УДК 539.3

д.т.н., професор Чибіряков В.К.,
к.т.н., доцент Станкевич А.М., Левківський Д.В.,
Київський національний університет будівництва і архітектури

ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНА МОДЕЛЬ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ТОВСТИХ ПЛАСТИН НА ДИНАМІЧНІ ВПЛИВИ

Розглядається дискретно-континуальна модель динамічного розрахунку товстих пластин, побудована на основі методу сил. Зниження вимірності виконується методом "прямих" у поєднанні з методом Бубнова-Гальоркіна-Петрова. Для чисельної реалізації та формування матриці впливу використовується дискретна ортогоналізація С.К.Годунова, власні числа та вектори матриць визначаються методом Якобі.

Відома в будівельній механіці дискретно-континуальна розрахункова модель для дослідження динамічної поведінки стержневої конструкції (одновимірної – балки, рами та ін.) враховує інерційні властивості об'єкта дискретно, а жорсткістні – континуально. При динамічному розрахунку, наприклад балки, розрахункова модель розбивається по довжині на ділянки. У середині кожної ділянки зосереджується її маса. За невідомі величини приймають переміщення, що характеризують степені вільності зосереджених мас, а динамічні рівняння складаються за алгоритмом метода сил, або метода переміщень. Розрахункові рівняння, які дозволяють наближено розв'язати три основні задачі динаміки пружних тіл: знаходження частот та форм власних коливань, розрахунок на вимушені коливання та дослідження нестаціонарних коливань із застосуванням методу сил мають вигляд:

$$\Pi T \frac{d^2\vec{Y}}{dt^2} + \vec{Y} = B\vec{P}(t) \tag{1}$$

$$\text{при } t = 0 \begin{cases} \vec{Y}(0) = \vec{Y}_0 \\ \dfrac{d\vec{Y}}{dt}(0) = \vec{V}_0 \end{cases} \tag{2}$$

Тут вектор $\vec{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$ має компоненти переміщень, що визначають степені динамічної вільності системи, n - кількість степенів вільності системи. Π -

матриця впливу сил інерції, елементи якої δ_{ij} є переміщення за напрямком i - го степеня вільності від одиничної сили за напрямком j - го степеня вільності, T - матриця інерції, яка в даному випадку є діагональною та позитивно визначеною.

$$\vec{P}(t)=\begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_{n-1}(t) \\ p_n(t) \end{bmatrix}$$ - вектор зосереджених навантажень, B - матриця впливу зосереджених навантажень.

Розв’язання усіх трьох задач динаміки ведеться при великій кількості степенів вільності за допомогою чисельних методів. Описана дискретно-континуальна модель розроблена для одновимірних розрахункових моделей. Однак один з основних методів дослідження дво- та тривимірних по просторовим координатам задач будівельної механіки є комбінований підхід, що базується на зниженні вимірності вихідних рівнянь. У тому випадку, коли редуковані рівняння стають одновимірними, можна побудувати ефективну дискретно-континуальну модель.

Одним з ефективних методів зниження вимірності вихідних рівнянь товстих пластин є метод “прямих” [1, 2]. Якщо вихідна задача для товстої пластини є двовимірною по просторовим координатам, то застосування метода “прямих” по одній координаті (поперечній) зводить вихідну задачу до редукованої одновимірної по просторовим координатам. Якщо ж розглядається просторове тіло (брус з прямокутним поперечним перерізом), то застосування метода “прямих” по двом поперечним координатам знов зводить вихідну тривимірну по просторовим координатам задачу до редукованої одновимірної [6]. В цих випадках можлива побудова дискретно-континуальної моделі.

Розглянемо головні особливості побудови такої моделі на прикладі вихідної двовимірної по просторових координатах задачі для товстої пластини (в постановці плоскої деформації, аналогічно розглядається в постановці плоского напруженого стану).

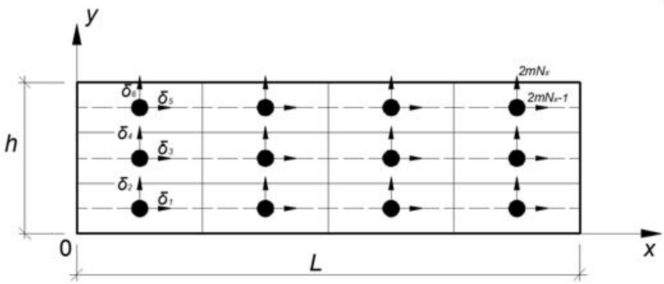

Рис. 1 Дискретно-континуальна модель

Розглянемо поперечний переріз пластини (рис.1) в якому напружено-деформований стан описується рівняннями в постановці плоскої деформації:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = \rho \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{cases} \tag{3}$$

На торцевих площинах $x=0$ та $x=l$ задані граничні умови загального вигляду, що описані в роботі [1, 2], на площинах $y=0$ та $y=h$ - змінні в часі навантаження, також враховуються змінні в часі об'ємні навантаження $X(x,y,t)$ та $Y(x,y,t)$. У початковий момент часу $t=0$ відомі переміщення та швидкості.

$$\begin{aligned} u(x,y,0) &= u_0(x,y), \\ v(x,y,0) &= v_0(x,y), \\ \dot{u}(x,y,0) &= U_0(x,y), \\ \dot{v}(x,y,0) &= V_0(x,y) \end{aligned} \tag{4}$$

Для зниження вимірності вихідних рівнянь по просторовій координаті y застосовуємо варіант метода "прямих", докладно описаний в роботі [1, 2]. Редуковані рівняння розглядаємо в моментах, тому що граничні умови в цьому випадку досить прості, а врахування одиничної сили при знаходженні чисел впливу в моментах зводиться до звичайного навантаження. Моменти – це інтегральні характеристики компонент НДС [7]. Оскільки для побудови розв'язувальних рівнянь необхідно обчислити матрицю впливу Π, що виконується за допомогою рівнянь статики, то ці редуковані рівняння мають вигляд:

$$
\begin{cases}
\dfrac{du_i^*}{dx} = -\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu} b_{ij} g^{j\alpha} v_\alpha^* + \dfrac{\mu}{\lambda+2\mu}\delta_{i\cdot}^{\cdot\alpha}\sigma_{x\alpha} \\
\dfrac{dv_i^*}{dx} = -b_{ij} g^{j\alpha} u_\alpha^* + \delta_{i\cdot}^{\cdot\alpha}\tau_{xy\alpha} \\
\dfrac{d\sigma_{xi}}{dx} = [k_{yx}^{*-}(x)\cdot\delta_{i\cdot}^{\cdot 1}\cdot g^{1\alpha} + k_{yx}^{*+}(x)\cdot\delta_{i\cdot}^{\cdot n}\cdot g^{n\alpha}]\cdot u_\alpha^* + b_{ji} g^{j\alpha}\tau_{xy\alpha} - \\
[q_{yx}^-(x)\cdot\delta_{i\cdot}^{\cdot 1} + q_{yx}^+(x)\cdot\delta_{i\cdot}^{\cdot n}] - [k_{yx}^{*-}(x)\cdot u_c^{*-}\cdot\delta_{i\cdot}^{\cdot 1} + k_{yx}^{*+}(x)\cdot u_c^{*+}\cdot\delta_{i\cdot}^{\cdot n}] - \delta_{i\cdot}^{\cdot\alpha} X_\alpha \\
\dfrac{d\tau_{xyi}}{dx} = [k_{yy}^{*-}(x)\cdot\delta_{i\cdot}^{\cdot 1}\cdot g^{1\alpha} + k_{yy}^{*+}(x)\cdot\delta_{i\cdot}^{\cdot n}\cdot g^{n\alpha}]\cdot v_\alpha^* + \dfrac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} b_{ji} g^{j\beta} b_{\beta k} g^{k\alpha} v_\alpha^* + \\
\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu} b_{ji} g^{j\beta}\delta_{\beta\cdot}^{\cdot\alpha}\sigma_{x\alpha} - [q_{yy}^-(x)\cdot\delta_{i\cdot}^{\cdot 1} + q_{yy}^+(x)\cdot\delta_{i\cdot}^{\cdot n}] - [k_{yy}^{*-}(x)\cdot v_c^{*-}\cdot\delta_{i\cdot}^{\cdot 1} + k_{yy}^{*+}(x)\cdot v_c^{*+}\cdot\delta_{i\cdot}^{\cdot n}] - \delta_{i\cdot}^{\cdot\alpha} Y_\alpha
\end{cases}
\tag{5}
$$

Редуковані граничні умови:

$$
\begin{array}{ll}
\text{При } x=0 & \text{при } x=l \\
k_{xx}^{*0} u_i^*(0) - \sigma_{xi}(0) = k_{xx}^0 u_{ci}^0 + q_{xxi}^0 & k_{xx}^{*l} u_i^*(l) - \sigma_{xi}(l) = k_{xx}^l u_{ci}^l + q_{xxi}^l \\
k_{xy}^{*0} v_i^*(0) - \tau_{xyi}(0) = k_{xy}^0 v_{ci}^* + q_{xyi}^0 & k_{xy}^{*l} v_i^*(l) - \tau_{xyi}(l) = k_{xy}^l v_{ci}^l + q_{xyi}^l
\end{array}
\tag{6}
$$

Редуковані початкові умови:

$$
\begin{gathered}
u_i^*(x,0) = u_{0i}^*(x), \\
v_i^*(x,0) = v_{0i}^*(x), \\
\frac{du_i^*}{dt}(x,0) = U_i^*(x), \\
\frac{dv_i^*}{dt}(x,0) = V_i^*(x),
\end{gathered}
\tag{7}
$$

тут приймаємо $u^*(x,y,t) = \mu\cdot u(x,y,t)$, $v^*(x,y,t) = \mu\cdot v(x,y,t)$.

Розбиття пластини на m мас і зосередження кожної маси в її центрі призводить до необхідності вибору, як мінімум, $2m+1$ прямих.

Крім цих прямих для підвищення точності можна використовувати ще додаткові проміжні прямі, тоді загальну кількість прямих позначимо N. По координаті x вибирається певна кількість мас за допомогою відповідного розбиття на N_x ділянок. Тоді загальна кількість мас буде $m\cdot N_x$.

Кожна маса в площині має 2 степені вільності, тому що розглядається зосередженою в точці її центра мас. Оскільки по висоті $y_{ц.м.}$ (центр мас) маємо m мас, то по координаті x це необхідно розглядати як одну масу з поздовжньою координатою $x_{ц.м.}$, яка має $2m$ степені вільності, які визначаються вектором переміщень (рис. 1).

$$y_i = \begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_m \\ v_m \end{vmatrix} (x_{ц.м.})\,(i = 1,2,3,...,N_x)\,.$$

Цьому вектору переміщень відповідає діагональна матриця інерції розміром $2m$

$$T = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & m_2 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & m_{2m} \end{bmatrix}$$

Загальна кількість степенів вільності дискретно-континуальної моделі дорівнює $M = 2m \cdot N_x$. Остаточно вектор переміщень, який визначає степені вільності дискретно-континуальної моделі, відповідно, матриця інерції.

$$\vec{Y} = \begin{bmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{y}_3 \\ \vdots \\ \vec{y}_{N_x} \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & T_2 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & T_{N_x} \end{bmatrix}$$

Для обчислення складових елементів матриці впливу Π розроблено наступний алгоритм. Оскільки, δ_{ij} - це переміщення за напрямком i - го степеня вільності від одиничної сили в напрямку j - го степеня вільності. Тобто, якщо y_i - горизонтальне, або вертикальне переміщення, а y_j - горизонтальне переміщення, то в рівняннях (3) об'ємна сила $X(x,y) = \delta(x - x_j)\cdot\delta(y - y_j)$, де (x_j, y_j) - координати центра мас, в якому визначено переміщення y_j, якщо ж y_j - вертикальне переміщення, то $Y(x,y) = \delta(x - x_j)\cdot\delta(y - y_j)$. Тут $\delta(x - x_j)$ - дельта-функція Дірака по змінній x, зосереджена в точці $x = x_j$, аналогічно $\delta(y - y_j)$. Після редукування вихідних статичних рівнянь в одновимірних рівняннях (5) буде $X_i(x) = 1_j^x \cdot \delta(y - y_j)$ або $Y_i(x) = 1_j^y \cdot \delta(y - y_j)$. Тут позначено 1_j^x - одиниця по горизонталі, а 1_j^y - одиниця по вертикалі.

Для остаточного знаходження δ_{ij} необхідно розв'язати систему редукованих рівнянь (5) з відповідним одиничним навантаженням. Найбільш ефективним методом розв'язання цієї граничної задачі є метод С.К.Годунова [3] з застосуванням метода Рунге-Кутта четвертого порядку точності для розв'язання відповідних задач Коші. При інтегруванні рівнянь враховується, що коли в точці у напрямку переміщення y_j прикладене зосереджене навантаження (в даному випадку 1_j^x, або 1_j^y), то графік відповідної узагальненої сили має скачок на 1.

Врахування цього дає змогу знайти δ_{ij} з будь-якою точністю.

Остаточно, процес побудови матриці впливу Π виконується за таким алгоритмом:

1) За допомогою статичних редукованих рівнянь (5) будуються так звані «одиничні стани» - тобто усі компоненти напружено-деформованих станів від одиничної дії для кожного степеня вільності (усі ці компоненти в моментах).

2) Знаходяться відповідні переміщення за напрямком кожного степеня вільності. Оскільки ці переміщення в одиничних станах знайдені у моментах, то робиться перехід до коефіцієнтів за формулами:

$$u^i = g^{ij} u_j ,\ v^i = g^{ij} v_j \tag{8}$$

Коефіцієнти при базисних функціях мають фізичний зміст – це і є справжні переміщення відповідних точок на напрямках. Саме вони дають числа впливу δ_{ij} і складають матрицю впливу.

Аналогічно будується матриця впливу зовнішніх сил B. Якщо навантаження об'ємне, то воно зосереджується в центрах мас ділянок, на які розбита пластина. В цьому випадку $B = \Pi$. Якщо ж навантаження довільне, то матрицю B потрібно будувати окремо.

Необхідно зазначити, що так побудована матриця Π є симетричною та позитивно визначеною, що випливає з загальних теорем теорії пружності [4] та аналітичного (проекційного) способу зниження вимірності вихідних рівнянь.

У результаті описаних дій отримаємо наступну задачу:

$$\Pi T \frac{d^2\vec{Y}}{dt^2} + \vec{Y} = B\vec{P}(t) \tag{9}$$

$$\text{при } t = 0 \begin{cases} \vec{Y}(0) = \vec{Y}_0 \\ \dfrac{d\vec{Y}}{dt}(0) = \vec{V}_0 \end{cases} \tag{10}$$

Розглянемо алгоритм розв'язання всіх задач динаміки

1. Визначення власних частот і форм коливань

Розглядається однорідне рівняння

$$\Pi T \frac{d^2\vec{Y}}{dt^2} + \vec{Y} = \vec{0} \tag{11}$$

Оскільки матриця T позитивно визначена, то

$$\sqrt{T}=\begin{bmatrix}\sqrt{m} & 0 & \vdots & 0\\ 0 & \sqrt{m} & \vdots & 0\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 0 & 0 & \vdots & \sqrt{m}\end{bmatrix} \text{ та } (\sqrt{T})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & \vdots & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & \vdots & 0\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{\sqrt{m}}\end{bmatrix}$$

Рівняння (11) перетворимо до вигляду:

$\sqrt{T}\Pi\sqrt{T}\dfrac{d^2\vec{Y}^*}{dt^2}+\vec{Y}^*=\vec{0}$, де позначено: $\vec{Y}^*(t)=\sqrt{T}\cdot\vec{Y}(t)$, проведемо заміну $\sqrt{T}\Pi\sqrt{T}=\Pi^*$,

$$\text{або } \Pi^*\frac{d^2\vec{Y}^*}{dt^2}+\vec{Y}^*=\vec{0} \tag{12}$$

Слід зазначити, що матриця $\Pi^*=\sqrt{T}\Pi\sqrt{T}$ є також симетричною та позитивно визначеною. Будемо шукати розв'язок рівняння (12) у вигляді:

$$\vec{Y}^*(t)=\vec{Y}_0^*(t)\sin(\omega t+\varphi) \tag{13}$$

Після підстановки (13) до рівняння (12) отримаємо задачу на власні значення для матриці Π^*: $(\Pi^*-\lambda E)\vec{Y}_0=\vec{0}$, де $\lambda=\dfrac{1}{\omega^2}$. Ця задача розв'язується стандартною програмою EIGEN [5]. За допомогою даної програми знаходяться власні числа λ і відповідно частоти власних коливань ω та власні вектори $\vec{Y}_0^*(t)$.

2. *Вимушені коливання пластини*

Розглядається неоднорідне рівняння

$\Pi T\dfrac{d^2\vec{Y}}{dt^2}+\vec{Y}=B\vec{P}(t)$, де $\vec{P}(t)=\vec{P}_0\sin\theta t$, тут θ - частота змушуючих сил. Перетворимо рівняння до вигляду:

$$\Pi^*\frac{d^2\vec{Y}^*}{dt^2}+\vec{Y}^*=B^*\vec{P}_0\sin\theta t, \tag{14}$$

тут $B^*=\sqrt{T}B$.

Будемо шукати розв'язок (14) у вигляді $\vec{Y}^*(t)=\vec{Y}_0\sin\theta t$.

Після підстановки до (14) отримаємо

$$(E-\theta^2\Pi^*)\vec{Y}_0^*=B^*\vec{P}_0, \tag{15}$$

$$\text{або } \vec{Y}_0^* = (E - \theta^2 \Pi^*)^{-1} B^* \vec{P}_0, \tag{16}$$

що дозволяє знайти за допомогою одиничних станів максимальні значення компонент напружено-деформованого стану.

3. *Нестаціонарні коливання товстої пластини*

Розглядається задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\Pi^* \frac{d^2\vec{Y}^*}{dt^2} + \vec{Y}^* = B^* \vec{P}(t) \tag{17}$$

$$t = 0 \begin{cases} \vec{Y}^*(0) = \sqrt{T}\vec{Y}_0 \\ \dfrac{d\vec{Y}^*}{dt}(0) = \sqrt{T}\vec{V}_0 \end{cases} \tag{18}$$

Оскільки Π^* - симетрична та позитивно визначена матриця, то однозначно визначена її матриця ортонормованих власних векторів $S = [\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, ..., \vec{V}_M\ ]$, де стовпчик матриці S - нормовані власні вектори. Ця матриця є ортогональною матрицею і її обертання співпадає з транспонованою $S^{-1} = S^T$. Перетворимо систему (17), (18) на наступну:

$$S^T \cdot \Pi^* \cdot S \cdot S^T \frac{d^2\vec{Y}^*}{dt^2} + S^T \cdot \vec{Y}^* = S^T B^* \vec{P}(t) \tag{19}$$

$$t = 0 \begin{cases} S^T\vec{Y}^*(0) = S^T\sqrt{T}\vec{Y}_0 \\ S^T\dfrac{d\vec{Y}^*}{dt}(0) = S^T\sqrt{T}\vec{V}_0 \end{cases}, \text{ або} \tag{20}$$

$$\Lambda \frac{d^2\vec{Y}^{**}}{dt^2} + \vec{Y}^{**} = B^{**}\vec{P}(t) \tag{21}$$

$$t = 0 \begin{cases} \vec{Y}^{**}(0) = \vec{Y}_0^{**} \\ \dfrac{d\vec{Y}^{**}}{dt}(0) = \vec{V}_0^{**} \end{cases}, \tag{22}$$

де позначено $\Lambda = S^T \Pi^* S$, $\vec{Y}^{**} = S^T\vec{Y}^*$, $B^{**} = S^T B^*$, $\vec{Y}_0^{**} = S^T\sqrt{T}\vec{Y}_0$, $\vec{V}_0^{**} = S^T\sqrt{T}\vec{V}_0$.

Тут матриця Λ діагональна, що розбиває систему (21) на окремі рівняння:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_M \end{bmatrix},$$

$$\lambda_i \frac{d^2 y_i^{**}}{dt^2} + y_i^{**} = b_{ij}^{**} P_j(t) \quad (i,\ j = 1, 2, 3, ..., M) \tag{23}$$

$$t = 0 \quad \begin{cases} y_i^{**}(0) = y_{0i}^{**} \\ \dot{y}_i(0) = v_{0i}^{**} \end{cases} \tag{24}$$

Розв’язуючи M окремих задач Коші та повертаючись до попередніх змінних $\vec{Y}^* = S\vec{Y}^{**}$ $\vec{Y} = (\sqrt{T})^{-1}\vec{Y}^*$, знаходимо компоненти напружено-деформованого стану в будь-який момент часу.

Дискретно-континуальна модель має високу точність та може бути застосована для розв’язання тривимірних динамічних задач, розрахунку композитних матеріалів на динамічні впливи. Метод “прямих” у комбінації з проекційним методом дає можливість перейти до одновимірної задачі із збереженням достатньої точності і може бути застосований як альтернатива методу скінченних елементів.

Література

1. Станкевич А. М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 36 – К.: КНУБА, 2010 – С. 413-423.
2. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В. Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 46 – К.: КНУБА, 2013. – С. 613-624.
3. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – т.16 – вып.3. – С.171-174.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Изд. «Наука», 1966. – 709 с.
5. Форсайд Дж., Малькольм М., Моулер К. Машынные методы математических вичислений. – М.: Изд. «Мир», 1980. – 280 с.

6. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т. Метод прямих у просторовій задачі теорії пружності // Науково-технічний збірник «Опір матеріалів і теорія споруд» - 2011. – випуск №86 - С. 109-117.
7. Станкевич А.М., Левківський Д.В. Три варіанти редукції рівнянь плоскої задачі теорії пружності методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 49. – К.: КНУБА, 2013 – С. 509-521.

Аннотация

В данной работе рассматривается дискретно-континуальная модель динамического расчета толстых пластин, построенная на основе метода сил. Понижение размерности выполняется методом "прямых" в сочетании с методом Бубнова-Галеркина-Петрова. Для численной реализации и формирования матрицы влияния используется дискретная ортогонализации С.К. Годунова, собственные числа и векторы матриц определяются методом Якоби.

Abstract

In this paper we consider discrete-continuous model of dynamic analysis of thick plates, built on the basis of strength. Reducing dimension is performed by the "direct" in conjunction with the Bubnov-Galerkin-Petrov. For the numerical implementation and the formation of matrix of discrete orthogonalization S.K.Hodunova used, the eigenvalues of matrices and vectors are defined by Jacobi.