УДК 539.375

Дохняк Б.М., канд. техн. наук

РОЗРАХУНОК КОНСТРУКЦІЙ ІЗ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Вступ. Конструкції із композиційних матеріалів знайшли широке застосування у різних галузях сучасної техніки. Це викликано прагненням отримати меншу матеріаломісткість виробів при необхідній міцності і жорсткості, а також можливістю варіювання властивостями композиційного матеріалу за рахунок зміни структури його армування.

Композиційний матеріал представляє собою шарувату структуру, в якій траєкторії армування лежать в площині шарів, зв'язок між якими здійснюється через прошарки в’яжучих матеріалів [1,9].

Властивості композиційних матеріалів обумовлюються не тільки властивостями арматури, але і більшою мірою від її укладанням. Варіюючи кут укладання арматури в шарі, можна отримати заданий ступінь анізотропії властивостей, а змінюючи порядок укладання шарів і кут укладання їх по товщині, можна ефективно варіювати жорсткістю композиційного матеріалу.

Питання теорії багатошарових пластин і оболонок розглядалися в працях А.Н. Гузя [1,10],С.А. Амбарцумяна [2], П.М. Огибалова і М.А. Колтунова [3], А.Г. Терегулова [4], В.Л. Бідермана [5], В.І. Корольова [6], А.К. Малмейстера, В.П. Тамужа і Г.А. Тетерса [7], Е.І. Григолюка [8] і ін.

Вихідні співвідношення механіки композиційних матеріалів.

Опис напружено-деформованого стану композиційних елементів здійснюється за допомогою співвідношень, що враховують специфічні особливості армованих матеріалів.

Одношаровий композиційний матеріал можна розглядати як ортотропне середовище (рис. 1). Для моделі (циліндричний – волокно в коаксіальній оболонці – матриці), яка враховує відмін-

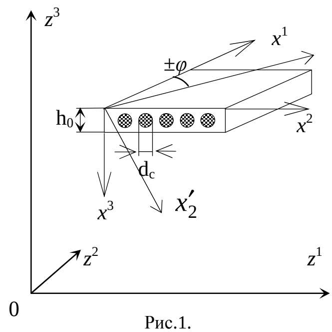

Рис.1.

ності в коефіцієнтах Пуассона матриці і волокон, модуль пружності E_1 в напрямі армуючого волокна в системі армування $Ox_1'x_2'x_3'$ визначається по формулі:

$$E_1 = E_C\Psi_C + E_R(1-\Psi_C) + \frac{2(\nu_C-\nu_R)^2 E_C E_R \Psi_C(1-\nu_C)}{E_R(1-\nu_R)L_C + [L_R(1-\Psi_C)+(1-\nu_R)]E_C}, \quad (1)$$

де E_C - модуль пружності матеріалу волокна; E_R - модуль пружності матеріалу матриці; Ψ_C - коефіцієнт армування, що характеризує відносний об'ємний вміст волокон, $L_R = 1-\nu_R - 2\nu_R^2$; $L_C = 1-\nu_C - 2\nu_C^2$ [4]:

$$\Psi_C = \frac{\pi d_C^2}{4h_0} i_C \quad , \quad (2)$$

де d_C – діаметр волокон; h_0 – товщина армованого шару; i_C – частота армування.

Поперечні модулі пружності E_2 і E_3 визначаються співвідношенням [9]:

$$E_2 = E_3 = \frac{E_C E_R}{E_R\Psi_C + E_C(1-\Psi_C)} . \quad (3)$$

При збігу осі 1 з напрямом укладання волокон G_{12} і G_{13} характеризують пружні матеріалу в площинах 1-2 і 1-3 паралельних волокнам. Правило адитивності для композиційного матеріалу з суцільними волокнами наступне [9]:

$$G_{12} = G_{13} = \frac{G_C G_R}{G_C(1-\Psi_C) + G_R\Psi_C}, \quad (4)$$

де G_C і G_R – модулі зсуву, відповідно матеріалів волокон і матриці.

Модуль зсуву G_{23}, що характеризує зв'язок між дотичними напруженнями і деформацією зсуву в площині 2-3, перпендикулярній осі волокон визначається по формулі [9]:

$$G_{23} = G_R \frac{(K_R+\Psi_C)G_C + (1-\Psi_C)G_R}{K_R\Psi_R G_C + (1+K_R\Psi_C)G_R}, \quad (5)$$

де $K_R = 3 - 4\nu_R$; ν_R – коефіцієнт Пуассона для матеріалу матриці.

Коефіцієнт Пуассона для однонаправленого композиційного матеріалу визначається по формулі [9]:

$$\nu_{12} = \nu_C \Psi_C + \nu_R (1 - \Psi_C) . \tag{6}$$

Тіло, що має три ортогональні площини пружної симетрії, називається ортотропним. Воно характеризується дев'ятьма пружними характеристиками, оскільки [1]:

$$E_i \nu_{ji} = E_j \nu_{ij} . \tag{7}$$

Запишемо закон Гука для ортотропного шару [13]:

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} = A_{11}\varepsilon_{11} + A_{12}\varepsilon_{22} + A_{13}\varepsilon_{33}; \\ &\sigma_{22} = A_{21}\varepsilon_{11} + A_{22}\varepsilon_{22} + A_{23}\varepsilon_{33}; \\ &\sigma_{33} = A_{31}\varepsilon_{11} + A_{32}\varepsilon_{22} + A_{33}\varepsilon_{33}; \\ &\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2G_{12}\varepsilon_{12};\ \sigma_{13} = \sigma_{31} = 2G_{13}\varepsilon_{13};\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = 2G_{23}\varepsilon_{23}. \end{aligned} \tag{8}$$

Параметри A_{ij} знаходяться із розв’язку системи

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \nu_{12}\frac{\sigma_{22}}{E_2} - \nu_{13}\frac{\sigma_{33}}{E_3};\ \varepsilon_{22} = -\nu_{21}\frac{\sigma_{11}}{E_1} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \nu_{23}\frac{\sigma_{33}}{E_3}; \\ &\varepsilon_{33} = -\nu_{31}\frac{\sigma_{11}}{E_1} - \nu_{32}\frac{\sigma_{22}}{E_2} + \frac{\sigma_{33}}{E_3};\ \varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G_{ij}} \quad (i,\, j = \overline{1,3},\ i \neq j), \end{aligned} \tag{9}$$

і дорівнюють:

$$\begin{aligned} &A_{11} = E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})/\Delta; && A_{12} = A_{21} = E_2(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})/\Delta; \\ &A_{13} = A_{31} = E_3(\nu_{31} + \nu_{32}\nu_{21})/\Delta; && A_{22} = E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31})/\Delta; \\ &A_{23} = A_{32} = E_3(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})/\Delta; && A_{33} = E_3(1 - \nu_{21}\nu_{12})/\Delta, \end{aligned}$$

де $\Delta = (1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{13}\nu_{32}\nu_{21})$.

Одношаровий матеріал в загальному випадку не є ортотропним, так як його деформація залежить від напрямку навантаження. Деформація зсуву викликає нормальні напруження, а продольні здовження – дотичні напруження. На практиці частіше застосовується симетрична схема укладки шарів з перехресним армуванням під кутами $\pm\varphi$.

При повороті системи координат на кут φ пружні параметри перетворюються по формулах [13]:

$$B_{11} = A_{11}\cos^4\varphi + 2(A_{12} + 2G_{12})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + G_{23}\sin^4\varphi;$$

$$B_{22} = A_{11}\sin^4\varphi + 2(A_{12} + 2G_{12})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + G_{23}\cos^4\varphi;$$
$$B_{12} = (A_{11} + A_{22} - 2A_{12} - 4G_{12})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + A_{12};\ B_{33} = A_{33};$$
$$B_{13} = A_{13}\cos^2\varphi + A_{23}\sin^2\varphi;\ B_{23} = A_{13}\sin^2\varphi + A_{23}\cos^2\varphi;$$
$$B_{66} = (A_{11} + A_{22} - 2(A_{12} + G_{12})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + G_{12}; \tag{10}$$
$$B_{44} = G_{23}\cos^2\varphi + G_{13}\sin^2\varphi;\ B_{55} = G_{23}\sin^2\varphi + G_{13}\cos^2\varphi;$$
$$B_{16} = 0.5(A_{22}\sin^2\varphi - A_{11}\cos^2\varphi + (A_{12} + 2G_{12})\cos 2\varphi)\sin 2\varphi;$$
$$B_{26} = 0.5(A_{22}\cos^2\varphi - A_{11}\sin^2\varphi + (A_{12} + 2G_{12})\cos 2\varphi)\sin 2\varphi;$$
$$B_{36} = 0.5(A_{23} - A_{13})\sin 2\varphi;\ B_{45} = 0.5(G_{23} - G_{13})\sin 2\varphi.$$

Закон Гука тепер буде мати вигляд:

$$\sigma_{11} = B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22} + B_{13}\varepsilon_{33} + 2B_{16}\varepsilon_{12};$$
$$\sigma_{22} = B_{21}\varepsilon_{11} + B_{22}\varepsilon_{22} + B_{23}\varepsilon_{33} + 2B_{26}\varepsilon_{12};$$
$$\sigma_{33} = B_{31}\varepsilon_{11} + B_{32}\varepsilon_{22} + B_{33}\varepsilon_{33} + 2B_{36}\varepsilon_{12}; \tag{11}$$
$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = B_{61}\varepsilon_{11} + B_{62}\varepsilon_{22} + B_{63}\varepsilon_{33} + 2B_{66}\varepsilon_{12};$$
$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = 2B_{45}\varepsilon_{23} + 2G_{13}\varepsilon_{13};\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = 2G_{23}\varepsilon_{23} + 2B_{55}\varepsilon_{13}.$$

Якщо кожен з симетричних шарів є анізотропним в системі координат x^1, x^2, то спільна робота двох шарів утворює ортотропний матеріал, для якого закон Гука спрощується до виду (8). Обчисливши напруження по формулам (10) для кутів армування $\pm\varphi$ і осереднюючи по шарам:

$$\sigma_{11} = 0.5(\sigma_{11}^{+} + \sigma_{11}^{-});\ \sigma_{22} = 0.5(\sigma_{22}^{+} + \sigma_{22}^{-});\ \sigma_{12} = 0.2(\sigma_{12}^{+} + \sigma_{12}^{-});$$

знайдемо нові пружні параметри ортотропного матеріалу $\overline{E}_i, \overline{\nu}_{ij}$ [5]:

$$\overline{E}_1 = \frac{\Delta^*}{B_{22}B_{33} - B_{23}^2};\ \overline{E}_2 = \frac{\Delta^*}{B_{11}B_{33} - B_{13}^2};\ \overline{E}_3 = \frac{\Delta^*}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2};$$
$$\overline{\nu}_{12} = \frac{B_{12}B_{33} - B_{13}B_{23}}{B_{11}B_{33} - B_{13}^2};\ \overline{\nu}_{13} = \frac{B_{13}B_{22} - B_{12}B_{23}}{B_{22}B_{33} - B_{23}^2};\ \overline{\nu}_{23} = \frac{B_{11}B_{23} - B_{12}B_{13}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2};$$

де $\Delta^* = \det\mathbf{B}$.

Особливість напружено–деформованого стану композиційного матеріалу можна врахувати тензором пружних постійних C^{ijkl}. Закон Гука для анізотропного тіла в тензорній формі, який пов'язує компоненти тензора напружень σ^{ij} і деформацій ε_{ij} має вигляд:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}\varepsilon_{kl} . \tag{12}$$

Компоненти тензора пружних постійних обчислюються по формулах :

$$\begin{aligned}
&C^{1111} = \frac{\overline{E}_1}{\Delta_*}(1-\overline{\nu}_{23}\overline{\nu}_{32}); && C^{1122} = \frac{\overline{E}_2}{\Delta_*}(\overline{\nu}_{21}+\overline{\nu}_{31}\overline{\nu}_{23});\\
&C^{1133} = \frac{\overline{E}_3}{\Delta_*}(\overline{\nu}_{31}+\overline{\nu}_{21}\overline{\nu}_{32}); && C^{2211} = \frac{\overline{E}_1}{\Delta_*}(\overline{\nu}_{12}+\overline{\nu}_{13}\overline{\nu}_{32});\\
&C^{2222} = \frac{\overline{E}_2}{\Delta_*}(1-\overline{\nu}_{13}\overline{\nu}_{31}); && C^{2233} = \frac{\overline{E}_3}{\Delta_*}(\overline{\nu}_{32}+\overline{\nu}_{12}\overline{\nu}_{31});\\
&C^{3311} = \frac{\overline{E}_1}{\Delta_*}(\overline{\nu}_{13}+\overline{\nu}_{12}\overline{\nu}_{23}); && C^{3322} = \frac{\overline{E}_2}{\Delta_*}(\overline{\nu}_{23}+\overline{\nu}_{13}\overline{\nu}_{21});\\
&C^{3333} = \frac{\overline{E}_3}{\Delta_*}(1-\overline{\nu}_{21}\overline{\nu}_{12}); && C^{1212} = \frac{G_{12}}{2}; C^{1313} = \frac{G_{13}}{2}; C^{2323} = \frac{G_{23}}{2},
\end{aligned} \tag{13}$$

де $\Delta_* = (1-\overline{\nu}_{12}\overline{\nu}_{21}-\overline{\nu}_{13}\nu_{31}-\overline{\nu}_{23}\overline{\nu}_{32}-\overline{\nu}_{12}\overline{\nu}_{23}\overline{\nu}_{31}-\overline{\nu}_{13}\overline{\nu}_{32}\overline{\nu}_{21})$.

Для ортотропного матеріалу матриця пружних постійних має наступний :

$$C^{ijkl} = \begin{bmatrix}
C^{1111} & 0 & 0 & 0 & C^{1122} & 0 & 0 & 0 & C^{1133}\\
0 & C^{1212} & 0 & C^{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & C^{1313} & 0 & 0 & 0 & C^{1331} & 0 & 0\\
0 & C^{2112} & 0 & C^{2121} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
C^{2211} & 0 & 0 & 0 & C^{2222} & 0 & 0 & 0 & C^{2233}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^{2323} & 0 & C^{2332} & 0\\
0 & 0 & C^{3113} & 0 & 0 & 0 & C^{3131} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^{3223} & 0 & C^{3232} & 0\\
C^{3311} & 0 & 0 & 0 & C^{3322} & 0 & 0 & 0 & C^{3333}
\end{bmatrix}. \tag{14}$$

Компоненти тензора пружних постійних задаються в місцевій ортогональній системі координат. Для переходу в базисну декартову систему координат перетворення тензора четвертого рангу здійснюється по формулі [9]:

$$C^{ijkl} = C_*^{mnpq} a_m^i a_n^j a_p^k a_q^l , \tag{15}$$

де a_m^i - тензор повороту системи координат, який пов'язаний з тензором перетворення координат $b_m^i = \dfrac{\partial z^i}{\partial x_m}$ наступним співвідношенням

$$a_m^i = \frac{b_m^i}{\sqrt{g_{mm}}};$$

g_{ij} – компоненти метричного тензора.

Матриця жорсткості композиційного скінченого елемента будується на основі стандартних процедур з використанням моментної схеми [12]. Вище викладена методика скінченно-елементного дослідження напружено-деформованого стану просторових конструкцій композиційних матеріалів реалізована у вигляді пакету прикладних програм «МІРЕЛА+» для PC IBM [11].

Задача 1. Задача Ляме для порожнистого циліндра із ортотропного матеріалу під дією внутрішнього тиску [13].

Геометричні розміри оболонки: внутрішній радіус $R_1 = 0.1$*м*; зовнішній – $R_2 = 0.15$*м*. Інтенсивність внутрішнього тиску $q = 0.2$ МПа. Фізичні постійні для волокон і матриці композиційного матеріалу: $E_C = 12800$ МПа; $\nu_C = 0.3$; $E_R = 2.1$ МПа; $\nu_R = 0.49$. Частота армування композиту Ψ_C=0.5, кут армування шару $\varphi = \pm 15^\circ$. Пружні параметри ортотропного матеріалу для відповідних характеристик: радіальний модуль $E_1 = 2304$ МПа; тангенціальний – $E_2 = 5859{,}5$ МПа; $\nu_{21} = 0.28$.

В полярній системі координат для плоскої задачі теорії пружності, рівняння рівноваги має вигляд:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\Theta}{r} = 0 . \tag{16}$$

Закон Гука для вісесиметричної задачі ортотропного матеріалу запишеться у вигляді:

$$\sigma_r = \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left(E_1\varepsilon_r + E_2\nu_{12}\varepsilon_\Theta\right); \tag{17}$$

$$\sigma_\Theta = \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left(E_1\nu_{21}\varepsilon_r + E_2\varepsilon_\Theta\right). \tag{18}$$

Використовуючи співвідношення Коші між деформаціями і радіальним переміщенням u і підставляючи напруження в рівняння рівноваги (16) отримуємо диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{E_2}{E_1}\frac{u}{r^2}=0\,. \tag{19}$$

Розв'язком цього рівняння є функція:

$$u=Ar^{\sqrt{E_2/E_1}}+\frac{B}{r^{\sqrt{E_2/E_1}}}\,. \tag{20}$$

По переміщеннях згідно з (17) і (18) знаходимо напруження:

$$\sigma_r=\frac{\sqrt{E_2}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left(Ar^{\sqrt{E_2/E_1}-1}\left(\sqrt{E_2}\nu_{12}+\sqrt{E_1}\right)+\frac{B}{r^{\sqrt{E_2/E_1}+1}}\left(\sqrt{E_2}\nu_{12}-\sqrt{E_1}\right)\right); \tag{21}$$

$$\sigma_\Theta=\frac{\sqrt{E_2}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left(Ar^{\sqrt{E_2/E_1}-1}\left(\sqrt{E_1}\nu_{21}+\sqrt{E_2}\right)+\frac{B}{r^{\sqrt{E_2/E_1}+1}}\left(\sqrt{E_2}-\sqrt{E_1}\nu_{21}\right)\right). \tag{22}$$

Постійні A і B визначаються граничних умов: при $r=R_1$, $\sigma_r=-q$, при $r=R_2$, $\sigma_r=0$.

Розв'язавши систему, знаходимо:

$$A=\frac{qR_1^{\sqrt{E_2/E_1}+1}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{(\sqrt{E_1E_2}+E_2\nu_{12})(R_2^{2\sqrt{E_2/E_1}}-R_1^{2\sqrt{E_2/E_1}})}, \tag{23}$$

$$B=\frac{qR_1^{\sqrt{E_2/E_1}+1}R_2^{2\sqrt{E_2/E_1}}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{(\sqrt{E_1E_2}-E_2\nu_{12})(R_2^{2\sqrt{E_2/E_1}}-R_1^{2\sqrt{E_2/E_1}})}. \tag{24}$$

Аналітичний розв'язок задачі по переміщеннях складає: $u_1=0.10515\cdot10^{-4}$ м, $u_2=0.07859\cdot10^{-4}$ м, чисельний розв'язок по МСЕ $u_1=0.1036\cdot10^{-4}$ м, $u_2=0.0758\cdot10^{-4}$ м. Похибка складає 1.42 –3.56 %.

На рис. 2–3 приведені графіки розподілу радіальних σ_r і тангенціальних σ_Θ напружень по товщині циліндра. На рис. 4 наведено залежність деформації циліндра від кута армування φ. Похибка по напруженням також на перевищує 5%.

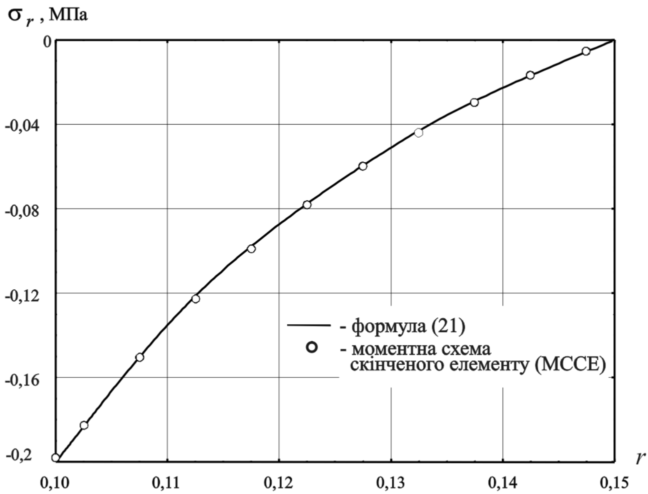

Рис. 2. Розподіл радіальних напружень σ_r по товщині циліндра

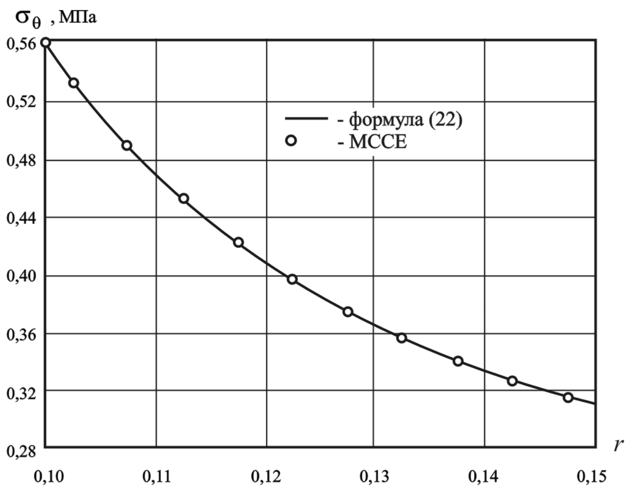

Рис. 3. Розподіл тангенціальних напружень σ_θ по товщині циліндра

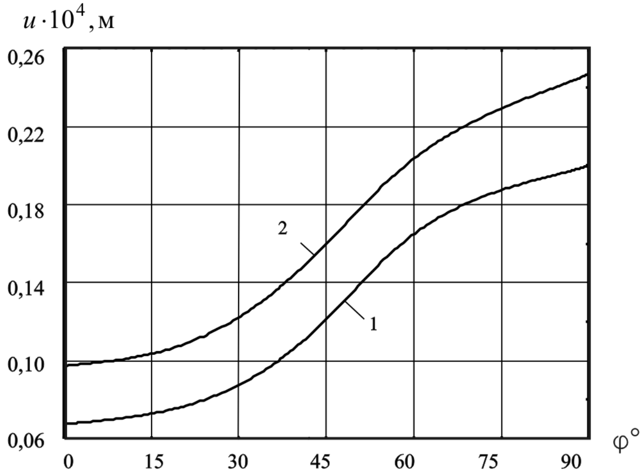

Рис.4. Залежність переміщень на внутрішній – 1, та зовнішній поверхні циліндра – 2 від кута армування

Задача 2. Напружено–деформований стан оболонки тора під дією внутрішнього тиску.

Тороідальна оболонка виконана з восьми перехресний армованих шарів. Шари оболонки мають однотипну будову з кутами перехресного армування $\varphi = \pm 52^\circ$. Геометричні розміри: радіус по меридіану $R = 40$ см, радіус по тору $r = 10$ см, товщина – $h = 0.96$ см, кут розвороту $\alpha = 120^\circ$. Каркасним матеріалом армованого шару, завтовшки 0.12 см, є текстильний корд з модулем пружності $E_C = 1600$МПа і коефіцієнтом Пуассона $\nu_C = 0.4$. Матеріал матриці – гума з $E_R = 3.6$ МПа та $\nu_R = 0.49$. Діаметр нитки корду $d_C = 0.07$мм; частота армування $i_C = 9.9$ниток/см. Внутрішній тиск $p = 0.2$МПа.

На рис. 5 приведені графіки розподілу радіальних σ_{22} напружень, які по товщині оболонки змінюється лінійно. На рис. 6 наведені графіки розподілу дотичних σ_{12} напружень в залежності від кута розвороту α.

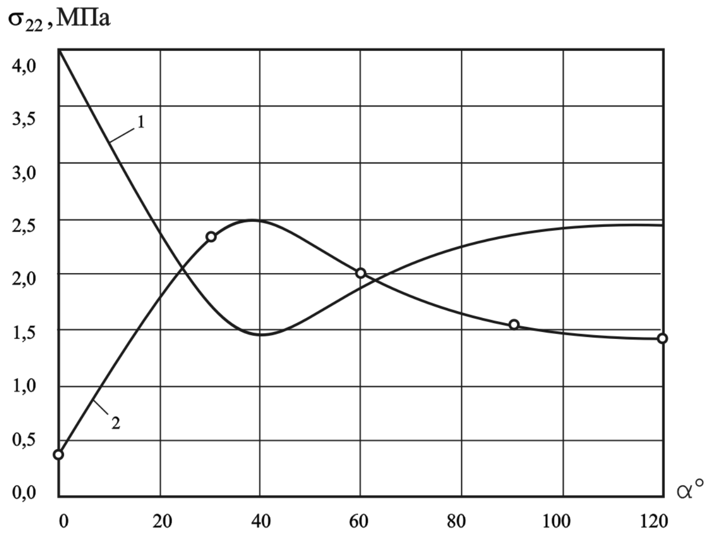

Рис. 5. Розподіл напружень σ_{22} на внутрішній (1) та зовнішній (2) поверхнях тора

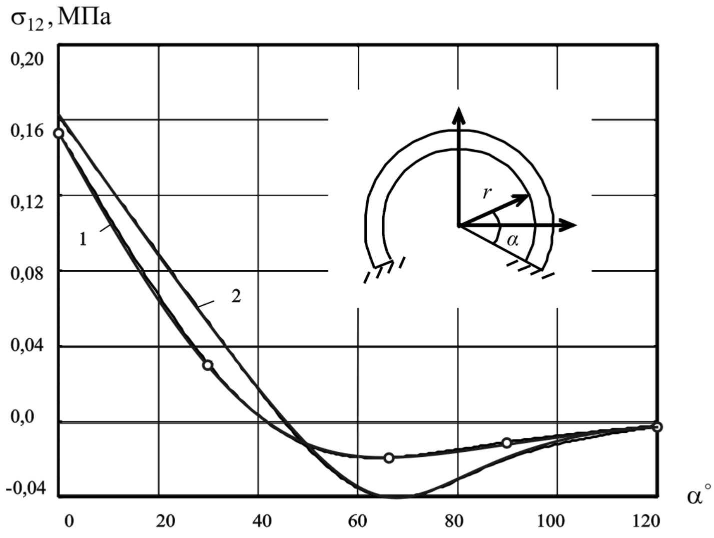

Рис. 6. Розподіл напружень σ_{12} на внутрішній (1) та центральній $h/2$ (2) поверхнях тора

Висновок. Як показує аналіз, результати дослідження напружено-деформованого стану композиційних матеріалів методом скінченних елементів добре узгоджуються з аналітичним . Використання МСЕ дозволяє досліджувати більш геометрично складні конструкції.

1. Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3-х т. Т.1. Механика материалов/Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А. и др. – Киев: Наук. думка, 1982. – 368 с.
2. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. – 448с.
3. *Огибалов П.М., Колтунов М.А.* Оболочки и пластины. М.: Изд-во МГУ. 1969. – 695с.
4. *Терегулов А.Г.* К теории многослойных анизотропных оболочек. – В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд. КГУ. 1970., вып. 6-7. С. 762-767.
5. *Бидерман В.Л.* Пластинки и оболочки из стеклопластиков. В кн.: Прочность, устойчивость, колебания. М.: Машиностроение, 1968. Т. 2. С. 211-242.
6. *Королев В.И.* Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М., Машиностроение, 1965. 272с.
7. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 498с.
8. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
9. Композиционные материалы. Справочник//Под ред. Карпиноса, Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
10. *Гузь А.Н.* Основы трехмерной устойчивости деформируемых тел. – К.: Вища шк. Головное изд–во, 1986.–511 с.
11. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МІРЕЛА+». – / Киричевский В.В., Дохняк Б.М., Козуб Ю.Г. и др. – К.: Наукова думка, 2005. – 403 с.
12. Метод конечных элементов в механике твердых тел. / Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В. и др. // Под ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – К.: Вища школа, 1982. – 480 с.
13. *Дохняк Б.М., Киричевский В.В., Карпушин А.Д.* Метод конечных элементов в исследовании оболочечных конструкций из композиционных материалов. - Труды девятого симпозиума "Проблемы шин и резинокордных композитов. Надежность, стабильность-качество". Изд-во НИИ шинной промышленности. Москва.-1998. - С. 133-140.