УДК 539.3

Шульга М.О., д-р фіз.-мат. наук

ПРО ДИНАМІЧНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ КОНТИНУАЛЬНО-ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

У практиці гідрологічного будівництва поряд з традиційними металічними гнучкими елементами (троси, ланцюги та ін.) широко використовуються канати із синтетичних волокон (нейлон, полістирол, поліпропілен, органічні волокна та ін.). Для таких матеріалів, особливо в умовах тривалої експлуатації, необхідно досліджувати вплив їх в'язкопружних властивостей на деформативність і несучу здатність.

Розглянемо систему $J \geq 0$ твердих тіл в рідині, які послідовно з'єднані між собою гнучкими елементами (канатами) з нульовою згинальною жорсткістю. Введемо просторову нерухому відлікову декартову прямокутну систему координат $OX_1X_2X_3$ (вісь OX_3 направлена вгору). У початковий момент часу $t = 0$ розташування довільної точки P_0 недеформованого канату визначається координатами $X_i\,(s,0)$, де s – довжина дуги OP_0 недеформованої нитки від точки відліку O. Після деформації точка P_0 переміститься в положення P_t з координатами $X_i\,(s,t)$. Довжину дуги OP_t деформованого канату позначимо через $S = S(s,t)$. Тоді радіус-вектор Точки P_t буде $\mathbf{R}_t(S,t) = \mathbf{R}_t(S(s,t),t) = \mathbf{R}(s,t)$; елементарний відрізок деформованого канату $dS = \dfrac{\partial S}{\partial s} ds$. Дотичні вектори $\boldsymbol{\tau}_S$, $\boldsymbol{\tau}_s$ до деформованої нитки визначаються похідними $\boldsymbol{\tau}_S = \dfrac{\partial \mathbf{R}_t(S,t)}{\partial S}$, $\boldsymbol{\tau}_s = \dfrac{\partial \mathbf{R}_t(s,t)}{\partial s}$, причому $\boldsymbol{\tau}_S \dfrac{\partial S(s,t)}{\partial s} = \boldsymbol{\tau}_s$, $|\boldsymbol{\tau}_S| = 1$, $\dfrac{\partial S(s,t)}{\partial s} \geq 1$. Поздовжня деформація нитки у матеріальному відліку $\varepsilon = \dfrac{\partial S(s,t)}{\partial s} - 1$.

Для виводу рівняння руху гнучкого елемента розглянемо елемент дуги нитки dS. Швидкість V і прискорення W елементу dS визначаються похідними

$$\mathbf{V}=\frac{dR_t(s,t)}{\partial t}=\frac{\partial \mathbf{R}(s,t)}{\partial t}, \quad \mathbf{W}=\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\frac{\partial^2 R(s,t)}{\partial t^2}.$$

Запишемо рівняння руху елементу dS, враховуючи силу натягу, силу власної ваги нитки, силу Архімеда, нормальну і дотичну сили опору рідини [2, 4]

$$m_t\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial S}-g\,m_t\mathbf{e}_3+g\,\rho_f\,A_t\mathbf{e}_3+\frac{1}{2}\rho_f\,C_I D_t\left|\mathbf{V}_{t\,n_S}-\mathbf{V}_{n_S}\right|\left(\mathbf{V}_{f\,n\,S}-\mathbf{V}_{n_S}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\rho_f\,C_{II}\pi D_t\left|\mathbf{V}_{f\,\tau_S}-\mathbf{V}_{\tau_S}\right|\left(V_{f\,\tau_S}-V_{\tau_S}\right)+m_f t\left(\frac{d\mathbf{V}_f}{dt}-\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right). \quad (1)$$

У рівнянні (1) m_t – погонна маса (маса на одиницю довжини) здеформованого канату, m_f – приєднана маса рідини, g – прискорення вільного падіння, ρ_f – густина рідини, $\mathbf{e}_j$ – координатні орти, C_I та C_{II} – коефіцієнти нормального та дотичного опору канату у рідині, D_t – діаметр здеформованого канату, $\mathbf{V}_f$ – поле швидкостей потоку рідини,

$$\mathbf{V}_{f\,\tau_S}=(\mathbf{V}_f\boldsymbol{\tau}_S)\boldsymbol{\tau}_S \quad \text{та} \quad \mathbf{V}_{f\,n_S}=(\mathbf{V}_f-\mathbf{V}_t\tau_S) \quad (2)$$

дотична і нормальна складові цієї швидкості, V – швидкість елемента dS канату в координатах X_i

$$\mathbf{V}_{\tau_S}=(\mathbf{V}_f\boldsymbol{\tau}_S)\boldsymbol{\tau}_S, \quad \mathbf{V}_{n_S}=\mathbf{V}-\mathbf{V}_{\tau_S} \quad (3)$$

дотична і нормальна складова цієї швидкості.

По закону збереження маси погонна маса m_t здеформованого канату зв'язана з погонною масою недеформованого канату m залежністю [2,4]

$$m_t\frac{\partial S}{\partial s}=m. \quad (4)$$

Сила натягу $\mathbf{T}=T\boldsymbol{\tau}_S$. Для полімерних матеріалів справедлива [5,6] лінійна залежність між напруженнями і деформаціями

$$\sigma(t)=E\left(\varepsilon(t)-\lambda\int_0^t \Gamma(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau\right), \quad (5)$$

причому $\Gamma(t-\tau)$ – ядро релаксації [6] і параметр λ введений для зручності аналізу.

Якщо в формулі (5) покласти $\lambda = \frac{1}{n}\left(1-\frac{H}{E}\right)$, $\Gamma(\mathrm{T}-\tau) = exp\left(-\frac{1}{n}(\mathrm{T}-\tau)\right)$, де E – миттєвий модуль пружності, H – тривалий модуль пружності, n – час релаксації, то залежніть (5) можна записати диференціальному вигляді:

$$n\dot{\sigma} + \sigma = En\dot{\varepsilon} + H\varepsilon,$$

тобто у формі стандартного лінійного тіла [6].

Якщо напруження у формулі (5) віднесено до поперечної площі недеформованого зразка, то сила натягу $T = A_0\sigma(t)$.

Тепер рівняння (1) можна привести до вигляду

$$(m+m_f)\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial t^2} = -g\left(m-\rho_f A\frac{\partial S}{\partial s}\right)\mathbf{e}_3 + \frac{1}{2}\rho_f C_I D_t \frac{\partial S}{\partial s}$$
$$\left|\mathbf{V}_{f n_s} - \mathbf{V}_{n_s}\right|\left(\mathbf{V}_{f n_s} - \mathbf{V}_{n_s}\right) + \frac{1}{2}\rho_f C_{II}\pi D_t \frac{\partial S}{\partial s}\left|\mathbf{V}_{f\tau_s} - \mathbf{V}_{\tau_s}\right|\cdot$$
$$\cdot\left(\mathbf{V}_{f\tau_s} - \mathbf{V}_{\tau_s}\right) + m_f \frac{\partial S}{\partial s}\frac{d\mathbf{V}_f}{dt} + \frac{\partial T}{\partial s}\frac{\boldsymbol{\tau}}{1+\varepsilon}. \qquad (6)$$

Тут сила натягу $T = A_t\sigma(t)$, а напруження $\sigma(t)$ виражається через деформацію залежністю (5).

Рівняння руху справедливі для власне гнучкого елементу. В місцях знаходження твердих тіл, які вважатимемо матеріальними точками масою M_j $(j = 1,\dots,J)$ з координатами $X_{i,j}\mathbf{e}_i = \mathbf{R}_{t,j}$, повинні виконуватися умови неперервності

$$X_j^+ = X_j^-,\ \left(M_j + M_{fj}\right)\frac{dV_j}{dt} = \mathbf{T}^+(x_j) - \mathbf{T}^-(x_j) -$$
$$-g\left(M_j - \rho_f \Omega_j\right)\mathbf{e}_3 + \frac{1}{2}\rho_f C_j A_j\left|V_{fj} - V_j\right|\left(V_{fj} - V_j\right), \qquad (7)$$

де M_{fj} – приєднана маса рідини для j –го тіла, Ω_j – об'єм j –го тіла, C_j – коефіцієнт опору j –го тіла в рідині, A_j – поверхня тіла, на яку діють сили гідропружнього опору. Умови (7) повинні записуватися для кожного тіла. Для кінців канату повинні бути записані граничні умови, які носять кінематичний характер (задають положення кінцевої точки) або динамічний характер (задається зовнішня сила, прикладена до кінцевої точки). Якщо на кінці канату знаходиться тверде тіло $j = J$, що рухається, то буде справедлива умова (7) при $j = J$ і заданій силі $\mathbf{T}^{+}(x_j)$. Початкові умови повинні бути сформовані для початкових координат і початкових швидкостей континуально–дискретної системи.

Нелінійну початково крайову задачу в інтегро–диференціальній формі, що сформульована у цій статті, можливо розв'язати лише наближеними, переважно чисельними, методами.

Інший підхід до цих задач, що ґрунтується на побудові дискретної моделі гнучких елементів з подальшим застосуванням лагранжевого формалізму, розвивається у роботах [1,3,7 та інш.]

1. *Безверхий А.Н.* Динамика протяженных гидрофизических систем с упругими связями. – Автореферат канд.физ.-мат. наук –К.: Інститут механіки АН України, 1992. –14с.
2. *Берто Г.О.* Океанографические буи. – Ленінград: Судостроение, 1979. –216с.
3. *Корнієнко В.Ф.* Нелінійні коливання гнучких в'язкопружних елементів конструкцій при взаємодії з зовнішнім середовищем. – Автореферат десерт. Канд. техн. Наук, –К. КНУБА, 2002. –19с.
4. *Ньюмен Дж.* Морская гидромеханика. – Ленинград: Судостроение, 1985. –368с.
5. *Работнов Ю.Н.* Элементы нелинейной механики твердых тел. – Москва: Наука. 1977. –384с.
6. *Савін Г.М., Рущицький А.Й.* Елементи механіки спадкових середовищ. –К.: Вища школа, 1976. –252с.
7. *Шульга М.О., Безверхий О.М.* До розрахунку динамічних задач для дискретно-континуальних гнучких одномірних систем з потенціальними деформативними характеристиками // Доп. НАН України. –2004, №8. –с.59–63.

Робота виконується за підтримки Фонду фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України (проект № 01.07/00076).

Матеріал надійшов до редакції 28.05.04.