач механіки суцільних середовищ, що докладно викладений у монографії [7]. В механіці твердого деформованого тіла методом збурення пружних властивостей у [11] отримано розв'язок задач про концентрацію напружень у зоні отворів пластин з урахуванням фізичної нелінійності матеріалу [4]. У статті [10] метод збурення пружних властивостей розповсюджений для розв'язку задач у випадку ортотропії матеріалу, де за основу нульового наближення використовуються пружні властивості трансверсально ізотропного матеріалу. Завдяки роботам О.М. Гузя і Ю.М. Немиша [2,3,6] метод збурення форми границі одержав широке використання для дослідження концентрації напружень у пружних пластинах і оболонках із криволінійними отворами. Стосовно до розв'язку просторових задач теорії пружності метод збурення форми границі в монографіях [2,3] використовувався в двох варіантах для тіл неканонічної форми, що знаходяться в полі статичних зусиль. Перший варіант методу збурення форми границі використовувався для розв'язку задач у випадку тіл (включень) і середовищ з порожнинами, близьких до канонічних, обмеженими ортогональними поверхнями. Другий варіант методу збурення форми границі використовувався для рішення задач пружної рівноваги тіл, обмежених неортогональними поверхнями [8, 9]. На основі першого варіанта методу збурення форми границі [3] показана практична збіжність наближених розв'язків задач для дослідження

концентрації напружень у пружних тілах, що містять еліпсоїдальні порожнини при крученні вала і всебічному розтягу-стиску середовища, що допускають точні розв'язки [5, 12].

У даній статті виконаний розклад точних аналітичних розв'язків задачі концентрації напружень при крученні вала з еліпсоїдальною порожниною по степеням параметра ε , що характеризує її ексцентриситет. Дано порівняння коефіцієнтів при степенях малого параметра ε розкладання точного [5] і наближеного розв'язків, що приведено в монографії [3]. Коефіцієнти розкладу точного розв'язку збігаються з коефіцієнтами наближеного розв'язку, що свідчить про точну збіжність наближеного розв'язку в рамках першого варіанту методу збурення форми границі.

1. Точний розв'язок задачі про кручення вала з еліпсоїдальною порожниною представимо згідно [5]

$$K_{\gamma\varphi}^T = \frac{\sigma_{\gamma\varphi}}{\rho'b} \Big|_{\rho=1, \gamma=\frac{\pi}{2}} = \frac{2(\xi-1)^2}{3\xi_1^2 c - 5\xi_1 + 2}, \quad (1.1)$$

де

$$\rho' = \frac{2M}{\pi R_1^4}, c = \frac{\arctg \sqrt{\xi_1 - 1}}{\sqrt{\xi_1 - 1}}, \xi_1 = \frac{b}{\rho^*} > 1 \quad (1.2)$$

або

$$c = \frac{1}{\sqrt{1-\xi_1}} \left[\ln(1 + \sqrt{1-\xi_1}) - \frac{1}{2} \ln \xi_1 \right], \xi_1 = \frac{b}{\rho^*} < 1. \quad (1.3)$$

При цьому ρ^* — радіус кривизни поверхні еліпсоїда $\rho = 1$, який при $\gamma = \pi/2$ дорівнює $\rho^* \Big|_{\rho=1, \gamma=\frac{\pi}{2}} = \frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon}$. Ексцентриситет еліпсоїдальної

порожнини визначається формулою $\varepsilon = \frac{a-b}{a+b}$. Тут M — момент кручення вала, R_1 — його радіус, a, b — півосі порожнини.

Наближений розв'язок про концентрацію напружень на поверхні еліпсоїдальної порожнини вала при його крученні моментом M , що отримано на основі першого варіанта методу збурення форми границі, має вид [3]

$$\frac{\sigma_{\gamma\varphi}}{\rho'b} \Big|_{\rho=1, \gamma=\frac{\pi}{2}} = 1,25 - 0,7143\varepsilon + 0,8842\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (1.4)$$

Розв'язок отриманий на основі перших трьох наближень (нульове, перше, друге).

В залежності від ε визначимо значення параметра ξ_1 в точці $(0, b)$ для стиснутого (рис. 1) і витягнутого еліпсоїдів обертання (рис. 2).

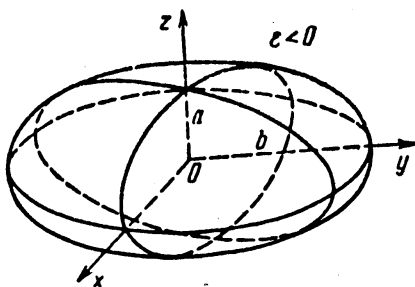


Рис. 1

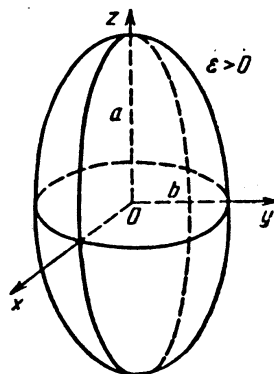


Рис. 2

Помітимо, що формула (1.2) справедлива для випадку $\varepsilon < 0$ стиснутого в полюсах еліпсоїда обертання, а (1.3) — $\varepsilon > 0$ витягнутого еліпсоїда обертання.

Перейдемо у виразі (1.1) при $\varepsilon < 0$ ($\xi_1 > 1$) до визначення коефіцієнта концентрації напружень на поверхні порожнини при $\rho = 1$, $\gamma = \pi/2$ у залежності від параметра ε . Тоді для стиснутого еліпсоїда в цій точці величина ξ_1 дорівнює

$$\xi_1 = b/\rho^* = (b/a)^2 > 1, \quad (1.5)$$

а для витягнутого еліпсоїда обертання $\varepsilon > 0$ маємо

$$\xi_1 = b/\rho^* = a/b < 1. \quad (1.6)$$

У цій точці для стиснутого ($\varepsilon < 0$) еліпсоїда одержимо

$$\xi_1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2. \quad (1.7)$$

Перейдемо в (1.7) від значення $\varepsilon = -\varepsilon$, тобто замінивши ε на $(-\varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$. Для ξ_1 одержимо вираз

$$\xi_1 = \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 > 1. \quad (1.8)$$

Тоді формула (1.1) за умови (1.2) прийме вид

$$K_{\gamma\varphi}^T \Big|_{\rho=1, \gamma=\frac{\pi}{2}} = \frac{2 \left[\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 - 1 \right]^2}{3 \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^4 \frac{\arctg \sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 - 1}}{\sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 - 1}} - 5 \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 + 2}. \quad (1.9)$$

Безпосередній розклад (1.9) в ряд по степеням ε є ускладненим, оскільки при значенні $\varepsilon = 0$ (нульове наближення) маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$, а одержати коефіцієнти у вищих наближень практично неможливо. Введемо заміну

$$u(\varepsilon) = \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 - 1. \quad (1.10)$$

Тоді (1.9) запишемо у вигляді

$$K_{\gamma\varphi}^T \Big|_{\rho=1, \gamma=\frac{\pi}{2}} = \frac{2u^2}{3(u+1)^2 \frac{\arctg \sqrt{u}}{\sqrt{u}} - 5(u+1) + 2}. \quad (1.11)$$

Відмітимо, що при $\varepsilon \rightarrow 0$, $u(\varepsilon) \rightarrow 0$. У цьому випадку $K_{\gamma\varphi}^T(u(\varepsilon))$ є складною функцією і її розклад в ряд по степеням ε в околі значення $\varepsilon = 0$ має вигляд

$$K_{\gamma\varphi}^T(u(\varepsilon)) = K_{\gamma\varphi}^T(0) + \frac{dK_{\gamma\varphi}^T(u(\varepsilon))}{du} \cdot \frac{du}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 K_{\gamma\varphi}^T(u(\varepsilon))}{du^2} \left(\frac{du}{d\varepsilon} \right)^2 + \frac{dK_{\gamma\varphi}^T(u(\varepsilon))}{du} \cdot \frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} \right]_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon^2 + \dots \quad (1.12)$$

Скористаємося розкладом функції $\frac{\arctg \sqrt{u}}{\sqrt{u}}$ при $|\sqrt{u}| < 1$ в ряд по степеням \sqrt{u} [1]

$$\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{u}}{\sqrt{u}} = 1 - \frac{u}{3} + \frac{u^2}{5} - \frac{u^3}{7} + \dots + (-1)^n \frac{u^n}{2n+1} + \dots \quad (1.13)$$

Використовуючи розклад (1.13) та виділивши зі знаменника множник u^2 , переходимо від виразу (1.11) до наступного його вигляду

$$K_{\gamma\varphi}^T = \frac{2}{\frac{8}{5} - \frac{8}{35}u + \frac{8}{105}u^2 - \frac{8}{231}u^3 + \dots} \quad (1.14)$$

Переходячи до границі в (1.14) при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($u(\varepsilon) \rightarrow 0$) при $\varepsilon = 0$, отримаємо

$$K_{\gamma\varphi}^T(0) = 1,25. \quad (1.15)$$

Згідно (1.14) для обчислення коефіцієнтів у розкладі (1.12) по степеням ε необхідно від змінної $u(\varepsilon)$ мати наступні вирази

$$\begin{aligned} V(u) &= \frac{8}{5} - \frac{8}{35}u + \frac{8}{105}u^2 - \frac{8}{231}u^3 + \dots \\ \frac{dV(u)}{du} &= -\frac{8}{35} + \frac{16}{105}u - \frac{8}{77}u^2 + \dots \\ \frac{d^2V(u)}{du^2} &= \frac{16}{105} - \frac{16}{77}u + \dots \\ \frac{d^3V(u)}{du^3} &= -\frac{16}{77} + \dots \\ V^2(u) &= \left(\frac{8}{5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{8}{35}u + \left(\frac{8}{35}\right)^2 u^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.16)$$

Відмітимо, що коефіцієнти в розкладі (1.12) обчислюються в $\varepsilon = 0$, $u(0) = 0$. Інші складові виразу (1.12) у цій точці мають вид згідно (1.10), (1.16)

$$\begin{aligned} \frac{du(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= 4 \frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^3}, \quad \frac{d^2u(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = 8 \frac{2+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^4}, \\ \frac{dK_{\gamma\varphi}^T(u(\varepsilon))}{du} &= \left(\frac{2}{v(u)} \right)' = -2 \frac{v'(u)}{v^2(u)}, \\ \frac{d^2K_{\gamma\varphi}^T(u(\varepsilon))}{du^2} &= -2 \left[\frac{v''(u)}{v^2(u)} - 2 \left(\frac{v'(u)}{v^2(u)} \right)^2 v(u) \right]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Визначивши коефіцієнти в (1.12) при степенях ε у точці $\varepsilon = 0$, $u(0) = 0$ з врахуванням (1.16), (1.17), отримаємо наступні значення

$$\frac{dK_{\gamma\phi}^T(u(\varepsilon))}{du} \cdot \frac{du}{d\varepsilon} \Big|_{u(0), \varepsilon=0} = \frac{\frac{8^2}{35}}{\left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{5}{7},$$

$$\frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 K_{\gamma\phi}^T(u(\varepsilon))}{du^2} \cdot \left(\frac{du}{d\varepsilon}\right)^2 + \frac{dK_{\gamma\phi}^T(u(\varepsilon))}{du} \cdot \frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} \right]_{u(0), \varepsilon=0} = \frac{130}{147}. \quad (1.18)$$

В такий спосіб з (1.12) отримаємо наступні вирази розкладу по степеням ε з врахуванням повернення до заміни ε на $(-\varepsilon)$ для стиснутого еліпсоїда в точці $(0, b)$ отримаємо

$$K_{\gamma\phi}^T = 1,25 - \frac{5}{7}\varepsilon + \frac{130}{147}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (1.19)$$

В остаточному підсумку цей вираз з урахуванням обчислення його складових до четвертого знака в точності збігається з виразом (1.4), що отримано в монографії [3] на основі першого варіанта методу збурення форми границі.

2. Перейдемо до визначення точного розв'язку в $(0, b)$ для витягнутого еліпсоїда обертання при $\varepsilon > 0$, тобто з використанням виразів (1.1), (1.3)

$$\xi_1 = \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 < 1, \quad K_{\gamma\phi}^T = \frac{2z^2}{3(1-z)^2 \frac{1}{2\sqrt{z}} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} - 5(1-z) + 2}, \quad (2.1)$$

$$\text{де } z(\varepsilon) = 1 - \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2.$$

Скористаємося тим випадком, що при $\varepsilon \rightarrow 0$, $z(\varepsilon) \rightarrow 0$ і значеннях $|z| < 1$ справедливий розклад [1]

$$\ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} = 2 \left(\sqrt{z} + \frac{z\sqrt{z}}{3} + \frac{z^2\sqrt{z}}{7} + \dots + \frac{z^n\sqrt{z}}{2n+1} + \dots \right). \quad (2.2)$$

Тоді вираз (2.1) після ряду перетворень з врахуванням виділеного множника z^2 у знаменнику отримаємо

$$K_{\gamma\varphi}^T(z(\varepsilon)) = \frac{2}{\frac{8}{5} + \frac{8}{35}z + \frac{8}{105}z^2 + \frac{8}{231}z^3 + \frac{8}{429}z^4 + \dots} = \frac{2}{V(z)}. \quad (2.3)$$

За аналогією з (1.16) отримаємо

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{8}{5} + \frac{8}{35}z + \frac{8}{105}z^2 + \frac{8}{231}z^3 + \frac{8}{429}z^4 + \dots, \\ V'(z) &= \frac{8}{35} + \frac{16}{105}z + \frac{8}{77}z^2 + \frac{32}{429}z^3 + \dots, \\ V''(z) &= \frac{16}{105} + \frac{16}{77}z + \frac{32}{143}z^2 + \dots, \quad V'''(z) = \frac{16}{77} + \frac{32}{143}z + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Відзначимо, що в при $\varepsilon = 0$, $z(0) = 0$. Похідні від функції $z(\varepsilon)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} z'(\varepsilon) &= \frac{4(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^3}, \quad z'(0) = 4, \quad z''(\varepsilon) = \frac{8(\varepsilon-2)}{(1+\varepsilon)^4}, \quad z''(0) = -16, \\ [z'(\varepsilon)]^2 &= \frac{16(1-\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^6}, \quad [z'(0)]^2 = 16, \quad z'''(\varepsilon) = \frac{8(-3\varepsilon+9)}{(1+\varepsilon)^5}, \quad z'''(0) = 72. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Скористаємося виразами (2.3)—(2.5) для обчислення коефіцієнтів розкладу по степеням ε коефіцієнта для концентрації напружень в точці $(0, b)$ на поверхні еліпсоїдальної порожнини згідно (1.12). Для визначення $K_{\gamma\varphi}^T(0)$ у формулі (2.3) переходимо до границі $\varepsilon \rightarrow 0$, $z(\varepsilon) \rightarrow 0$, тобто $K_{\gamma\varphi}^T(0) = \frac{10}{8} = 1,25$, а для коефіцієнтів при ступенях ε і ε^2 отримаємо згідно (1.17), замінивши при цьому змінну $u(\varepsilon)$ на перемінну $z(\varepsilon)$, тобто

$$\begin{aligned} \frac{dK_{\gamma\varphi}^T(z(\varepsilon))}{dz} \cdot \frac{dz}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= -2 \frac{v'(z)}{v^2(z)} \cdot 4 \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^3} \Big|_{\varepsilon=0} = 4 \cdot \frac{-2 \frac{8}{35}}{\left(\frac{8}{5}\right)^2} = -0,7142857; \quad (2.6) \\ \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 K_{\gamma\varphi}^T(z(\varepsilon))}{dz^2} \cdot \left(\frac{dz}{d\varepsilon}\right)^2 + \frac{dK_{\gamma\varphi}^T}{dz} \cdot \frac{d^2 z}{d\varepsilon^2} \right]_{z(0), \varepsilon=0} &= \\ = \frac{1}{2} \left\{ -2 \left[\frac{v''}{v^2} - 2 \left(\frac{v'}{v^2}\right)^2 v \right] \left(\frac{dz}{d\varepsilon}\right)^2 - 2 \frac{v'}{v^2} \frac{d^2 z}{d\varepsilon^2} \right\} \Big|_{\varepsilon=0, z(0)} &= \frac{130}{147} = 0,88435. \end{aligned}$$

В такий спосіб і для зазначеного випадку коефіцієнти розкладу при степенях ε мають вигляд

$$K_{\text{уп}}^T(z(\varepsilon)) = 1,25 - \frac{5}{7}\varepsilon + \frac{130}{147}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3), \quad (2.7)$$

який цілком збігається з виразом (1.19) і з точністю до четвертого знака збігається з коефіцієнтами розкладу для наближеного розв'язку [3], одержаного методом збурення форми границі. Це свідчить про те, що перший варіант методу збурення форми границі, що розвинутий в [2, 3] О.М. Гузем і Ю.М. Немишем приводить до наближеного розв'язку просторових задач теорії пружності для тіл з концентраторами напружень у вигляді включень або порожнин, близьких до канонічних, що збігається до точного розв'язку зберігаючи члени при вищих степенях ε в наближеному розв'язку.

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
2. *Гузь А.Н., Немши Ю.Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред: Учеб. пособие. — К.: Вища шк., 1989. — 352 с.
3. *Гузь А.Н., Немши Ю.Н.* Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1982. — 352 с.
4. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961. — 777 с.
5. *Лехницкий С.Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. — М.: Наука, 1971. — 240 с.
6. Методы расчета оболочек. Том 1. *Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др.* Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. — Киев: Наук. думка, 1980. — 634 с.
7. *Найфе А.Х.* Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984. — 535 с.
8. *Немши Ю.Н.* Об одном методе решения трехмерных задач механики деформируемых тел, ограниченных произвольными поверхностями // Докл. АН УССР, Сер. А. — 1976. — № 1. — С. 17—26.
9. *Немши Ю.Н., Чернопиский Д.И.* Упругое равновесие гофрированных тел. — К.: Наук. думка, 1983. — 188 с.
10. *Савин Г.Н., Немши Ю.Н.* Метод возмущений упругих свойств в механике твердых деформируемых тел // Докл. АН СССР. — 1974. — **216**, № 1. — С. 53—55.
11. *Дуртал И.А.* Расчет элементов конструкций из нелинейно упругих материалов. — К.: Техніка, 1976. — 176 с.
12. *Шатице Г.С.* Осесимметричные деформации эллипсоида вращения // Докл. АН СССР. — 1947. — **58**, № 7. — С. 1309—1312.