УДК 624.014

д.т.н., професор **Білик С.І.,**
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ ПОГИНІВ НА СТІЙКІСТЬ СТАЛЕВИХ КОЛОН ЗА АНАЛІЗОМ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

Розроблено узагальнений підхід для оцінки критичної сили сталевих центрально-стиснутих стрижнів з урахуванням початкових геометричних недосконалостей та на підставі експериментальних даних. Надано теоретичне обґрунтування підходу. Наведено рішення кількох задач. Показана можливість визначати на підставі експериментальних даних початкові геометричні недосконалості. Результати роботи можуть бути використані і під час перевірки технічного стану центрально-стиснутих стрижнів при обстеженні металевих конструкцій ферм, колон, структурних конструкцій.

Ключові слова: сталеві конструкції, стійкість, початкові недосконалості, критична сила, метод Тимошенко-Саусвелла, початковий вигин, початкові залишкові деформації, пластична деформація, приведений модуль, дотичний модуль, формула Ейлера.

In experimental studies of stability the elements always buckling occurs suddenly and the maximum critical force will not to determined indeed.

Fixing critical load and corresponding strain measurement is always the difficulty, since the loss of stability takes place fast at increasing deflections. When examining and monitoring structures we have the ability to fix the deflections of rods under load, it the deflections and force is not close to critical.

Therefore, it the research allows to define the critical load and initial imperfection by the analysis of data relationships deflections and of the load, which is less than the critical load.

It is shown that the maximum value and the actual deflections of elastic elements with initial imperfections at longitudinal bending, which will be defined by the methodology Tymoshenko S.P. and by the approach Sausvella R.V. are identical.

We have shown that the method Timoshenk-Sausvella can be used in the analysis of experimental results of research elastic buckling of columns and inelastic buckling of columns

Key words: steel structures, stability, buckling, steel elements, slenderness, reduction factor for buckling, initial deflection, residual stresses initial imperfections, the critical force, method Tymoshenko-Southwell.

Відомо, що під час дослідження центрально-стиснутих стрижнів розглядають розрахункову модель позацентрово-стиснутого стрижня з початковими геометричними недосконалостями та випадковими ексцентриситетами прикладання поздовжньої сили до центру ваги перерізу на кінцях.

Під час обстеження будівель і споруд, в більшості випадків, початкові недосконалості конструктивних елементів невідомі, але, наприклад, ексцентриситет прикладання зусилля при технічному обстеженні конструкцій в типових випадках є можливість заміряти або прийняти для розрахунків максимально допустимим, прийнявши нормативні вимоги. Але первинні недосконалості неможливо визначити у ситуації, коли стрижень зазнав нелінійних деформацій.

Для того, щоб виявити технічний стан стиснутого елемента проводять моніторингові дослідження конструкцій, при яких з'являється можливість виконати заміри прогинів конструктивного елемента при різних ступенях навантаження.

Під час експериментальних досліджень складно зафіксувати значення критичного навантаження, бо при досягненні критичного навантаження швидко зростають деформації і нове положення рівноваги фіксується при меншому навантаженні.

Таким чином розробка методологічних підходів, які допомагали встановити технічний стан конструкцій та визначити критичне навантаження на конструкцію при технічному обстеженні та експериментальних дослідженнях, достатньо актуальна проблема і вимагає методологічних підходів до обробки отриманих результатів обстеження.

В статті пропонується методика визначення критичного навантаження і початкових геометричних недосконалостей при пружній та пластичній роботі стиснутих стрижнів за результатами моніторингових даних поведінки конструкції.

Аналізу експериментальних даних центрально-стиснутих стрижнів присвячено ряд видатних робіт [2-14]. На підставі теоретичних та експериментальних досліджень і базуються сучасні нормативні документи [1].

Головними задачами дослідження поведінки центрально-стиснутих колон є визначення критичної сили з урахуванням початкових геометричних недосконалостей і вплив розвитку пластичних деформацій в залежності від форми перерізу елемента та міцності сталі за границею текучості.

Теоретичні положення досліджень аналізу експериментальних даних пружних центрально-стиснутих стрижнів з урахуванням початкових геометричних недосконалостей базуються на дослідженнях Тимошенко С.П. і Соусвелла (Southwell R.V., 1932) [2,3,7].

Але є необхідність щодо узагальнення методології аналізу експериментальних даних центрально-стиснутих стрижнів з урахуванням розвитку пластичних деформацій і початкових геометричних недосконалостей [15-24].

Мета досліджень, викладених у статті, є узагальнення теоретичного підходу щодо аналізу впливу на стійкість центрально-стиснутих стрижнів розвитку початкових геометричних недосконалостей.

Методики досліджень базуються на аналітичних дослідженнях центрально-стиснутих стрижнів з початковими недосконалостями [2-6]. За початкові геометричні недосконалості прийнято початкові прогини й випадкові початкові ексцентриситети прикладання поздовжнього зусилля. Тому втрата стійкості центрально-стиснутого стрижня з початковими недосконалостями розглядається як деформування позацентрово-стиснутого стрижня.

Для визначення стійкості позацентрово-стиснутих стрижнів використовують різні формули, наприклад, формулу секанса. Загальне рішення позацентрово-стиснутого елемента записують у формі лінійного диференціального рівняння:

$$\eta^{//} + k^2\eta = -k^2\left(\delta_{f0}\sin\left(\pi z / l\right) + e_h\right), \tag{1.a}$$

де $k^2 = Nl^2 / \left(EI_x\right)$.

Загальне рішення такого диференціального рівняння буде при впливі тільки початкових прогинів.

$$\eta = C_1 f_m \sin\left(kz/l\right) + C_2 f_m \cos\left(kz/l\right) - C_3 \delta_{f0} \sin\left(\pi z/l\right) - e_b. \qquad (1.b)$$

Загальне рішення $\left(\eta_{ps}\right)$ диференціального рівняння (1.b) є сума загального рішення $\left(\eta_{ps\delta}\right)$ відповідного однорідного рівняння і частинного рішення $\left(\eta_{psb}\right)$ рівняння (1.b).

$$\eta_{ps} = \eta_{ps\delta} + \eta_{psb}. \qquad (1.c)$$

З частинного розв'язку диференціального рівняння маємо формули для визначення коефіцієнта C_3.

$$\eta_{ps\delta} = C_3 \delta_{f0} sin(\pi z/l)$$

$$\eta^{//} + k^2\eta = -k^2 \cdot \delta_{f0} sin(\pi z/l),$$

$$-\pi^2 C_3 \delta_{f0} sin(\pi z/l) + k^2 C_3 \delta_{f0} sin(\pi z/l) = -k^2 \cdot (\delta_{f0} sin(\pi z/l)$$

$$-\pi^2 C_3 + k^2 C_3 = -k^2 \cdot \delta_{f0}.$$

$$C_3 = -\frac{k^2}{-\pi^2 + k^2} = \frac{1}{\dfrac{\pi^2}{k^2} - 1}. \qquad (1.d)$$

Для шарнірно опертого тільки позацентрово-стиснутого стрижня є рішення для відповідного однорідного диференціального рівняння:

$$\eta^{//} + k^2\eta = 0,$$

$$\eta_{ps\delta} = C_1 f_m \sin\left(kz/l\right) + C_2 \cos\left(kz/l\right) - e_b. \qquad (2.a)$$

Граничні умови дають систему лінійних неоднорідних рівнянь.

$$z = 0, \quad \eta_0 = 0. \quad \eta_0 = C_2 f_m - e_b = 0, \quad z = l, \quad \eta_0 = 0. \quad C_2 f_m - e_b = 0,$$

$$C_1 f_m \sin\left(k\right) + C_2 f_m \cos\left(k\right) - e_b = 0 \quad . \qquad (2.b)$$

Відповідно величини коефіцієнтів будуть:

$$C_1 f_m = e_b \left[\frac{1 - cos(k)}{sin\left(k\right)}\right]. \qquad C_2 f_m = e_b. \qquad (2.c)$$

Загальне рішення з урахуванням ексцентриситету прикладання поздовжньої сили буде початкового геометричного погину для шарнірно-опертого стрижня.

$$\eta = e_b\left[\frac{1-cos(k)}{sin(k)}\right]sin\left(\frac{kz}{l}\right)+ e_b\left[cos(\frac{kz}{l})-1\right]+\frac{\delta_{f0}}{\frac{\pi^2}{k^2}-1}. \tag{2.d}$$

При координаті $z=l/2$ маємо максимальні переміщення серединного перерізу стрижня.

$$\eta_{z/l=1/2} = e_b\left[\frac{1-cos(k)}{sin(k)}\right]sin\left(\frac{k}{2}\right)+e_b\left[cos(\frac{k}{2})-1\right]+\frac{\delta_{f0}}{\frac{\pi^2}{k^2}-1}. \quad \eta_{z/l=1/2} = e_b\left[\frac{1-cos(k)}{2cos(k/2)}+cos(\frac{k}{2})-1\right]+\frac{\delta_{f0}}{\frac{\pi^2}{k^2}-1}.$$

$$\eta_{z/l=1/2} = e_b\left[\frac{1-cos(k)+2cos^2(\frac{k}{2})-2cos(\frac{k}{2})}{2cos(k/2)}\right]+\frac{\delta_{f0}}{\frac{\pi^2}{k^2}-1}.$$

Але відомо:

$$cos(k)=2cos^2(\frac{k}{2})-1$$

$$\eta_{z/l=1/2} = e_b\left[\frac{1}{cos(k/2)}-1\right]+\frac{\delta_{f0}}{\frac{\pi^2}{k^2}-1}. \tag{3.a}$$

Остання формула є формулою секанса, об’єднаною з формулою для обчислення зростання початкових прогинів внаслідок поздовжнього згину.

Через ряд Тейлора припускаємо в запас стійкості апроксимацію секанса:

$$\frac{1}{cos(kl/2)}-1=\frac{1}{\frac{8}{k^2l^2}-1}\approx\frac{1}{\frac{\pi^2}{k^2l^2}-1}. \tag{3.b}$$

Остаточно максимальні прогини серединного перерізу металевого елемента набувають запису.

$$\eta_{z=l/2}=\frac{e_b+\delta_{f0}}{\frac{\pi^2}{k^2l^2}-1}. \quad \eta_{z=l/2}=\frac{e_b+\delta_{f0}}{\frac{\pi^2EI_x}{l^2N}-1}. \quad N_{cr}=\frac{\pi^2EI_x}{l^2}. \quad \eta_{z=l/2}=\frac{e_b+\delta_{f0}}{\frac{N_{cr}}{N}-1}. \tag{4}$$

Такий самий висновок можна отримати застосовуючи підхід, обґрунтований в роботах [2,3,7] для будь який умов закріплення стрижнів. Запишімо загальне рішення відповідного однорідного диференціального рівняння другого порядку в такому вигляді:

$$EI_x\eta^{//}+N\eta=0.$$

$$\eta_{sn} = c_{s1n}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi z}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{s2n}\cos\frac{n\pi z}{l}. \quad (5)$$

Якщо стрижень має початкові геометричні недосконалості, то частинне рішення загального диференціального рівняння $EI_x\eta^{//} + k^2 N\eta = -k^2\left(\delta_{f0} + e_b\right)$ також можна представити у вигляді ряду тригонометричних функцій. Слід відмітити, що частинне рішення (5) підходить для вирішення задачі стійкості стрижня з початковими геометричними недосконалостями і початковим ексцентриситетом прикладання зовнішньої поздовжньої сили. Оскільки початкові геометричні недосконалості єдині для стрижня, то коефіцієнти при тригонометричних функціях лінійно будуть відрізнятися через оператор a_{s0n}.

$$\eta_{e0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{s0n}\sin\frac{n\pi z}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{s0n}c_{s0n}\cos\frac{n\pi z}{l}. \quad (6)$$

Підставимо ці рішення у диференціальне рівняння (1.a), яке описує стійкість стрижня з початковими недосконалостями. Якщо прирівняти коефіцієнти при однакових тригонометричних функціях в рівнянні (6), то тоді отримаємо рекурентні формули для визначення коефіцієнтів при тригонометричних функціях, які описують різні гармоніки можливих прогинів стрижня при втраті стійкості колон.

$$c_{s1n} = \frac{Nc_{s0n}}{\left(\dfrac{\pi^2 n^2 EI_x}{l^2} - 1\right)};\ N_n = \frac{\pi^2 n^2 EI_x}{l^2};\ c_{s1n} = \frac{c_{s0n}}{\left(\dfrac{N_n}{N} - 1\right)};\ c_{s2n} = \frac{a_{s0n}c_{s0n}}{\left(\dfrac{N_n}{N} - 1\right)}. \quad (7.a)$$

Повний прогин стрижнів буде рівним.

$$\eta_s = \eta_{sn} + \eta_{e0}$$

$$\eta_s = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{c_{s0n}}{\left(\dfrac{N_n}{N} - 1\right)} + c_{s0}\right]\sin\frac{n\pi z}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{s0n}\left[\frac{c_{s0n}}{\left(\dfrac{N_n}{N} - 1\right)} + c_{s0n}\right]\cos\frac{n\pi z}{l}. \quad (7.b)$$

Подальші перетворення до рівняння показує взаємозв’язок між першою гармонікою вигину стрижня і загальним прогином стрижня при втраті стійкості.

$$\eta_s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{s0n}}{1 - \frac{N}{N_n}} \sin \frac{n\pi z}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{s0n} c_{s0n}}{1 - \frac{N}{N_n}} \cos \frac{n\pi z}{l}. \qquad (8)$$

Задача 1. Визначити для центрально-стиснутого шарнірно опертого стрижня максимальне переміщення з урахуванням початкових геометричних недосконалостей.

Крайові умови шарнірно опертого стрижня дають такі відношення:

$$\eta_{sz=0} = 0; \qquad \eta_{sz=l} = 0;$$

$$\eta_s = \eta_{sn} + \eta_{e0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{s0n} c_{s0n}}{1 - \frac{N}{N_n}} = 0; \rightarrow a_{s0n} = 0. \qquad (9.a)$$

Для перерізу з максимальними переміщеннями $z = l/2$ маємо:

$$\eta_{smax} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{s01}}{1 - \frac{N}{N_1}} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{c_{s02}}{1 - \frac{N}{N_2}} \sin \pi + \frac{c_{s03}}{1 - \frac{N}{N_3}} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{c_{s03}}{1 - \frac{N}{N_3}} \sin \frac{3\pi}{2} + ... \qquad (9.b)$$

Члени з парними індексами зникають, тому вірний запис:

$$\eta_{smax} = \frac{c_{s01}}{1 - \frac{N}{N_1}} - \frac{c_{s03}}{1 - \frac{N}{N_3}} + \frac{c_{s05}}{1 - \frac{N}{N_5}}\ . \qquad (10)$$

Коефіцієнти c_{s0i} приймають за апроксимацією результатів обмірів зразків.

Для шарнірно-опертого стрижня домінантною гармонікою є перша синусоїдальна форма. Тепер максимальні переміщення будуть залежати від відношення значення поточної сили до критичної.

$$\eta_{smax} = \frac{c_{s01}}{1 - \frac{N}{N_{cr}}}; \ N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}\ . \qquad (11)$$

Таке рішення важливо тим, що за ним є можливість визначити максимальний прогин стрижня для будь-якого значення поздовжньої сили $N < N_{cr}$.

Задача 2. Визначити початкові геометричні недосконалості при відомому значенні повного навантаження і переміщення середини стрижня. Це є зворотна задача до задачі 1. Відомими є стискаюча сила N_i, критичне значення сили N_{cr}

якщо є приміщення при певному значенні сили, то можна визначити первісні геометричні недосконалості.

$$c_{s01} = \eta_s \left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right). \tag{12}$$

Задача 3. Методика визначення додаткового прогину η_{sf}. Через те, що загальний прогин складається з первинного прогину та прогину від поздовжнього вигину, то має право такий запис при $\eta_{e0} = c_{s01.}$

$$\eta_{sf} = \eta_{smax} - \eta_{e0} = \frac{c_{s01}}{1 - \dfrac{N}{N_{cr}}} - c_{s01.} \quad \eta_{sf} = \frac{N_{cr}c_{s01} - N_{cr}c_{s01} + Nc_{s01}}{N_{cr} - N} = \frac{c_{s01}}{\dfrac{N_{cr}}{N} - 1}\ . \tag{13}$$

$$\eta_{sf} = \frac{c_{s01}}{\dfrac{N_{cr}}{N} - 1}. \tag{14}$$

Задача 4. Визначення початкових недосконалостей стрижня під час втрати стійкості при пружній роботі сталі. Дано кілька експериментальних даних додаткового прогину центрально-стиснутого елемента: η_{s1} та η_{s2}, η_{s3} і відповідні значення стискаючої сили. Пропонується наступна методика послідовності обчислень і визначення початкових геометричних недосконалостей та побудови кривої стійкості з визначенням критичної сили.

За формулою (14) ми можемо скласти систему двох рівнянь з двома невідомими членами. Перше невідоме є критична сила, друге невідоме – це є початкові геометричні недосконалості.

$$\begin{cases} \eta_{s1} = \dfrac{c_{s01}}{\dfrac{N_{cr}}{N_1} - 1} \\ \eta_{s3} = \dfrac{c_{s01}}{\dfrac{N_{cr}}{N_3} - 1} \end{cases} . \rightarrow \begin{matrix} c_{s01} = \eta_{s1}\left(\dfrac{N_{cr}}{N_1} - 1\right) \\ \dfrac{N_{cr}}{N_1} = \dfrac{N_3}{N_1}\left(\dfrac{c_{s01}}{\eta_{s3}} + 1\right) \end{matrix} \rightarrow \frac{N_{cr}}{N_1}\left(1 - \frac{\eta_{s1}}{\eta_{s3}}\frac{N_3}{N_1}\right) = \left(\frac{N_3}{N_1} - \frac{\eta_{s1}}{\eta_{s3}}\frac{N_3}{N_1}\right). \tag{15.a}$$

Остаточно маємо відносне значення критичної сили.

$$\frac{N_{cr}}{N_1} = \frac{N_3}{N_1} \frac{\left(1 - \frac{\eta_{s1}}{\eta_{s3}}\right)}{\left(1 - \frac{\eta_{s1}}{\eta_{s3}} \frac{N_3}{N_1}\right)}. \tag{15.b}$$

Зворотна підстановка критичної сили у одне з рівнянь системи дає значення початкових геометричних недосконалостей.

$$\eta_{s01} = c_{s01} = \eta_{s1} \left(\frac{\left(\frac{\eta_{s3}}{\eta_{s1}} - 1\right)}{\left(\frac{N_1}{N_3} \frac{\eta_{s3}}{\eta_{s1}} - 1\right)} - 1 \right). \tag{15.c}$$

За формулами (15.c) можна обчислити верхнє значення критичного навантаження. Нижнє значення критичного навантаження буде обчислюватись за формулою (16) при використанні інших експериментальних даних.

$$\frac{N_{cr}}{N_2} = \frac{N_4}{N_2} \frac{\left(1 - \frac{\eta_{s1}}{\eta_{s3}}\right)}{\left(1 - \frac{\eta_{s1}}{\eta_{s3}} \frac{N_4}{N_2}\right)}. \tag{16}$$

Додатковий прогин від поздовжнього згину без урахування початкових недосконалостей буде:

$$\eta_{smax} = \eta_{sf\,\max} - \eta_{s01}. \tag{17}$$

Загальний прогин при критичному навантаженні при втраті стійкості обчислюється за формулою.

$$\eta_{sf} = \eta_{s1} \frac{\left(1 - \frac{\eta_{s1}}{\eta_{s3}} \frac{N_3}{N_1}\right)}{\frac{N_1}{N_3} \frac{\eta_{s3}}{\eta_{s1}} \left(1 - \frac{N_1}{N_3} \frac{\eta_{s1}}{\eta_{s3}}\right)} \left(\frac{\left(\frac{\eta_{s3}}{\eta_{s1}} - 1\right) - \left(\frac{N_1}{N_3} \frac{\eta_{s3}}{\eta_{s1}} - 1\right)}{\left(1 - \frac{\eta_{s1}}{\eta_{s3}} \frac{N_3}{N_1}\right)} \right) \to \eta_{sf} = \eta_{s1} \frac{N_3}{N_1} \frac{\left(1 - \frac{N_1}{N_3}\right)}{\left(1 - \frac{N_1}{N_3} \frac{\eta_{s1}}{\eta_{s3}}\right)}. \tag{18}$$

Висновки. При експериментальних дослідженнях стійкості стрижнів завжди втрата стійкості відбувається раптово і визначення максимального значення критичної сили фіксується не точно. При обстеженні та моніторингу конструкцій є можливість зафіксувати прогини стрижнів при навантаженнях, не близьких до критичних. Фіксація критичного навантаження і замір відповідних деформацій завжди має складність, бо під час втрати стійкості відбувається швидке нарощування прогинів. Тому приведені дослідження дають змогу визначити критичне навантаження на підставі аналізу даних і відповідних відношень навантаження й прогинів при значеннях, близьких до критичного навантаження. При подальшому розвитку методології може бути більш точно оцінено і значення початкових недосконалостей.

Література

1. Eurocode 3, EN 1993-1-1:2005:, 2005. E, Design of steel structures, Part 1-1, General rules and rules for bulding. European Communities Standardization, Brussel.
2. Timoshenko S.P., Gere J.M., 1961. Theory of Elastic Stability, McGraw Hill Kogakusha Ltd., New York.
3. Timoshenko S.P., 1953. History of Strength of Materials, McGraw-Hill, New York.
4. Bleich F., 1952. Buckling Strength Of Metal Structuresq New York, McGraw-Hill Book Co., Inc.
5. Considere A., 1889. Resistance Des Pieces Comprimees. Congr'ds Int. Des Procedes De Const, Exposition Univ. Int., Paris.
6. Engesser F., 1893. Ueber Die Berechnung Auf Knickfestigkeit Beanspruchter St; ibe Aus Schweissund Flusseisen. Zeits. d. Oest. Ing. U. Arch. Ver. Wien.
7. Southwell R.V., 1932. On The Analysis Of Experimental Observations In Problems Of Elastic Stability, Proc. Roy. Soc. A., 135, 601-616.
8. Youngs T., 1807. A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts, London, 320-324.
9. Jasinsky F.S., 1894. La flexion des pieces comprimdes, Ann. Ponts Chaussdes, 2nd part.
Jezek K., 1937. Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl, Julius Springer, Vienni.
11. Johnson J.B., 1893. The theory and practice of modern framed structures, New York.
12. Rankine W.J., 1925. Useful rules and tables, London, 1866. Robertson A., The strength of struts, Selected Engineering Paper No. 28, ICE.
13. Shanley F.R., 1947. Inelastic column theory, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 14, May.
14. Bilyk S., 2006. The peculiarities of buckling and strength analysis of frame elements of I-shaped cross-section with variable web height. Progress in Steel, Composite and Aluminium Structures. Proceeding of the XI international conference on metal structures (ICMS-2006), Pzeszow, Poland, 21-23 June, 144-145.
15. Young B.W. ,1975. Residual stresses in hot rolled members, Cambridge University, CLJED.C-Struct.TR, 8.
16. Young B.W., 1971. Steel Column Design Ph.D Thesis, Cambridge.
17. Beer H., Schulz G., 1970. "Bases Theoriques des Courbes Europeennes de Flambement" Construction Metallique, No. 3.
18. Young B.W., Dwight, J.B., 1971. Residual Stresses and Their Effect on the Moment-Curvature Properties of Structural Steel Sections C.I.R.I.A., tech. note No. 32.
19. Baker M.J., 1972. Variability in the Strength of Structural Steels C.I.R.I.A., tech. Note. No, 44.
20. Yeong C.Y., 2006. Post-buckling Behavior of Tapered Columns under a Combined Load using Differential Transformation, Archiectural Research, 8.
21. Huang N.C., 1973. "Inelastic buckling of eccentrically loaded columns." AIAA Journal, Vol. 11, No, 7.

22. Расчет стальних холодноформованых профилей в соответствии с Эврокодом 3. Хэйвуд М., Уэй. Э., Бєляєв Н.А., Білик С.І. Білик А.С., Украинский Центр Стального Строительства, 2015 К.: Изд-во ООО «НПП «Интерсервис»», 2015, с.99. Considere F., Euler, L.
23. Білик С.І. Білик А.С., Усенко М..В., Золотопольський О.Є. Стійкість холодногнутих швелерів з урахуванням пластичних властивостей мало вуглецевих сталей //Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського. Вип.7. – К.: Вид-во «Сталь», 2011. – С.26-35.
24. Білик С.І. Пластичний момент опору перерізу балок з урахуванням розвитку обмежених пластичних деформацій при використанні трилінійної апроксимації діаграми розтягу сталі //Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В. М. Шимановського. Вип.14. – К.: В-во «Сталь», 2014. – С.37-41.
25. Білик С.І. Методика визначення оптимальної висоти сталевої двотаврової балки зі змінним перерізом стінки при розвитку обмежених пластичних деформацій//Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В. М. Шимановського. Вип.9. – К.: Вид-во «Сталь», 2012. – С.28-33 .
26. Білик С.І. Просторова стійкість сталевих колон зі змінною висотою перерізу//Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В. М. Шимановського. Вип.1. – К.: Вид-во «Сталь», 2012. – С.120-126.
27. Білик С.І., Усенко М.В. Методика розрахунку на стійкість холодногнутих швелерів з урахуванням пластичних деформацій / Білик С.І., Усенко М.В. // Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. науч. трудов. Вып.№60. - Дн-вск., ПГАСА, 2011.- С.21-25.
28. Білик С.І. Залишкові напруження в сталевих холодно-гнутих швелерах / Білик С.І., Білик А.С., Усенко М.В., Куземко В.В., Нужний В.В. // Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. науч. трудов. Вып.№61. - Дн-вск., ПГАСА, 2011.-С.43-49.
29. Білик С.І. Білик А.С. Коефіцієнт стійкості центрально-стиснутих сталевих елементів з урахуванням початкових деформацій та геометричних недосконалостей / Білик С.І., Білик А.С.// Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. науч. трудов. Вып.№82. - Дн-вск., ПГАСА, 2015.-С.32-37.