УДК 539.3
к.т.н. Левківський Д.В., Янсонс М.О.,
Київський національний університет будівництва та архітектури

РОЗРАХУНОК ТОВСТОЇ ПЛАСТИНИ МОДИФІКОВАНИМ МЕТОДОМ ПРЯМИХ

У даній роботі досліджено напружено деформований стан товстої квадратної пластини. Зниження вимірності вихідних рівнянь теорії пружності виконується по двох просторових координатах за допомогою проекційного методу Бубнова-Петрова. У результаті утворюється замкнута система редукованих диференціальних рівнянь першого порядку, яка разом з граничними умовами, розв'язується методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова. Отримані результати були порівняні з відомими розв'язками. Акцент у роботі ставиться на обробку результатів.

Ключові слова: модифікований метод прямих, проекційний метод, метод дискретної ортогоналізації, базисні функції.

Розглянемо товсту квадратну пластину з розмірами $a = h_y = l = 0,25\ м$, Коефіцієнт Пуассона $\upsilon = 0,3$, модуль пружності $E = 2,068 \cdot 10^8\ Па$. На верхню площину пластини діє рівномірно розподілене навантаження $q = 1\ Па$ (рис. 1). Необхідно визначити НДС пластин, товщина яких змінюється в межах від $h_z = 0,025\ м$ до $h_z = 0,125\ м$.

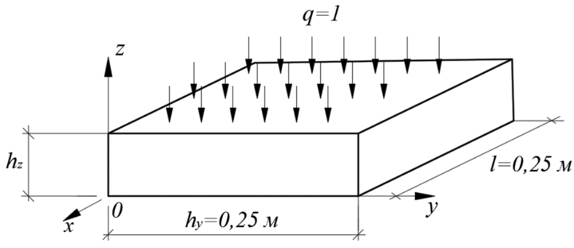

Рис. 1. Розрахункова модель

Для моделювання роботи пластини використовуються диференціальні рівняння теорії пружності без застосування гіпотез теорії пластин.

При зниженні вимірності по координатах y та z невідомі функції визначаються за допомогою лінійної комбінації базисних функцій, використовуючи метод Бубнова-Петрова (1). Для цього пластина в площині

$y0z$ розбивається прямими (рис. 2), на прямих обираються базисні функції окремо по кожній координаті.

$$f(x,y,z) = f^{ik}(x)\cdot\psi_{ik}(y,z) = f^{ik}(x)\cdot\varphi_i(y)\cdot\varphi_k(z),\ i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,m} \qquad (1)$$

У якості базисних функцій застосовуються кубічні сплайни виду:

- $\varphi(y) = 1 - \frac{3}{\Delta^2}y^2 + \frac{2}{\Delta^3}y^3$, $\varphi'(y) = -\frac{6}{\Delta^2}y + \frac{6}{\Delta^3}y^2$, де $y \in (0,\Delta)$ – значення на i-й та $(i+1)$-й прямій;
- $\varphi(y) = \frac{3}{\Delta^2}y^2 + \frac{2}{\Delta^3}y^3$, $\varphi'(y) = \frac{6}{\Delta^2}y - \frac{6}{\Delta^3}y^3$, де $y \in (-\Delta, 0)$ – значення на $(i-1)$-й та i-й прямій.

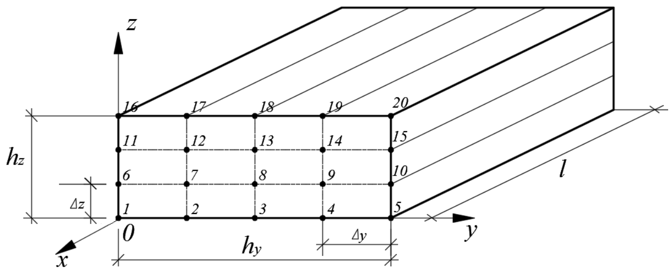

Рис. 2 Розбиття пластини прямими

Процес зниження вимірності детально описано в роботі [1] та [2]. На наступному етапі редукована система рівнянь та граничних умов розв'язується методом дискретної ортогоналізації [3].

Отримані результати були співставленні з даними робіт представлених в [4]. Автори використовують метод Гальоркіна-Петрова з радіальними базисними функціями. Також для контролю задача була розрахована в програмному комплексі NASTRAN.

У таблиці 1 наведені значення прогину посередині пластини при різни умовах закріплення та різній товщині. Позначено S – шарнірне закріплення, C – жорстке защемлення, F – вільний край. Значення прогину подане у вигляді безрозмірної величини $\overline{w} = \dfrac{100 \cdot D \cdot w}{q \cdot a^4}$. Модифікований метод прямих позначено як ММП.

Автори роботи [4] для розрахунку використовували наступні методи: MQMLPG1 – multiquadrics meshless local Petrov–Galerkin method; TPSMLPG – thin plate splines meshless local Petrov–Galerkin method; MLSMLPG1 – moving least square meshless local Petrov–Galerkin method.

Таблиця 1

Безрозмірний прогин в центральній точці квадратної пластини $\overline{w}$

Граничні умови	h_z $(м)$	MQ MLPG1	TPS MLPG1	MLS MLPG1	MLS MLPG5	Kocak	FEM	ММП	NAST RAN
SSSS	0.025	0.4223	0.432	0.422	0.4275	0.42	0.4249	0.425	0.423
	0.05	0.4792	0.4803	0.4798	0.4793	0.478	0.4803	0.486	0.479
	0.075	0.5698	0.5718	0.5717	0.5589	–	0.5710	0.585	0.573
	0.1	0.6952	0.7005	0.6967	0.6807	–	0.6952	0.720	0.723
	0.125	0.8508	0.8542	0.8511	0.8304	–	0.8487	0.888	0.971
						Sriniv as			
CCCC	0.025	0.1457	0.1429	0.1468	0.1476	0.149	0.1486	0.147	0.147
	0.05	0.2089	0.2082	0.2112	0.2103	0.213	0.2124	0.204	0.212
	0.075	0.3092	0.309	0.3119	0.3064	–	0.3129	0.309	0.319
	0.1	0.4434	0.4434	0.447	0.4408	–	0.4471	0.438	0.492
	0.125	0.6079	0.6079	0.6125	0.605	–	0.6114	0.610	0.752

Висновок: Як видно результати модифікованого методу прямих при різній товщині пластини показують високу збіжність з результатами авторів роботи [4]. Значення результатів програмного комплексу NASTRAN, які подані при однаковому кроку розбитті з ММП, відрізняються від інших результатів. Для підвищення збіжності потрібно зменшувати крок. Це збільшує кількість невідомих. Тому можна зробити висновок, що комбіновані чисельно-аналітичні підходи є ефективними при розрахунку обмеженого класу обєктів таких як товсті платини. Дані методи божуть бути використані для подальшого розвитку методу скінченних елементів.

Література:

1. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 36 – К.: КНУБА, 2010 – с. 413 – 423.

2. V. Chybiryakov, A. Stankevich, D. Levkivskiy, V. Melnychuk Application of generalized “method of lines”, for solving problems of thermoelasticity of thick plates. / // An international journal on operation of farm and agri-food industry machinery “Motrol”, vol.16, №8, Lublin 2014. P. 11-20.

3. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Успехи математических наук. – 1961. – т.16 – вып.3. – с.171 - 174.

4. *J. R. Xiao* Analysis of thick plates by using a higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG Methods/ J. R. Xiao, R. C. Batra, D. F. Gilhoole // Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) P. 979-987

Аннотация

В данной работе исследовано напряженно-деформированное состояние толстой квадратной пластины. Понижение размерности исходных уравнений теории упругости выполняется по двум пространственным координатам с помощью проекционного метода Бубнова-Петрова. В результате образуется замкнутая система редуцированных дифференциальных уравнений первого порядка, вместе с граничными условиями, решается методом дискретной ортогонализации С. К. Годунова. Полученные результаты были сравнены с известными решениями. Акцент в работе делается на обработку результатов.

Ключевые слова: модифицированный метод прямых, проекционный метод, метод дискретной ортогонализации, базисные функции.

Abstract

In this work the research stress strain state thick square plate. Reduced initial dimension elasticity equations performed on two spatial coordinates using projection Bubnov-Petrova. The result is a closed system reduced vowels first order differential equations, which together with boundary conditions is solved by discrete orthogonalization SK Godunov. The results were compared with known solutions. The focus of the work concerns the processing of results.

Keyword: modified method of lines, projection method, discrete orthogonalization, basic functions.