

УДК 534-21:537.226.86

Шульга М. О., д-р фіз.-мат. наук,
Григор'єв С.А.**РАДІАЛЬНІ ПРУЖНОЕЛЕКТРИЧНІ НЕСТАЦІОНАРНІ
КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОЇ ПОРОЖНИСТОЇ КУЛІ**

Вступ. Забезпечення надійності і вибір раціональних умов функціонування електромеханічних перетворювачів висуває необхідність сумісного вивчення електричного поля і механічних напружень і деформацій в п'єзоелектричних елементах. Актуальним питанням нестационарної теорії електропружності є реакція порожнистої п'єзокерамічної кулі на динамічне навантаження, в зв'язку з чим важливо дослідити особливості електромеханічного стану кулі при електричних та механічних збуреннях.

Дана робота присвячена побудові чисельного методу розв'язання та аналізу радіальних нестационарних коливань порожнистої п'єзокерамічної поляризованої по товщині кулі при електричних та механічних динамічних збуреннях.

1. Постановка задачі. Розглядається порожниста поляризована по товщині п'єзокерамічна куля з радіусом серединної поверхні R та товщиною стінки $2h$. Коливання кулі описуються рівняннями руху і квазістатичним рівнянням для електричної індукції [3]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}; \quad \frac{\partial D_r}{\partial r} + 2 \frac{D_r}{r} = 0 \quad (1)$$

при матеріальних співвідношеннях

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}^E \frac{\partial u}{\partial r} + 2c_{13}^E \frac{u}{r} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad \sigma_{\alpha\alpha} = c_{13}^E \frac{\partial u}{\partial r} + (c_{11}^E + c_{21}^E) \frac{u}{r} + e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\ D_r &= e_{33} \frac{\partial u}{\partial r} + 2e_{13} \frac{u}{r} - \epsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2)$$

Початкові умови накладаються тільки на переміщення та їх швидкості

$$u(r, 0) = u^0(r); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, t = 0) = u^1(r). \quad (3)$$

Для загальності розв'язку вважаємо, що до зовнішніх електродованих поверхонь сфери прикладається різниця електричного потенціалу та механічна сила. Маємо граничні умови в вигляді:

$$\sigma_{rr}(R \pm h, t) = Q(t); \quad \varphi(R \pm h, t) = \pm V(t). \quad (4)$$

Початково-крайову задачу (1)-(4) зводимо до безрозмірного вигляду за допомогою позначень

$$r = R + x, \quad \bar{x} = \frac{x}{h}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_h}, \quad \bar{u} = \frac{u}{h}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{c_{00}}, \quad \bar{\varphi} = \varphi \sqrt{\frac{\epsilon_{00}}{c_{00}h^2}}, \quad (5)$$

$$\bar{D}_i = \frac{D_i}{\sqrt{c_{00}\epsilon_{00}}}, \quad \bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{00}\epsilon_{00}}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{00}}, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^E}{c_{00}}, \quad \bar{\epsilon}_{ii} = \frac{\epsilon_{ii}^S}{\epsilon_{00}}, \quad \epsilon = \frac{h}{R},$$

де $\rho_{00} = \rho$, $c_{00} = c_{33}^E$, $\epsilon_{00} = \epsilon_{33}^S$, $t_h = h\sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$ – нормуючі величини. Надалі знаки без розмірності опускаються.

Введення параметра кривизни ϵ дозволяє в частинному випадку при $\epsilon = 0$ розглядати коливання плоского п'езокерамічного шару. Раніше коливання плоского п'езокерамічного шару досліджувались в [1, 2].

Маємо систему рівнянь електропружності (1), (2) в безрозмірному вигляді

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{2\epsilon}{1+\epsilon x} (\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial x}; \quad \frac{\partial D_r}{\partial x} + \frac{2\epsilon}{1+\epsilon x} D_r = 0; \quad (6)$$

$$D_r = e_{33} \frac{\partial u}{\partial x} + e_{13} \frac{2\epsilon}{1+\epsilon x} u - \epsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \sigma_{rr} = c_{33} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{13} \frac{2\epsilon}{1+\epsilon x} u + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = c_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + (c_{11} + c_{21}) \frac{\epsilon}{1+\epsilon x} u + e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (7)$$

2. Чисельний метод розв'язання. Для розв'язання початково-крайової задачі (6)(7)(3)(4) будується чисельна схема на основі сіткових апроксимацій і різницевих схем. В інтервалі інтегрування $x \in [-1, 1]$ вводиться розбиття Ω таким чином, що крайні точки розбиття знаходяться на відстані $\Delta_x/2$ від кінців інтервалу:

$$\Omega = \{x_i = (i - n - 0.5)\Delta x; \quad i = 0, 1, \dots, 2n + 1; \quad \Delta x = 1/n\}.$$

Механічні переміщення та електричний потенціал будемо шукати в вузлах розбиття, а механічні напруження і електрична індукція – в

центрах комірок розбиття. Різницева форма рівнянь електропружності (6) записується для внутрішніх точок розбиття і приймає вигляд:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_i} (\sigma_{i+0.5}^{rr} + \sigma_{i-0.5}^{rr} - \sigma_{i+0.5}^{\alpha\alpha} - \sigma_{i-0.5}^{\alpha\alpha}) + \frac{1}{\Delta x} (\sigma_{i+0.5}^{rr} - \sigma_{i-0.5}^{rr}),$$

$$\frac{1}{\Delta x} (D_{i+0.5}^r - D_{i-0.5}^r) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_i} (D_{i+0.5}^r + D_{i-0.5}^r) = 0. \quad (8)$$

Матеріальні співвідношення (7) записуємо в центрах ділянок розбиття:

$$\sigma_{i+0.5}^{rr} = \left(\frac{c_{33}}{\Delta x} + c_{13} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_{i+0.5}} \right) u_{i+1} + \left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_{i+0.5}} - \frac{c_{33}}{\Delta x} \right) u_i + \frac{e_{33}}{\Delta x} (\varphi_{i+1} - \varphi_i);$$

$$\sigma_{i+0.5}^{\alpha\alpha} = \left(\frac{c_{13}}{\Delta x} + \frac{\varepsilon(c_{11} + c_{21})}{2(1 + \varepsilon x_{i+0.5})} \right) u_{i+1} + \left(c_{11} \frac{\varepsilon(c_{11} + c_{21})}{2(1 + \varepsilon x_{i+0.5})} - \frac{c_{13}}{\Delta x} \right) u_i + \frac{e_{13}}{\Delta x} (\varphi_{i+1} - \varphi_i);$$

$$D_{i+0.5}^r = \left(\frac{e_{33}}{\Delta x} + e_{13} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_{i+0.5}} \right) u_{i+1} + \left(e_{13} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_{i+0.5}} - \frac{e_{33}}{\Delta x} \right) u_i - \frac{\varepsilon_{33}}{\Delta x} (\varphi_{i+1} - \varphi_i). \quad (9)$$

Значення переміщень та електричного потенціалу в позаконтурних точках розбиття виключаються з рівнянь за допомогою різницевої форми граничних умов. Отримуємо наступні вирази:

$$\varphi_0 = -\varphi_1 - 2V_0(t); \quad \varphi_{2n+1} = -\varphi_{2n} + 2V_0(t);$$

$$u_0 = - \left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} - \frac{c_{33}}{\Delta x} \right)^{-1} \left(\left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} + \frac{c_{33}}{\Delta x} \right) u_1 + 2e_{33} \frac{\varphi_1 + V_0(t)}{\Delta x} - Q(t) \right);$$

$$u_{2n+1} = - \left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} + \frac{c_{33}}{\Delta x} \right)^{-1} \left(\left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} - \frac{c_{33}}{\Delta x} \right) u_{2n} + 2e_{33} \frac{V_0(t) - \varphi_{2n}}{\Delta x} - Q(t) \right). \quad (10)$$

Розв'язуючи систему рівнянь отримуємо шляхом підстановки в (8) співвідношень (9), (10). Для інтегрування по часу вводимо розбиття ω_t інтервалу часу $t \in [0, T]$ з кроком Δt . Розв'язок шукається за допомогою явної різницевої схеми

$$\ddot{u}^{k+1} = \frac{u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}}{\Delta t^2}, \quad (11)$$

або методом Ньюмарка

$$\ddot{u}^{k+1} = \frac{\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k}{\xi \Delta t} - \frac{1 - \xi}{\xi} \ddot{u}^k; \quad \dot{u}^{k+1} = \frac{u^{k+1} - u^k}{\xi \Delta t} - \frac{1 - \xi}{\xi} \dot{u}^k, \quad (12)$$

де ξ – параметр схеми.

При застосуванні схеми Ньюмарка (12) на кожному кроці по часу всі шукані величини знаходяться одночасно з системи алгебраїчних рівнянь $M \cdot U^{k+1} = F^{k+1}$. При застосуванні явної схеми (11) на $k+1$ -му часовому шарі механічні переміщення u_i^{k+1} знаходяться через значення параметрів електромеханічного стану на попередніх часових шарах, тоді як електричний потенціал знаходиться з системи алгебраїчних рівнянь, що отримується з різницевої форми квазістатичного рівняння для електричної індукції.

Проаналізувавши результати обчислень, можна зробити висновок, що для методу Ньюмарка оптимальним є значення параметра $\xi = 0.5$. Метод Ньюмарка внаслідок абсолютної стійкості дає розв'язок з достатньою точністю при значно більших кроках по часу, ніж явна схема. Розв'язки обома методами співпали з точністю 99% на сітках $n = 31$, $\Delta t = 0.0125$ для явної схеми та $n = 31$, $\Delta t = 0.025$ для методу Ньюмарка.

3. Числовий приклад. Розглянемо задачу про вимушені нестационарні коливання кулі з кераміки PZT-4 [3]

$$c_{11}^E = 13,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{12}^E = 7,78 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{13}^E = 7,43 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ c_{33}^E = 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad e_{31} = -5,2 \text{ Кл/м}^2, \quad e_{33} = 15,1 \text{ Кл/м}^2, \\ \epsilon_{33}^S = 562 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м.}$$

з параметром кривизни $\epsilon = 0.1$ при нульових початкових умовах.

Спочатку розглянемо реакцію кулі на навантаження електричним потенціалом, що описується функцією $V(t) = V_0 H(t)$, де $H(t)$ – функція Хевісайда. Представлені результати отримані при $V_0 = 1$. При переході до розмірної задачі отримані результати множаться на фізичне значення V_0 , а потім використовуються вирази (5).

На рис. 1 представлена динаміка зміни радіальних переміщень u різних точок стінки кулі. Бачимо, що коливання серединної поверхні $x = 0$ описуються гладкими кривими з періодом $T_u \approx 43$, а зовнішні поверхні, крім коливань з періодом T_u , здійснюють коливання відносно серединної поверхні з періодом, що залежить від пробігу електропружної хвилі товщини стінки кулі. Період коливань серединної поверхні залежить від параметра кривизни ϵ .

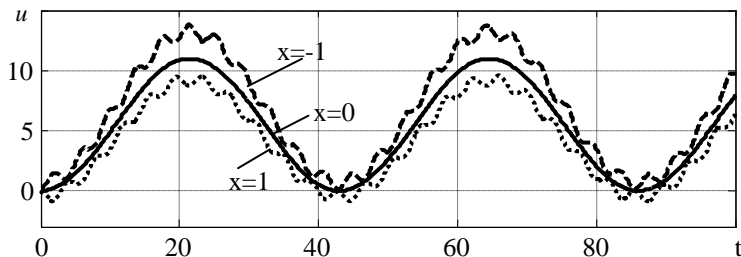


Рис.1. Зміна механічних переміщень в різних точках перерізу при електричному збуренні

Радіальні напруження максимальні на серединній поверхні. Рис. 2 ілюструє зміну радіальних напружень при $x=0$. Механічні напруження виникають в перерізі миттєво відповідно до розподілу електричного потенціалу в момент прикладання навантаження, і досягають значення $\sigma_{\max} = 1.3$. З приходом зв'язаної електропружної хвилі в точку напруження стрибкоподібно змінюються.

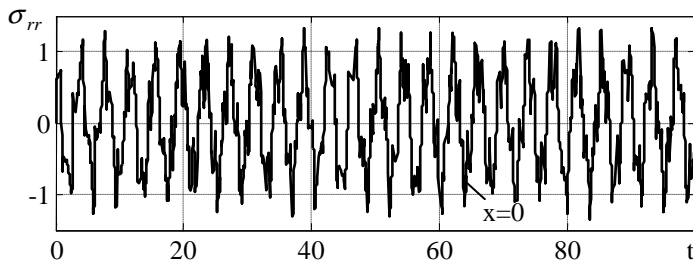


Рис. 2. Зміна механічних напружень σ_{rr} в точці $x=0$ при електричному збуренні

Зміна в часі електричного потенціалу в різних точках перетину кулі ілюструється рис. 3. Електричний потенціал виникає в перерізі миттєво і надалі коливається в околі початкового значення. Найменша амплітуда коливань спостерігається в точці $x=0$.

Проведемо аналіз коливань п'єзокерамічної кулі, що виникають при прикладанні сили $Q(t) = qH(t)$, де $q = 1$. З рис. 4 бачимо, що коливання серединної поверхні кулі при електричному та механічному навантаженні співпадають з точністю до множника. Максимальні відхилення серединної поверхні сягають значення $u_{\max} = 6.6$, що менше за відповідне значення при електричному навантаженні на 66%. Потрібно

відмітити, що на відміну від коливань серединної поверхні амплітуда малих коливань точок зовнішніх поверхонь відносно серединної поверхні при даному навантаженні значно більша, ніж при відповідному електричному навантаженні (рис.1).

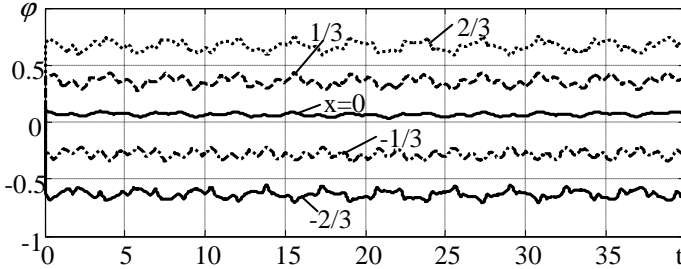


Рис. 3. Електричний потенціал φ в різних точках перетину при електричному збуренні

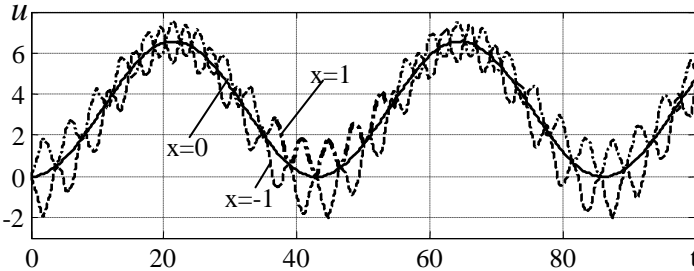


Рис.4. Динамічні криві механічних переміщень в різних точках перерізу при механічному навантаженні

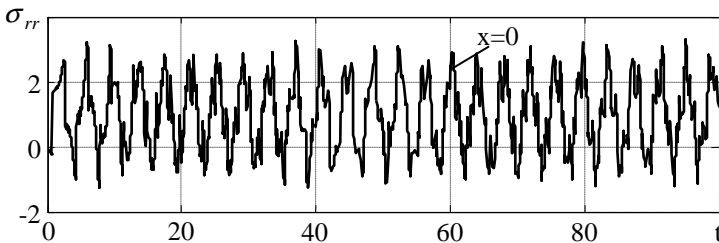


Рис. 5. Залежність від часу механічних напружень σ_{rr} в точці $x = 0$ при механічному навантаженні

При аналізі еволюції в часі радіальних напружень бачимо, що область значень цієї величини змінилася порівняно з електричним навантаженням і досягає значення $\sigma_{\max} = 3.3$. Потрібно відмітити, що при механічному навантаженні механічні напруження в точках стінки в момент прикладання навантаження дорівнюють нулеві і дещо зростають з наростанням розподілу електричного потенціалу в перерізі.

Прослідкувати динаміку зміни електричного потенціалу в різних точках перерізу при механічному навантаженні можна за допомогою рис. 6. Амплітуда коливань значень потенціалу відносно початкового значення помітно перевищує відповідне значення при електричному навантаженні. Максимум електричного потенціалу виникає при $x = 0.5$ і досягає значення $\varphi_{\max} = 0.15$.

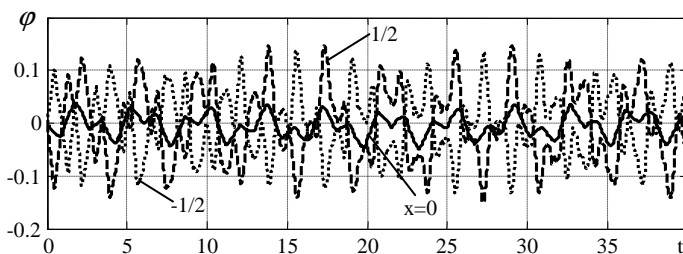


Рис. 6. Зміна в часі електричного потенціалу при різних значеннях x при механічному навантаженні

Таким чином, побудована в роботі чисельна схема дає змогу ефективно розв'язувати динамічні задачі електропружності для п'єзокерамічної кулі. Проведений аналіз закономірностей поширення електропружних нестационарних коливань при електричному та механічному навантаженні дозволяє зробити висновок, що переміщення набувають більших значень при електричному навантаженні, а напруження – при механічному. Подібність кривих переміщень серединної поверхні при різних типах навантаження дає змогу підібрати навантаження таким чином, щоб переміщення серединної поверхні кулі були близькими до нуля.

Викладені результати свідчать про те, що закономірності поширення коливань в електропружних тілах суттєво відрізняються від вивчених в динамічній теорії пружності і не мають аналогів в незв'язаних задачах. Причиною цього є взаємодія полів різної фізичної природи, що проявляється і в математичному описі електропружних задач, і в наведених результатах.

1. *Баженов В. М., Улитко А. Ф.* Исследование динамического поведения пьезокерамического слоя при мгновенном электрическом нагружении // Прикл. механика. –1975. – **11**, №1– С. 22–27.
2. *Жарий О. Ю., Улитко А. Ф.* Введение в механику нестационарных колебаний и волн. К.: Выща школа, 1989. – 184 с.
3. *Шульга Н. А., Болкисев А. М.* Колебания пьезоэлектрических тел.– К: Наук. думка, 1990.– 228 с.