УДК 539.3

М.О. Шульга, д-р фіз.-мат. наук
О.М. Тробюк

ПРО ЗМІШАНУ СИСТЕМУ РІВНЯНЬ ТИПУ ТИМОШЕНКА КОЛИВАНЬ НЕОДНОРІДНИХ ПЛАСТИН

Змішана система рівнянь типа Тимошенка коливань неоднорідних за своїми механічними властивостями пластин змінної товщини представлена в гамільтоновій формі по просторових координатах.

Для конструктивних елементів будівельних споруд (несучих об’єктів, пластинчатих або оболонкових перекриттів та ін.) притаманна природна чи технологічна неоднорідність їх структури. Розмаїття неоднорідностей вимагає постійного вдосконалення методів моделювання, вибору теоретичних розрахункових схем і методів розрахунку несучої здатності при статичних і динамічних навантаженнях експлуатаційного та природного походження. Складність практичних задач обумовлює застосування, як правило, єдино можливих чисельних методів, що ґрунтуються на різноманітних сіткових апроксимаціях континуальних моделей (методу скінчених елементів в його різних варіантах, варіаційно-різницеві методи, методи прямих (методи проектування) для зменшення розмірності задач та ін.).

Найбільш широке застосування, при виборі розрахункових схем, належить прикладним теоріям стержнів, пластин і оболонок. В монографії [2] вперше в світовій науковій літературі було запропоновано представлення рівнянь теорії пружності в гамільтоновій формі по просторовій координаті. Подальшому розвитку такого підходу присвячені чисельні роботи, аналіз яких проведено в оглядах [5-7] та в інших публікаціях [3,4,8]. Користуючись цими ідеями в даній статті пропонується застосування гамільтонового формалізму по просторових координатах в теорії типу Тимошенка коливань неоднорідних за своїми механічними властивостями пластин змінної товщини.

Серединну відлікову площину $z=0$ пластини, віднесемо до прямокутної декартової системи координат x_1, x_2, z. Нехай механічні властивості пластини (густина матеріалу $\rho(x_1, x_2)$, модулі першого $E(x_1, x_2)$ і другого $G(x_1, x_2), G_{13}(x_1, x_2), G_{23}(x_1, x_2)$ роду, коефіцієнт Пуассона $\nu(x_1, x_2)$) залежать від планарних координат x_1, x_2. Лицеві поверхні $z = \pm h(x_1, x_2)/2$, причому змінна товщина $h(x_1, x_2)$ пластини є достатньо гладкою функцією координат x_1, x_2, що дозволяє користуватися теорією типа Тимошенка згинання пластин. Таким чином згинальна жорсткість $D = I_1 E / (1 - v^2)$, зсувна жорсткість $B_3 = k_G G_{13} h = k_G G_{23} h$, де k_G – коефіцієнт зсуву, момент інерції поперечного перерізу на одиницю довжини $I_1 = h^3/12$ також залежать від координат x_1, x_2.

В теорії типу Тимошенка коливань пластин згинальні M_{11}, M_{22} та крутильні M_{12}, M_{21} моменти, перерізуючі сили Q_1, Q_2, прогин w і функції зсуву ψ_1, ψ_2 зв’язані рівняннями:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_1 = -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_2 = -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{1}$$

та матеріальними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
&M_{11} = -D\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + v\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\right), \quad M_{22} = -D\left(v\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\right),\\
&M_{12} = -\frac{1-v}{2} D\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + v\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\right),\\
&Q_1 = B_3\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \psi_1\right), \quad Q_2 = B_3\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2\right).
\end{aligned} \tag{2}$$

Систему рівнянь (1), (2) запишемо в змішаній нормальній операторній формі Коші відносно функцій $M_{22}, \psi_1, w, \psi_2, M_{21}, Q_2$, які при досконалому механічному контакті залишаться неперервними на перерізах $x_2 = const$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} = -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} + Q_2;\\
&\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{2}{(1-\nu) D} M_{21};\\
&\frac{\partial w}{\partial x_2} = \psi_2 + \frac{Q_2}{B_3};
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{D} M_{22} - \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}; \\
&\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} = -\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - \rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + Q_1; \\
&\frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

З системи (3) потрібно виключити M_{11} та Q_1, замінивши їх на M_{22}, ψ_1, w користуючись залежностями (1), (2). Маємо

$$
Q_1 = B_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \psi_1 \right), \quad M_{11} = \nu M_{22} - \left(1 - \nu^2\right) D \frac{\partial \psi_1}{d x_1}. \tag{4}
$$

В результаті систему (3) запишемо так

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} = -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} + Q_2; \\
&\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{2}{(1-\nu) D} M_{21}; \\
&\frac{\partial w}{\partial x_2} = \psi_2 + \frac{Q_2}{B_3}; \\
&\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{D} M_{22} - \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}; \\
&\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} = -\nu \frac{\partial M_{22}}{\partial x_1} - \left[B_3 + \left(1 - \nu^2\right) D \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \rho I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \psi_1 + B_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}; \\
&\frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = B_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \left[\rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} - B_3 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right] w.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

При перетворенні рівнянь (1), (2) до систем (3) і (5) вважаємо, що механічні і геометричні параметри або слабо залежать від координати x_1 або зовсім не залежать від неї. В той же час коефіцієнти системи (3) і (4), а значить і рівнянь (1), (2), можуть бути довільними функціями координати x_2 з розривами першого роду.

Покажемо, що система (5) є операторною гамільтоновою системою [1] по просторовій координаті x_2, тобто

$$
\frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x_2} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_i}, \quad \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial x_2} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{q}_i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{6}
$$

З цією метою операторну функцію Гамільтона візьмемо у вигляді

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{P}_{ij} q_i q_j + \frac{1}{2}\hat{Q}_{ij} p_i p_j, \tag{7}$$

де симетричні операторні матриці $\hat{P}$ і $\hat{Q}$ мають наступні ненульові елементи:

$$-\hat{P}_{11} = -\frac{1}{D}, \quad -\hat{P}_{12} = -\hat{P}_{21} = -\nu\frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$-\hat{P}_{22} = -B_3 + \left(1-\nu^2\right)D\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \rho I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad -\hat{P}_{23} = -\hat{P}_{32} = B_3\frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$-\hat{P}_{33} = \rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2} - B_3\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad \hat{Q}_{11} = -\rho I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \hat{Q}_{12} = \hat{Q}_{21} = -\frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$\hat{Q}_{13} = \hat{Q}_{31} = 1, \quad \hat{Q}_{22} = -\frac{2}{(1-\nu)D}, \quad \hat{Q}_{33} = \frac{1}{B_2}. \tag{8}$$

Канонічні змінні визначимо так:

$$\left[\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3\right] = \left[M_{22}, \psi_1, w\right], \quad \left[\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3\right] = \left[\psi_2, M_{21}, Q_2\right]. \tag{9}$$

Очевидно, що система (6) з урахуванням (7) і (8) співпадає з системою (5), тобто система (5) є операторною гамільтоновою системою.

Тепер систему рівнянь (1), (2) запишемо в змішаній нормальній операторній формі Коші відносно функцій $M_{11}, \psi_2, w, \psi_1, M_{12}, Q_1$, які при досконалому механічному контакті залишаться неперервними на перерізах $x_1 = const$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} = -\rho I_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_2} + Q_1,\\
&\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - \frac{2}{(1-\nu)D}M_{12},\\
&\frac{\partial w}{\partial x_1} = \psi_1 + \frac{Q_1}{B_3},\\
&\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} = -\frac{M_{11}}{D} - \nu\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2},\\
&\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} = -\nu\frac{\partial M_{11}}{\partial x_2} + \left(1-\nu^2\right)D\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_2^2} - \rho I_1\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} - B_3\psi_2 + B_3\frac{\partial w}{\partial x_2},\\
&\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} = B_3\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} - B_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{10}$$

По двом іншим рівнянням системи (1), (2) визначаються згинальний момент M_{22} і поперечна сила Q_2, які не ввійшли в систему (10):

$$M_{22} = \nu M_{11} - \left(1-\nu^2\right) D \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \quad Q_2 = B_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right). \tag{11}$$

Система (10) записана у вигляді операторної нормальної форми Коші по просторовій координаті x_1, коли за розв'язки взяті функції $M_{11}, \psi_2, w, \psi_1, M_{12}, Q_1$, які при досконалому механічному контакті залишаться неперервними на перерізах $x_1 = const$

При перетворенні рівнянь (1), (2) до системи (10) приймалося, що механічні і геометричні параметри або слабо залежать від координати x_2 або зовсім не залежать від неї. В той же час коефіцієнти системи (10), а значить і рівнянь (1), (2), можуть бути довільними функціями координати x_1 з розривами першого роду.

Покажемо, що система (10) є операторною гамільтоновою системою [1] по просторовій координаті x_1

$$\frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x_1} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_i}, \quad \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial x_1} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{q}_i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{12}$$

З цією метою операторну функцію Гамільтона візьмемо у вигляді:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{P}_{ij} q_i q_j + \frac{1}{2} \hat{Q}_{ij} p_i p_j, \tag{13}$$

де симетричні операторні матриці $\hat{P}$ і $\hat{Q}$ мають наступні ненульові елементи:

$$-\hat{P}_{11} = -\frac{1}{D}, \quad -\hat{P}_{12} = -\hat{P}_{21} = -\nu \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$-\hat{P}_{22} = -B_3 + \left(1-\nu^2\right) D \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \rho I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad -\hat{P}_{23} = -\hat{P}_{32} = B_3 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$-\hat{P}_{33} = \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} - B_3 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \hat{Q}_{11} = -\rho I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \hat{Q}_{12} = \hat{Q}_{21} = -\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\hat{Q}_{13} = \hat{Q}_{31} = 1, \quad \hat{Q}_{22} = -\frac{2}{\left(1-\nu\right) D}, \quad \hat{Q}_{33} = \frac{1}{B_2}. \tag{14}$$

Канонічні змінні визначимо так:

$$\left[\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3\right] = \left[M_{11}, \psi_2, w\right], \quad \left[\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3\right] = \left[\psi_1, M_{12}, Q_1\right]. \tag{15}$$

Таким чином в даній статті системи рівнянь теорії типу Тимошенка коливань пластин для двох випадків неоднорідності механічних властивостей і товщини пластини зведено до рівнянь гамільтонового типу (5) і (10) по просторовій координаті неоднорідності. Такий підхід доцільно застосувати в проекційних методах розрахунку динамічних характеристиках реальних об'єктів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Павловський М.А.* Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. *Шульга Н.А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
3. *Шульга О.М.* Волновые решения уравнений типа Тимошенко поперечных колебаний пластин с периодическими по одной координате параметрами // Теорет. и прикладная механика. – 1996. – Вып. 26. – с. 105 – 111.
4. *Шульга М.О.* О гамильтоновом формализме в теории типа Тимошенко изгиба пластин. – Теор. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – с. 3 – 7.
5. *Shul'ga N.A.* Propagation of Elastic Waves in Periodically Inhomogeneous Media // Int. Appl. Mech. – 2003. 39, N 7. – P. 763-796.
6. *Shul'ga N.A.* Propagation of Coupled Waves in Layered-Periodic Continua for Interaction with an Electromagnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2003. 39, N 10. – P. 1146-1172.
7. *Shul'ga N.A.* Theory of Dynamical Processes in Mechanical Systems and Materials of Regular Structures // Int. Appl. Mech. – 2009. 45, N 12. – P. 1301-1330.
8. *Shul'ga N.A.* On Certain Mixed System of Equations of Theory of Elasticity // Int. Appl. Mech. – 2010. 46, N 3. – P. 247-251.

Стаття надійшла до редакції 17.10.2011 р.

Шульга М.О., Тробюк О.М.

О СМЕШАННОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ТИПА ТИМОШЕНКО КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН

Смешанная система уравнений типа Тимошенко колебаний неоднородных за своими механическими свойствами пластин переменной толщины представлена в гамильтоновой форме по пространственным координатам.

Shul'ga N.A., Trobiuk O.M.

ABOUT A MIXED SYSTEM OF EQUATIONS OF TIMOSHENKO'S TYPE VIBRATIONS OF HETEROGENEOUS PLATES

Mixed system of equations of Timoshenko's type vibrations of heterogeneous by its mechanical properties plates of a variable thickness is presented in the Hamiltonian form of spatial coordinates.