

КАУСТИКА И КВАЗИФОКАЛЬНАЯ ЛИНИЯ КОНГРУЭНЦИИ ОТРАЖЁННЫХ ЛУЧЕЙ

*Национальная Академия Природоохранного и Курортного
Строительства, Украина.*

Abstract. Curves of caustics by reflection for 2D and surfaces of caustics by reflection for 3D are considered. It is proved that the surface of caustics of the reflected ray congruence is not the zone of maximum concentration. Such zone is quasifocal line. For 3D the curve of caustic can be considered as the zone of concentration of reflected rays, so called burning curve.

Анотація. У статті розглянута крива каустики для 2D задачі і поверхня каустики для 3D задачі. Доведено, що поверхня каустики конгруенції відбитого проміння не є зоною концентрації. Такою зоною є квазіфокальна лінія. Для 2D задачі криву каустику можна вважати зоною концентрації відбитого проміння, тобто «пекучої кривої».

Постановка проблеми. Отражения играют центральную роль во многих приложениях: при преобразовании солнечной энергии в другие виды энергии, освещении естественным и искусственным светом, в архитектуре.

Для практики особое значение заключается в определении параметров зоны наибольшей концентрации конгруэнции отражённых лучей. Бытует мнение, что такой зоной является каустика: плоская и пространственная. Однако есть основание считать, что зоной наибольшей концентрации конгруэнции отражённых лучей является квазифокальная линия [6,7,8].

Анализ исследований и публикаций. Двухмерная каустика как огибающая отражённых лучей (2D задача) принадлежит плоскости, если нормали кривой сечения совпадают с нормальными поверхностями вдоль этого сечения. В остальных случаях одним из путей решения трёхмерной задачи (3D) отражения предлагается рассматривать поверхность нормалей вдоль плоского сечения отражающей поверхности и поверхность отражённых лучей вдоль этого же сечения [4,5].

Огибающая нормалей кривой известна как эволюта и может быть представлена как множество центров кривизны. Фокусирование происходит на эволюте кривой W . Из-за этой оптической связи, эволюта известна как множество фокусов кривой W или в действительности каустика отражения. Ортоцентрика была применена в изучении каустик Квителетом в 1826 году. Каустики появились в 1682 у Ширнхауза. Детальное изучение специальных случаев было проделано Кели в 1856

году. В работах Брюса, Джиблинга, Гибсона [1,2] рассмотрены каустики и ортотомики эллипса при точечном источнике, расположенном не в фокусе. На рисунке 1 изображено отражение от эллипса с источником, расположенном внутри эллипса, на рисунке отражение с источником, расположенном за пределами эллипса. В последнем случае каустика имеет две точки возврата, ортотомика имеет одну точку самопересечения.

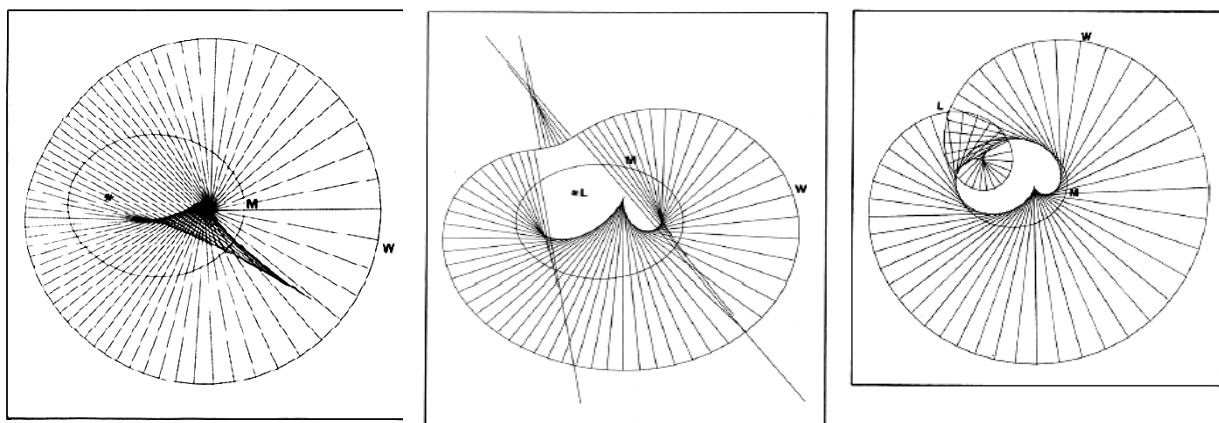


Рис.1. Каустики эллипса при различных положениях источника L

На рисунке 2 изображена компьютерная визуализация каустики при отражении от трёхосного эллипсоида (сделано Давидом Фидалом). Каустикой является огибающая проекции поверхности отражённых лучей для сечения трёхосного эллипсоида.

Так например 2D каустика окружности с источником в несобственной точке есть эпициклоида (рис. 3). Её уравнение

$$\begin{aligned} x &= \frac{3a}{4} \cos \alpha - \frac{a}{4} \cos 3\alpha \\ y &= \frac{3a}{4} \sin \alpha - \frac{a}{4} \sin 3\alpha, \end{aligned} \quad (1)$$

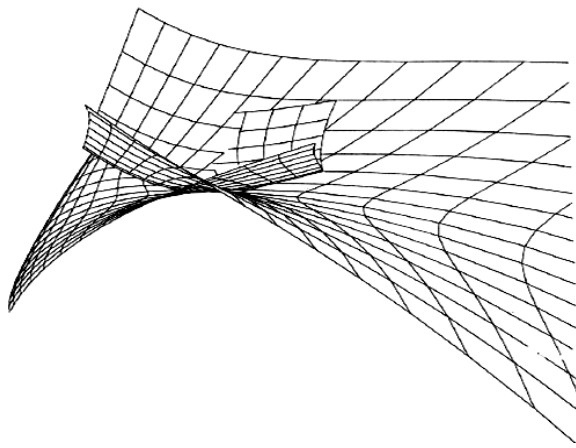
a – радиус отражающей окружности,

α – угол, определяющий точку на отражающей окружности.

Она же есть «жгучая кривая».

В работе [3] проф. Глеезера рассмотрены каустики окружности для различного положения источника для плоской задачи – плоские кривые и для пространственной задачи - поверхности (рис. 3). Для плоской задачи справедливо утверждение, что каустика есть «жгучая кривая»

В случае пространственной задачи все лучи конгруэнции отражённых лучей касаются поверхности, которая есть каустика при отражении или фокальная поверхность.



Каустика для отражающей сферы с источником в несобственной точке есть поверхность вращения эпициклоиды. В связи с этим возникает вопрос: - «Что есть «жгучая зона» для конгруэнции отражённых лучей: поверхность каустики или квазифокальная линия?».

Рис. 2. Каустика при отражении от трёхосного эллипсоида

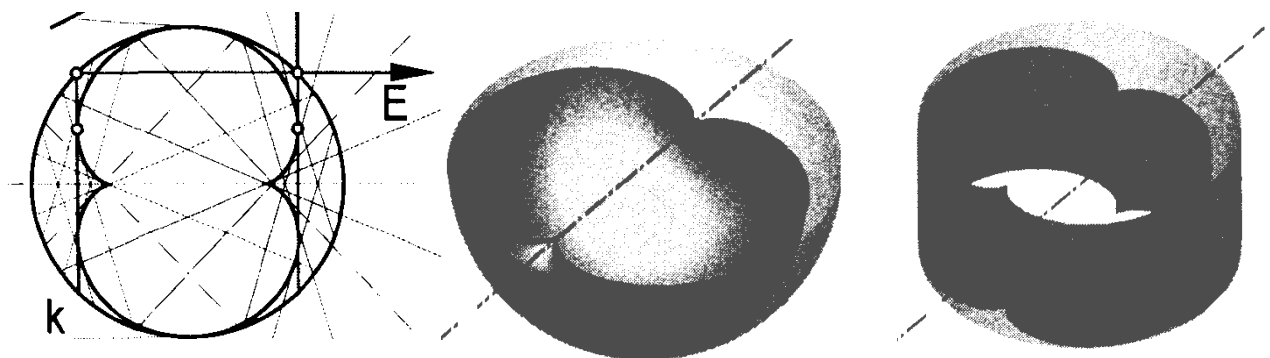


Рис.3. Каустики при отражении от окружности, сферы и цилиндра

Формулировка целей и задач статьи. В 2D задаче отражения существует понятие «жгучей кривой» - каустики при отражении. Для 3D задачи каустика при отражении есть поверхность. Целью статьи является доказательство того факта, что поверхность каустики не есть зона наибольшей концентрации отражённых лучей. На самом деле зоной концентрации является квазифокальная линия для 3D задачи.

Основная часть. Говорить о максимальной концентрации лучей конгруэнции на поверхности – каустики не корректно. Линией максимальной концентрации для конгруэнции отражённых лучей является квазифокальная линия. Примером может служить отражающая сфера. Зоной концентрации лучей конгруэнции отражённых от сферы лучей есть квазифокальная прямая [], проходящая через центр сферы (рис.).

Ось приёмника солнечной установки проходит через центр сферы и во всех положениях направлена на солнце. Эта ось совпадает с квазифокальной линией (прямая для сферы) конгруэнции отражённых лучей.

Изучены квазифокальные линии для ряда поверхностей вращения и каналовых поверхностей. Однако мало изучены поверхности каустики для этих отражающих поверхностей.

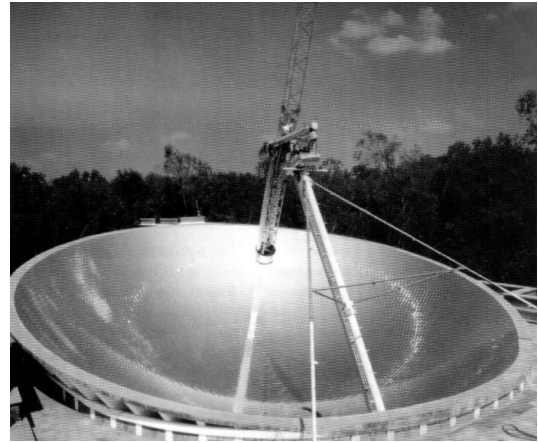
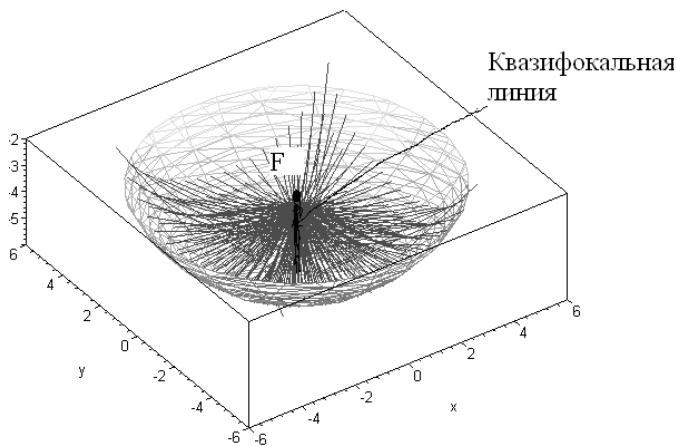


Рис.4. Квазифокальная прямая линия есть линия концентрации лучей для отражающей сферы.

Зоной концентрации конгруэнции отражённых лучей для прямого кругового конуса является квазифокальная прямая линия, проходящая через вершину конуса [7].

$$\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi} + \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi} - \frac{z^2}{1} = 0 \quad \text{- уравнение конуса вращения.} \quad (2)$$

Уравнение квазифокальной прямой для отражающего конуса, проходящей через начало координат имеет вид:

$$x = \frac{x_F}{z_F} \cdot z \quad (3)$$

Угол наклона λ фокальной линии \mathbf{f} ,

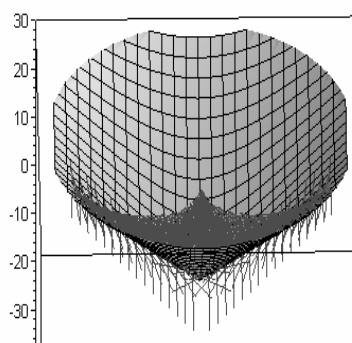
$$\text{где} \quad \lambda = \operatorname{arctg} \lambda, \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{x_F}{z_F} \quad (4)$$

На рисунке 5 изображена поверхность отражённых лучей. Лучи этой поверхности отражаются от окружности, которая является сечением отражающего конуса. Если все точки отражающей окружности \mathbf{k} , падающие лучи и нормали к отражающему конусу вдоль окружности \mathbf{k} совместить с фронтальной плоскостью σ , вращая вокруг двойной прямой \mathbf{m} поверхности отражённых лучей, то все точки окружности \mathbf{k} совместятся с другой окружностью χ . От окружности χ лучи отразятся и коснутся каустики окружности χ . Для конгруэнции отражённых от конуса лучей фокальной поверхностью является конус своей вершиной совпадающий с вершиной отражающего конуса с соответствующей направляющей ω (рис. 6).

Если отражённые лучи вернуть в исходное положение обратным вращением, то точки касания каустики образуют пространственную



кривую ω , которая лежит на поверхности каустики для отражающего конуса Фокальную поверхность конгруэнции отражённых лучей или поверхность каустики для отражающего конуса зададим направляющей ω и вершиной, совпадающей с вершиной отражающего конуса. Направляющая ω



есть пространственная кривая поверхности отражённых лучей (рис. 6).

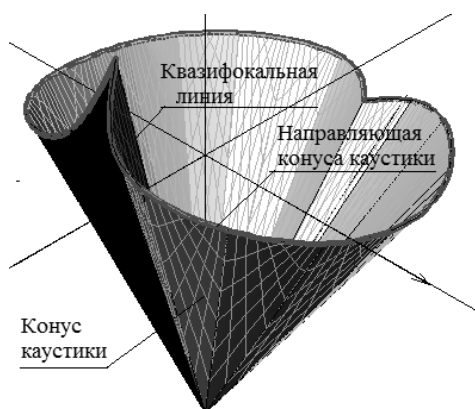


Рис. 5. Направляющая поверхности каустики для отражающего конуса

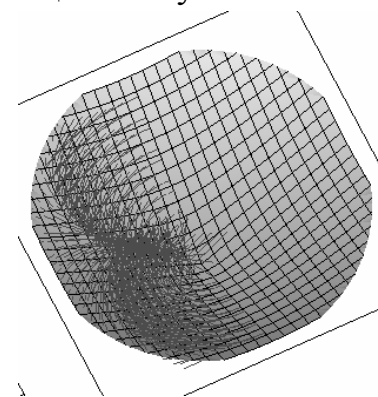


Рис. 6. Компьютерная визуализация конгруэнции отражённых от конуса лучей и поверхности каустики.

Выводы. Из вышесказанного можно сделать вывод, что кривая каустика как «жгучая кривая» отвечает своему названию только для плоской задачи (2D). Это наблюдается на плоскостях проекций или в плоских сечениях

конгруэнции отражённых и преломлённых лучей. Для конгруэнции отражённых лучей, т.е. для 3D задачи, зоной наибольшей концентрации является квазифокальная линия. Поверхность каустики является фокальной поверхностью конгруэнции отражённых лучей и все лучи конгруэнции касаются этой поверхности.

Аннотация. В статье рассмотрены кривые каустики для 2D задачи и поверхности каустики для 3D задачи. Доказано, что поверхность каустики конгруэнции отраженных лучей не является зоной концентрации. Такой зоной является квазифокальная линия. Для 2D задачи кривую каустику можно считать зоной концентрации отражённых лучей, т.е. «горящей кривой».

ЛИТЕРАТУРА

1. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей. Пер. с англ. М. «Мир», 1988. 262с.
2. Bruce J.W., Giblin P.J., Gibson C.G. On caustics by reflection, *Topology*. 1981. I.21. 179 – 199.
3. Glaeser G. Reflection on Spheres and Cylinders of Revolution. *Journal for Geometry and Graphics*.// Volume 3. 1999, No. 2, p. 121 – 139.
4. Підгорний О.Л., Дворецкий А.Т. Модель плоскої відбивальної системи для паралельних падаючих променів. *Праці Таврійської державної агротехнічної академії*. – вип 4, том 15. – Мелітополь : ТГАТА, 2002. – С. 12-15.
5. Подгорный А.Л. Поверхности отраженных лучей // *Прикладная геометрия и инженерная графика*. Киев. «Будівельник», 1975. – Вып. 20. С.13 – 16.
6. Дворецкий А.Т. Квазифокальная кривая при отражении от поверхностей вращения и каналовых поверхностей// *Прикладная геометрия и инженерная графика*.-Киев:-1993 -вып. 55 , с.
7. Дворецкий А.Т. Компьютерное моделирование потока отраженных лучей / Дворецкий А.Т., Денисова Т.В. // *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. – Вип. 80. – КНУБА. - Київ, 2008. – С. 19-24.
8. Dvoretzky A. Computer simulation of the flux distribution on receiver surfaces [Электронный ресурс] /A. Dvoretzky, T.Denysova // *The 15th International Symposium on Solar Thermal Concentrating Technologies*. Berlin, Germany, 2009