УДК 539.3:589.03:589.04:624.04
А.М.Станкевич, Л.Т.Шкельов
Київський національний університет будівництва і архітектури.

ВИЗНАЧЕННЯ НДС ПРОСТОРОВОГО ТІЛА МЕТОДОМ „ПРЯМИХ”

В роботі викладено методику визначення напружено-деформованого стану просторового пружного тіла, яка будується на застосуванні методу прямих. В якості невідомих прийнято компоненти вектора переміщень. За умови дискретизації у двох напрямах, тримірна задача зводиться до одномірної. Прийнята періодичність зміни невідомих у напрямах дискретизації дозволяє отримати таку матрицю диференціальних рівнянь, для якої знаходиться точне аналітичне рішення.

A. Stankevich, L. Shkelev. On application of the method of lines for the evaluation of the mode of spatially elastic body deformation. *The work sets out the based on application of the method of lines method of evaluation of the mode of spatially elastic body deformation. Three components of the displacement vector are taken up as the unknown quantities. With the assumption of the bidirectional discretization sampling the three-dimensional problem is reduced to one-dimensional. The periodic behavior of the unknown quantities variation in the lines of discretization aloows to obtain a differential equation matrix, the analytical solution of which can be found.*

У запропонованій роботі викладено методику визначення напружено-деформованого стану пружного просторового тіла, яке має форму паралелепіпеда. В якості розв’язуючих функцій прийняті складові вектора переміщень, які паралельні координатним осям $U_x(x,y,z)$, $U_y(x,y,z)$, $U_z(x,y,z)$. Вони є невідомими функціями трьох змінних. Для розв’язку задачі застосовується метод прямих, при використанні якого необхідно провести дискретизацію шуканих функцій. Дискретизацію проводимо за напрямками вздовж осі OY та OZ.

У напрямку вздовж осі OX зберігається безперервність невідомих функцій. Внаслідок виконання дискретизації здійснюється перехід від трьох шуканих функцій, кожна з яких залежить від трьох змінних, до системи функцій однієї змінної x. Загальна кількість рівнянь дорівнює $3 \times n \times m$, де n та m - кількість точок дискретизації у напрямку осі OY та OZ, відповідно. Система апроксимуючих функцій однієї змінної визначається вздовж прямих, які паралельні осі OX. Прямі проведено крізь вузлові точки сітки дискретизації. Об'єднаємо функції у три блочні вектори $\overline{U}_x$, $\overline{U}_y$, $\overline{U}_z$, кожний з яких складається з n блоків розміром m. У блок входять функції, які відповідають точкам сітки, розташованих на лініях, паралельних осі OZ.

$$\overline{U} = \begin{vmatrix} (\overline{U})_1 \\ \vdots \\ (\overline{U})_i \\ \vdots \\ (\overline{U})_n \end{vmatrix}; \quad (\overline{U})_i = \begin{vmatrix} U_{i1'} \\ \vdots \\ U_{ik'} \\ \vdots \\ U_{im'} \end{vmatrix} . \qquad (1)$$

Система рівнянь рівноваги в переміщеннях для просторового тіла має вигляд:

$$\left(\mu_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot U_x + \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} + \left(\mu_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot U_y + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y \partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y \partial z} + \left(\mu_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot U_z = 0.$$

Тут позначено:

$\mu_1 = 2(1-\mu)$, $\mu_2 = (1-2\mu)$, де μ - коефіцієнт Пуассона.

Запишемо цю систему з врахуванням прийнятого характеру апроксимації. У цьому випадку потрібно, як відомо, безперервні похідні замінити кінцево-різницевими співвідношеннями. Кінцево-різницеві співвідношення містять значення функцій, які відповідають одному ряду позаконтурних точок дискретизації.

Припущення, що шукані функції у напрямку осей OY та OZ мають періодичний характер зміни, дозволяє встановити залежності між позаконтурними функціями та функціями у точках на контурі тіла.

Вказані залежності враховуються при складанні кінцево-різницевих виразів. Враховуючи це, система рівнянь набуває такого вигляду:

$$\left[\mu_1(E_n(E_m))\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\mu_2}{\Delta_y^2}(C_n(E_m))+\frac{\mu_2}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right]\cdot\bar{U}_x+\frac{1}{\Delta_y}(A_n(E_m))\frac{d\bar{U}_y}{dx}+$$
$$+\frac{1}{\Delta_z}(E_n(A_m))\frac{d\bar{U}_z}{dx}=0 \quad ,$$

$$\frac{1}{\Delta_y}(B_n(E_m))\frac{d\bar{U}_x}{dx}+\left[\mu_2(E_n(E_m))\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\mu_1}{\Delta_y^2}(C_n(E_m))+\frac{\mu_2}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right]\cdot\bar{U}_y+ \tag{3}$$
$$+\frac{1}{\Delta_y\Delta_z}(B_n(A_m))\cdot\bar{U}_z=0,$$

$$\frac{1}{\Delta_z}(E_n(B_m))\frac{d\bar{U}_x}{dx}+\frac{1}{\Delta_y\Delta_z}(A_n(B_m))\cdot\bar{U}_y+$$
$$+\left[\mu_2(E_n(E_m))\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\mu_2}{\Delta_y^2}(C_n(E_m))+\frac{\mu_1}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right]\cdot\bar{U}_z=0.$$

Матриці, які входять до рівнянь цієї системи, мають блочну структуру та є матрицями кінцево-різницевого диференціювання. Вони базуються на чотирьох типах матриць.

Одинична матриця E_k :

$$E_k = \underbrace{\left|\begin{matrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{matrix}\right|}_{k} \left.\vphantom{\begin{matrix} 1\\1\\ \ddots\\1\\1\end{matrix}}\right\} k$$

Індекс вказує на розмірність матриць. Множення на матриці A_k та B_k відповідає однократному кінцево-різницевому диференціюванню. У випадку множення на матрицю A_k визначаються похідні у правих різницях, відповідно, множення на матрицю B_k дає результат у лівих різницях. Структура матриць A_k та B_k має вигляд:

$$A_k = \underbrace{\left|\begin{matrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \\ 1 & & & & -1 \end{matrix}\right|}_{k} \left.\vphantom{\begin{matrix} 1\\1\\ \ddots\\1\\1\end{matrix}}\right\} k \qquad B_k = \underbrace{\left|\begin{matrix} 1 & & & & -1 \\ -1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & -1 & 1 \end{matrix}\right|}_{k} \left.\vphantom{\begin{matrix} 1\\1\\ \ddots\\1\\1\end{matrix}}\right\} k$$

Множення на матрицю C еквівалентно подвійному диференціюванню по одній змінній. При цьому похідна визначається у центральних різницях.

$$C_k = A_k \cdot B_k = B_k \cdot A_k = \underbrace{\left|\begin{matrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & 1 & -2 \end{matrix}\right|}_{k} \left.\vphantom{\begin{matrix} 1\\1\\ \ddots\\1\\1\end{matrix}}\right\} k$$

Структуру блочних матриць розглянемо на прикладі матриці $(B_n(A_m))$, яка має вигляд:

$$(B_n(A_m)) = \left. \underbrace{\begin{vmatrix} (A_m) & & & & -(A_m) \\ -(A_m) & (A_m) & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -(A_m) & (A_m) & \\ & & & -(A_m) & (A_m) \end{vmatrix}}_{n} \right\} n$$

Загальний вигляд блочної матриці відповідає матриці B_n , але елементами цієї матриці є блоки, які відповідають матриці A_m.

Множення на матрицю $(B_n(A_m))$ відповідає змішаній похідній. Інші блочні матриці мають такий самий принцип побудови.

Рівняння (3) це система звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Кількість рівнянь дорівнює $3 \cdot n \cdot m$. Для розв'язання системи використовуємо операторний метод. Похідні по змінній x визначаються як добуток функції на відповідну ступінь оператора диференціювання s з додаванням початкових значень функції та її похідних. Як приклад, розглянемо вигляд другої похідної:

$$\frac{d^2\overline{U}}{dx^2} = s^2 \cdot \overline{U} - s \cdot \overline{U}_0 - \overline{U}_0 \cdot$$

Враховуючи це співвідношення у системі (3), отримаємо наступне:

$$\left[\mu_1 s^2 (E_n(E_m)) + \frac{\mu_2}{\Delta_y^2}(C_n(E_m)) + \frac{\mu_2}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right] \cdot \overline{U}_x + \frac{s}{\Delta_y}(A_n(E_m)) \cdot \overline{U}_y +$$

$$+ \frac{s}{\Delta_z}(E_n(A_m)) \cdot \overline{U}_z = \overline{P}_x,$$

$$\frac{s}{\Delta_y}(B_n(E_m))\cdot\overline{U}_x+\left[\mu_2 s^2(E_n(E_m))+\frac{\mu_1}{\Delta_y^2}(C_n(E_m))+\frac{\mu_2}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right]\cdot\overline{U}_y+ \quad (4)$$

$$+\frac{1}{\Delta_y\Delta_z}(B_n(A_m))\cdot\overline{U}_z=\overline{P}_y,$$

$$\frac{s}{\Delta_z}(E_n(B_m))\cdot\overline{U}_x+\frac{1}{\Delta_y\Delta_z}(A_n(B_m))\cdot\overline{U}_y+$$

$$+\left[\mu_2 s^2(E_n(E_m))+\frac{\mu_2}{\Delta_y^2}(C_n(E_m))+\frac{\mu_1}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right]\cdot\overline{U}_z=\overline{P}_z.$$

Праві частини отриманих рівнянь мають наступний вигляд:

$$\overline{P}_x=\mu_1 s(E_n(E_m))\cdot\overline{U}_{x0}+\mu_1(E_n(E_m))\cdot\overline{U}'_{x0}+\frac{1}{\Delta_y}(A_n(E_m))\cdot\overline{U}_y+\frac{1}{\Delta_z}(E_n(A_m))\cdot\overline{U}_{z0},$$

$$\overline{P}_y=\frac{1}{\Delta_y}(B_n(E_m))\cdot\overline{U}_{x0}+\mu_2 s(E_n(E_m))\cdot\overline{U}_{y0}+\mu_2(E_n(E_m))\cdot\overline{U}'_{y0}, \quad (5)$$

$$\overline{P}_z=\frac{1}{\Delta_z}(E_n(B_m))\cdot\overline{U}_{x0}+\mu_2 s(E_n(E_m))\cdot\overline{U}_{z0}+\mu_2(E_n(E_m))\cdot\overline{U}'_{z0}.$$

Введемо позначення:

$$(C_x)=\left[\mu_1 s^2(E_n(E_m))+\frac{\mu_2}{\Delta_y^2}(C_n(E_m))+\frac{\mu_2}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right],$$

$$(C_y)=\left[\mu_2 s^2(E_n(E_m))+\frac{\mu_1}{\Delta_y^2}(C_n(E_m))+\frac{\mu_2}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right], \quad (6)$$

$$(C_z)=\left[\mu_2 s^2(E_n(E_m))+\frac{\mu_2}{\Delta_y^2}(C_n(E_m))+\frac{\mu_1}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right].$$

Усі матриці (C_x), (C_y), (C_z) мають однакову блочну структуру та відрізняються лише розташуванням коефіцієнтів μ_1 та μ_2.

З врахуванням прийнятих позначень, система (4) набуває вигляду:

$$(C_x)\cdot\overline{U}_x+\frac{s}{\Delta_y}(A_n(E_m))\cdot\overline{U}_y+\frac{s}{\Delta_z}(E_n(A_m))\cdot\overline{U}_z=\overline{P}_x\ ,$$

$$\frac{s}{\Delta_y}(B_n(E_m))\cdot\overline{U}_x+(C_y)\cdot\overline{U}_y+\frac{1}{\Delta_y\Delta_z}(B_n(A_m))\cdot\overline{U}_z=\overline{P}_y\ , \quad (7)$$

$$\frac{s}{\Delta_z}(E_n(B_m))\cdot\overline{U}_x+\frac{1}{\Delta_y\Delta_z}(A_n(B_m))\cdot\overline{U}_y+(C_z)\cdot\overline{U}_z=\overline{P}_z\ .$$

Звернемо увагу на деякі властивості матриць A та B , їх добуток дорівнює матриці C, тобто $A\cdot B=B\cdot A=C$. Доведення цього наведено у роботі [1].

Матрицю C можна представити у вигляді добутку трьох матриць, елементи яких дорівнюють власним числам та власним векторам матриці C.

$$C=V\cdot\{\lambda_i\}\cdot V\ . \qquad (8)$$

Елементи квадратної матриці V дорівнюють компонентам власних векторів матриці C та визначаються за формулою:

$V_{ij}=\frac{\sqrt{n}}{n}\left(\sin\frac{2ij\pi}{n}+\cos\frac{2ij\pi}{n}\right)$, де n розмірність матриць C та V . (9)

Елементи діагональної матриці $\{\lambda_i\}$ розмірністю $n\times n$ дорівнюють власним числам матриці C та визначаються за формулою:

$$\lambda_i=2\left(1-\cos\frac{2i\pi}{n}\right)=4\sin^2\frac{i\pi}{n}\cdot \qquad (10)$$

Наведемо ще одну важливу залежність:

$$V\cdot V=E\ . \qquad (11)$$

Наведені вище залежності можна отримати для блочних матриць, які входять у систему рівнянь (4). Неважко довести, що

$$\frac{1}{\Delta_y^2}(C_n(E_m)) = \frac{1}{\Delta_y^2}((V_{it})_{jk} \cdot V_{jk})\{\{\lambda\}_k\}((V_{it})_{jk} \cdot V_{jk})$$
$$\frac{1}{\Delta_z^2}(E_n(C_m)) = \frac{1}{\Delta_z^2}((V_{it})_{jk} \cdot V_{jk})\{\{\lambda_i\}\}((V_{it})_{jk} \cdot V_{jk}) \qquad (12)$$

Наведемо вигляд блочних матриць, які входять у вираз (12).

$$((V_{it})_{jk} \cdot V_{jk}) = \begin{vmatrix} (V_{it})_{11} \cdot V_{11} & (V_{it})_{12} \cdot V_{12} & \cdots \cdots & (V_{it})_{1n} \cdot V_{1n} \\ (V_{it})_{21} \cdot V_{21} & (V_{it})_{22} \cdot V_{22} & \cdots \cdots & (V_{it})_{2n} \cdot V_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \cdots & \cdots \\ (V_{it})_{n1} \cdot V_{n1} & (V_{it})_{n2} \cdot V_{n2} & \cdots \cdots & (V_{it})_{nn} \cdot V_{nn} \end{vmatrix}.$$

Блоки $(V_{it})_{jk}$ не змінюються при зміні індексів jk. Елементи цих блоків дорівнюють компонентам власних векторів матриці C розмірами $m \times m$. Від значень індексів jk залежить множник V_{jk} на який множимо усі елементи блоку $(V_{it})_{jk}$. Значення множників V_{jk} дорівнюють елементам власних векторів матриці C розміром $n \times n$. Вище було наведено формулу (9) для визначення компонентів власних векторів матриці C. Враховуючи це, запишемо:

$$V_{it} = \frac{\sqrt{m}}{m}\left(\sin\frac{2it\pi}{m} + \cos\frac{2it\pi}{m}\right),$$
$$V_{jk} = \frac{\sqrt{n}}{n}\left(\sin\frac{2jk\pi}{n} + \cos\frac{2jk\pi}{n}\right). \qquad (13)$$

Отже, елементи матриці $(V_{it})_{jk} \cdot V_{jk})$ можна визначити за формулою:

$$V_{itjk} = V_{it} \cdot V_{jk} = \frac{\sqrt{m}}{m} \cdot \frac{\sqrt{n}}{n}\left(\sin\frac{2it\pi}{m} + \cos\frac{2it\pi}{m}\right)\left(\sin\frac{2jk\pi}{n} + \cos\frac{2jk\pi}{n}\right) \quad (14)$$

При цьому необхідно зауважити, що індекси i та t змінюються у межах блоку $(V_{it})_{jk}$ та набувають значень від 1 до

m .Індекси j та k змінюються при переході від блоку до блоку та набувають значень від 1 до n . Введемо скорочене позначення:

$$((V_{it})_{jk} \cdot V_{jk}) = ((V_{it})_{jk}) \ . \qquad (15)$$

Підкреслимо дуже важливу властивість цієї матриці.

$$((V_{it})_{jk}) \cdot ((V_{it})_{jk}) = (E_n(E_m)) \ . \qquad (16)$$

Діагональні матриці $\{\{\lambda\}_k\}$ та $\{\{\lambda_i\}\}$ мають такий вигляд:

$$\{\{\lambda\}_k\} = \begin{vmatrix} \{\lambda\}_1 & & & \\ & \{\lambda\}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \{\lambda\}_n \end{vmatrix}, \ \{\lambda\}_k = \left.\underbrace{\begin{vmatrix} \lambda_k & & & \\ & \lambda_k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{vmatrix}}_{m}\right\} m$$

$$\{\{\lambda_i\}\} = \left.\underbrace{\begin{vmatrix} \{\lambda_i\} & & & \\ & \{\lambda_i\} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \{\lambda_i\} \end{vmatrix}}_{n}\right\} n \qquad \{\lambda_i\} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{vmatrix}$$

.

Елементи цих матриць являють собою власні числа матриць C розмірністю $n \times n$ та $m \times m$ і визначаються за формулами:

$$\lambda_k = 4\sin^2 \frac{k\pi}{n}, \qquad (17)$$
$$\lambda_i = 4\sin^2 \frac{i\pi}{m}.$$

Для подальших перетворювань введемо такі позначення:

$$\frac{1}{\Delta_y^2}\lambda_k = -\alpha_k^2, \qquad \frac{1}{\Delta_z^2}\lambda_i = -\beta_i^2, \qquad \alpha_k^2 + \beta_i^2 = \gamma_{ik}^2. \qquad (18)$$

Враховуючи введені позначення (12) та (16), отримуємо:

$$\frac{1}{\Delta_y^2}(C_n(E_m)) = -((V_{it})_{jk})\{\{\lambda^2\}_k\}((V_{it})_{jk}) \ ,$$

$$\frac{1}{\Delta_z^2}(E_n(C_m)) = -((V_{it})_{jk})\{\{\beta_i^2\}\}((V_{it})_{jk}) \ , \qquad (19)$$

$$(E_n(E_m)) = ((V_{it})_{jk}) \cdot ((V_{it})_{jk}) \ .$$

Після врахування цих виразів у рівняннях (6), знайдемо:

$$(C_x) = ((V_{it})_{jk})\{\{\lambda_{xi}^2\}_k\}((V_{it})_{jk}) \ ,$$

$$(C_y) = ((V_{it})_{jk})\{\{\lambda_{yi}^2\}_k\}((V_{it})_{jk}) \ , \qquad (20)$$

$$(C_z) = ((V_{it})_{jk})\{\{\lambda_{zi}^2\}_k\}((V_{it})_{jk}) \ .$$

Компоненти діагональних матриць у цих формулах мають вигляд:

$\lambda_{xik}^2 = \mu_1(s^2 - \gamma_{ik}^2) + \gamma_{ik}^2$, $\lambda_{yik}^2 = \mu_2(s^2 - \gamma_{ik}^2) - \alpha_k^2$,

$\lambda_{zik}^2 = \mu_2(s^2 - \gamma_{ik}^2) - \beta_k^2$. (21) Враховуючи усі перетворення, розв"язок системи рівнянь (7) запишемо у вигляді:

$$\overline{U}_x = D^{-1} \cdot \overline{R}_x, \ \overline{U}_y = D^{-1} \cdot \overline{R}_y, \ \overline{U}_z = D^{-1} \cdot \overline{R}_z . \qquad (22)$$

Матриця D у цих виразах – це визначник системи рівнянь (7).

$$D = \begin{vmatrix} (C_x); & \frac{s}{\Delta_y}(A_n(E_m)); & \frac{s}{\Delta_z}(E_n(A_m)); \\ \frac{s}{\Delta_y}(B_n(E_m)); & (C_y); & \frac{1}{\Delta_y\Delta_z}(B_n(A_m)); \\ \frac{s}{\Delta_z}(E_n(B_m)); & \frac{1}{\Delta_y\Delta_z}(A_n(B_m)); & (C_z); \end{vmatrix} .$$

У розгорнутому вигляді маємо такий вираз:

$$D=(C_x)(C_y)(C_z)+\frac{s^2}{\Delta_y^2\Delta_z^2}(A_n(E_m))(E_n(B_m))(B_n(A_m))+$$

$$+\frac{s^2}{\Delta_y^2\Delta_z^2}(E_n(A_m))(B_n(E_m))(A_n(B_m))-\frac{s^2}{\Delta_z^2}(C_y)(E_n(A_m))(E_n(B_m))-$$

$$-\frac{1}{\Delta_y^2\Delta_z^2}(C_x)(B_n(A_m))(A_n(B_m))-\frac{s^2}{\Delta_y^2}(C_z)(B_n(E_m))(A_n(E_m)).$$

У наслідку перетворень отримуємо такі співвідношення:

$$(C_x)(C_y)(C_z)=((V_{it})_{jk})\{\{\lambda_{xi}^2\}_k\{\lambda_{yi}^2\}_k\{\lambda_{zi}^2\}_k\}((V_{it})_{jk});$$

$$\frac{1}{\Delta_y^2\Delta_z^2}(A_n(E_m))(E_n(B_m))(B_n(A_m))=((V_{it})_{jk})\{\{\alpha_k^2\}_k\{\beta_i^2\}\}((V_{it})_{jk});$$

$$\frac{1}{\Delta_y^2\Delta_z^2}(E_n(A_m))(B_n(E_m))(A_n(B_m))=((V_{it})_{jk})\{\{\alpha_k^2\}_k\{\beta_i^2\}\}((V_{it})_{jk});$$

$$\frac{1}{\Delta_z^2}(C_y)(E_n(A_m))(E_n(B_m))=-((V_{it})_{jk})\{\{\lambda_{yi}^2\}_k\{\beta_i^2\}\}((V_{it})_{jk});$$

$$\frac{1}{\Delta_y^2\Delta_z^2}(C_x)(B_n(A_m))(A_n(B_m))=-((V_{it})_{jk})\{\{\lambda_{xi}^2\}_k\{\beta_i^2\}\{\alpha^2\}_k\}((V_{it})_{jk});$$

$$\frac{1}{\Delta_y^2}(C_z)(B_n(E_m))(A_n(E_m))=-((V_{it})_{jk})\{\{\lambda_{zi}^2\}_k\{\alpha^2\}_k\}((V_{it})_{jk}).$$

Підставимо отримані вирази у матрицю D .

$$D=((V_{it})_{jk})\{\{\lambda_{xi}^2\}_k\{\lambda_{yi}^2\}_k\{\lambda_{zi}^2\}_k+2s^2\{\beta_i^2\}\{\alpha^2\}_k+s^2\{\lambda_{yi}^2\}_k\{\beta_i^2\}+$$
$$+s^2\{\lambda_{zi}^2\}_k\{\alpha^2\}_k-\{\lambda_{xi}^2\}_k\{\alpha^2\}_k\{\beta_i^2\}\}((V_{it})_{jk}).$$

Враховуючи співвідношення (21), в кінцевому результаті маємо:

$$D=((V_{it})_{jk})\{(s^2-\gamma_{ik}^2)^3\}((V_{it})_{jk}).$$

Зворотну матрицю D^{-1} визначимо беручи до уваги рівність (16).

$$D^{-1} = ((V_{it})_{jk})\left\{\frac{1}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^3}\right\}((V_{it})_{jk}). \qquad (23)$$

Вектори $\overline{R}_x$, $\overline{R}_y$, $\overline{R}_z$, які входять у вираз (22), знаходимо, виконуючи заміну в матриці D. Відповідно перший, другий та третій стовпчики замінюємо векторами правих частин системи (7). При цьому враховуємо співвідношення (5).

Не зупиняючись на виконаних перетвореннях, запишемо остаточний операторний вираз шуканої функції $\overline{U}_x$, враховуючи, що матриця D^{-1} прийнята відповідно виразу (23).

$$\overline{U}_x = \frac{1}{\mu_1}((V_{it})_{jk})\left\{\frac{s[\mu_1(s^2-\gamma_{ik}^2)-\gamma_{ik}^2]}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2}\right\}((V_{it})_{jk})\cdot\overline{U}_{x0} +$$

$$+\frac{1}{\mu_2}((V_{it})_{jk})\left\{\frac{\mu_2(s^2-\gamma_{ik}^2)-\gamma_{ik}^2}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2}\right\}((V_{it})_{jk})\cdot\overline{U}'_{x0} -$$

$$-\frac{1}{\mu_2}\cdot\frac{1}{\Delta_y}(A_n(E_m))((V_{it})_{jk})\left\{\frac{\gamma_{ik}^2}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2}\right\}((V_{it})_{jk})\cdot\overline{U}_{y0} -$$

$$-\frac{1}{\mu_1}\cdot\frac{1}{\Delta_y}(A_n(E_m))((V_{it})_{jk})\left\{\frac{s}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2}\right\}((V_{it})_{jk})\cdot\overline{U}'_{y0} -$$

$$-\frac{1}{\mu_2}\cdot\frac{1}{\Delta_z}(E_n(A_m))((V_{it})_{jk})\left\{\frac{\gamma_{ik}^2}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2}\right\}((V_{it})_{jk})\cdot\overline{U}_{z0} -$$

$$-\frac{1}{\mu_1}\cdot\frac{1}{\Delta_z}(E_n(A_m))((V_{it})_{jk})\left\{\frac{s}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2}\right\}((V_{it})_{jk})\cdot\overline{U}'_{z0} \; ;$$

Відомо, що кожному операторному виразу відповідає певний функціональний аналог [2]. Наведемо ці співвідношення:

$$\frac{1}{s^2-\gamma_{ik}^2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\gamma_{ik}} sh\gamma_{ik}x \;,$$

$$\frac{s}{s^2-\gamma_{ik}^2} \;\Rightarrow\; ch\gamma_{ik}x \;,$$

$$\frac{1}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2} \Rightarrow \frac{1}{2\gamma_{ik}^3}(x\gamma_{ik}ch\gamma_{ik}x - sh\gamma_{ik}x) ,$$

$$\frac{s}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2} \Rightarrow \frac{1}{2\gamma_{ik}^2}(x\gamma_{ik}sh\gamma_{ik}x) , \qquad (25)$$

$$\frac{s^2}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2} \Rightarrow \frac{1}{2\gamma_{ik}}(x\gamma_{ik}ch\gamma_{ik}x + sh\gamma_{ik}x) ,$$

$$\frac{s^3}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2} \Rightarrow \frac{1}{2}(x\gamma_{ik}sh\gamma_{ik}x + 2ch\gamma_{ik}x) \cdot$$

Операторні вирази у рівняннях (24) позначимо, відповідно f_x, f_y, f_z. Матрицю $((V_{it})_{jk})$ для скорочення запису позначимо $\widetilde{V}$. З урахуванням цих позначень, у рівняннях (24) $\overline{U}_x$ набуде вигляду:

$$\overline{U}_x = \frac{1}{\mu_1}\cdot\widetilde{V}\{f_{x1}\}\widetilde{V}\cdot\overline{U}_{x0} + \frac{1}{\mu_2}\cdot\widetilde{V}\{f_{x2}\}\widetilde{V}\cdot\overline{U}'_{x0} - \frac{1}{\mu_2\Delta_y}(A_n(E_m))\widetilde{V}\{f_{x3}\}\widetilde{V}\cdot\overline{U}_{y0} -$$
$$-\frac{1}{\mu_1\Delta_y}(A_n(E_m))\cdot\widetilde{V}\cdot\{f_{x4}\}\cdot\widetilde{V}\cdot\overline{U}'_{y0} - \frac{1}{\mu_2\Delta_z}(E_n(A_m))\cdot\widetilde{V}\cdot\{f_{x5}\}\cdot\widetilde{V}\cdot\overline{U}_{z0} -$$
$$-\frac{1}{\mu_1\Delta_z}(E_n(A_m))\cdot\widetilde{V}\cdot\{f_{x6}\}\cdot\widetilde{V}\cdot\overline{U}'_{z0} ,$$

Невідомі константи $\overline{U}_{x0}$, $\overline{U}'_{x0}$, …, $\overline{U}'_{z0}$ визначаються з граничних умов на гранях, які перпендикулярні осі OX . Для того, щоб задовольнити граничні умови по інших гранях, необхідно побудувати аналогічне рішення, обираючи напрямок прямих паралельно цим осям.

Висновки

Особливість наведеного у роботі методу полягає у можливості отримання точного аналітичного рішення системи диференціальних рівнянь. Внаслідок чого реалізація задачі зводиться до складання та розв'язку системи граничних рівнянь. Методика розв'язання таких задач достатньо відома.

1. Шкелёв Л.Т., Морсков Ю.А., Романова А.П., Станкевич А.Н. Метод прямых и его использование при определении напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек. – К.: Национальная академия наук Украины, Институт механики им. С.П. Тимошенко, Технический центр, 2002. – 177 с.
2. Микусинский Ян. Операторное исчисление. – М.: Издательство иностранной литературы, 1959. – 366 с.
3. Новожилов В.В. Теория упругости. – Ленинград: Судпромгиз, 1958. – 369 с.
4. Л.Т.Шкелев, А.Н.Станкевич, Д.В.Пошивач, А.Ф.Корбаков Применение метода прямых для определения напряженного и деформированного состояний пространственных и пластинчатых конструктивных элементов. – К.: Киевский национальный университет строительства и архитектуры, 2004. – 136 с.