УДК 539.3

Гайдайчук В.В., д-р техн. наук
Муса Набіль

ДИНАМІКА ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПІД ДІЄЮ ВНУТРІШНЬОГО СХІДЧАСТОГО ПОЛЯ ТИСКУ, ЩО РУХАЄТЬСЯ

Вступ

Задачі про дослідження динаміки циліндричних оболонок під дією внутрішнього рухомого поля тиску широко зустрічаються в техніці. Такі питання виникають при розрахунку магістральних нафто- і газопроводів, в яких під дією імпульсивних періодичних збурень від працюючих компресорів в трубі установлюється періодична хвиля тиску, яка розповсюджується із швидкістю руху звука у потоці. Аналогічні явища мають місце в трубопроводах хімічних підприємств, гідро- і газових системах літальних апаратів та теплових енергетичних установок. Дія рухомих навантажень має місце також в оболонках, що підкріплюють транспортні тунелі.

Дуже специфічні ефекти породжуються в трубах, які вміщують детонуючи матеріали. Оскільки при ініціюванні детонації таких матеріалів можуть генеруватися вибухові ударні хвилі, що мають різні профілі і розповсюджуються із різними швидкостями (досягають дві і більше тисяч метрів за секунду), важливо проаналізувати вплив параметрів детонаційної хвилі на динаміку оболонки, яка вміщує її. При цьому можуть бути досягнуті критичні значення цих параметрів, при яких розрахункові величини прогинів і напружень оболонки в межах лінійної теорії необмежено зростають.

В публікаціях [1,2] дія рухомого навантаження на оболонку досліджується на базі класичних гіпотез теорії оболонок. В даній роботі постановка задачі про розповсюдження хвиль пружних деформацій, які рухаються в стінці циліндричних оболонок базується на застосуванні теорії оболонок типу С.П. Тимошенко, що має по зрівнянню з класичною теорією оболонок переваги обумовлені із урахуванням деформації зсуву та інерції повороту перерізу [3,4]. Тому вона дозволяє більш точніше описувати згинальні хвилі, які рухаються.

1. Рівняння динаміки циліндричної оболонки

У зв’язку з тим, що розглянута конструкція циліндричної оболонки і діюче на неї навантаження є осесиметричними, осесиметричними буде і поле розповсюдження пружних хвиль. Для дослідження таких полів застосована теорія циліндричних оболонок в осесиметричній постановці.

Нехай x – координата, спрямована уздовж оболонки; $\vec{n}$ – внутрішня нормаль до її поверхні; u, w – компоненти вектора переміщень, спрямовані уздовж осі Ox і нормалі $\vec{n}$ відповідно; p_n – інтенсивність зовнішнього навантаження, що діє на оболонку уздовж нормалі $\vec{n}$. Тоді рівняння руху елемента оболонки можна представити у виді [4]:

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial N_1}{\partial x} = 0;$$
$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{N_2}{R} = p_n; \qquad (1)$$
$$\frac{\rho h^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - Q + \frac{\partial M}{\partial x} = 0,$$

де ρ – густина матеріалу оболонки; h – її товщина; N_1, N_2 – внутрішні зусилля в оболонці в подовжньому й окружному напрямках; Q – поперечна сила у перерізі $x = const$; M - згинальний момент у тім же перерізі; ψ - кут повороту перерізу; t - час.

Сили N_1, N_2 підраховують так:

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{w}{R}\right);$$
$$N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(-\frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad (2)$$

де E – модуль пружності матеріалу оболонки; ν – коефіцієнт Пуассона; ε_1, ε_2 – відносні деформації серединної поверхні оболонки у відповідних напрямках.

Для осесиметричної постановки:

$$M = -\frac{EI}{1-\nu^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x};$$
$$Q = AG\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi\right). \qquad (3)$$

Тут $I = \dfrac{h^3}{12}$ – момент інерції площі перерізу одиничної довжини; $A = h$ – площа одиничного перерізу; G – постійна пружності.

Підставляючи (3) у другу рівність (1), одержимо:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - hG\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{N_2}{R} = p_n \ , \tag{4}$$

звідси

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{p_n}{hG} - \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{N_2}{hGR} \ . \tag{5}$$

За допомогою цього виразу виключаємо $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ з правої частини першої рівності (3):

$$M = -\frac{Eh^2}{12G\left(1-\nu^2\right)} p_n + \frac{\rho EI}{G\left(1-\nu^2\right)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{EI}{1-\nu^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{EI}{hGR\left(1-\nu^2\right)} N_2 \tag{6}$$

З третього рівняння (1) знаходимо:

$$Q = \frac{\rho h^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial M}{\partial x} \ .$$

Підставляючи Q в другу рівність (1), одержимо:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho h^3}{12} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \frac{N_2}{R} = p_n \ . \tag{7}$$

Запишемо перше рівняння (1) у розгорнутому виді і врахуємо в (7) вираз (5) і (6). У підсумку одержимо систему двох рівнянь з частинними похідними щодо двох шуканих функцій u і w:

$$\rho h \ddot{u} - \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\nu}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \, ;$$

$$\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} w^{IV} - \frac{\rho h^3}{12}\left(1 + \frac{E}{G\left(1-\nu^2\right)}\right)\ddot{w}'' + \rho h\left(1 + \frac{Eh^2}{12\left(1-\nu^2\right)GR^2}\right)\ddot{w} +$$

$$+\frac{\rho^2 h^3}{12G}\ddddot{w}-\frac{E^2h^3}{12\left(1-\nu^2\right)^2 GR^2}\ddot{w}''+\frac{Eh}{\left(1-\nu^2\right)R^2}w+\frac{E^2h^3\nu}{12\left(1-\nu^2\right)GR}u'''-$$

$$-\frac{\rho E h^3 \nu}{12\left(1-\nu^2\right)GR}\ddot{u}'-\frac{Eh\nu}{R\left(1-\nu^2\right)}u'=p_n+\frac{\rho h^2}{12G}\ddot{p}_n-\frac{Eh^2}{12\left(1-\nu^2\right)G}p_n'' . \qquad (8)$$

Тут штрихом позначене диференціювання по x, точкою – по t.

Система (8) описує динаміку циліндричної оболонки під дією осесиметричного навантаження p_n. Вона є більш складною в порівнянні з рівнянням динаміки балки на пружній основі [5]. Ця система відрізняється також і від рівнянь теорії оболонок Кірхгофа наявністю похідної четвертого порядку за часом від перемінної w, а також похідними по x і t від інтенсивності навантаження p_n. У зв'язку з цим вона може бути використана для опису більш загальних і складних механічних явищ, зокрема, для вивчення хвиль, що рухаються.

2. Дія на оболонку східчастого навантаження, що рухається

Задача про динаміку і напружено-деформований стан пружної циліндричної трубки під дією внутрішнього східчастого навантаження інтенсивністю p_n, що рухається зі швидкістю V описується системою рівнянь (8), причому при $X<0$ $p_n=0$, тому рівняння є однорідними:

$$h\left(\rho V^2-\frac{E}{1-\nu^2}\right)u''+\frac{Eh\nu}{\left(1-\nu^2\right)R}w'=0 ;$$

$$\frac{Eh^3\nu}{12GR\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{E}{1-\nu^2}-\rho V^2\right)u'''-\frac{Eh\nu}{R\left(1-\nu^2\right)}u'+$$

$$+\left\{\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}-\frac{\rho h^3}{12}\left[1+\frac{E}{G\left(1-\nu^2\right)}\right]V^2+\frac{\rho^2h^3}{12G}V^4\right\}w^{IV}+$$

$$+\left\{\rho h\left(1+\frac{Eh^2}{12\left(1-\nu^2\right)^2GR^2}\right)V^2-\frac{E^2h^3}{12\left(1-\nu^2\right)^2GR^2}\right\}w''+\frac{Eh}{\left(1-\nu^2\right)R^2}w=0 \qquad (9)$$

$$\left(X<0\right) .$$

При $X>0$ діє навантаження поля постійного тиску, тому $p_n=const$, $p_n''=0$ і справедливі неоднорідні рівняння виду (8):

$$h\left(\rho V^2-\frac{E}{1-\nu^2}\right)u''+\frac{Eh\nu}{\left(1-\nu^2\right)R}w'=0;$$

$$\frac{Eh^3\nu}{12GR\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{E}{1-\nu^2}-\rho V^2\right)u'''-\frac{Eh\nu}{R\left(1-\nu^2\right)}u'+$$

$$+\left\{\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}-\frac{\rho h^3}{12}\left[1+\frac{E}{G\left(1-\nu^2\right)}\right]V^2+\frac{\rho^2h^3}{12G}V^4\right\}w^{IV}+$$

$$+\left\{\rho h\left(1+\frac{Eh^2}{12\left(1-\nu^2\right)^2GR^2}\right)V^2-\frac{E^2h^3}{12\left(1-\nu^2\right)^2GR^2}\right\}w''+\frac{Eh}{\left(1-\nu^2\right)R^2}w=p_n \quad (10)$$

$$\left(X>0\right).$$

Для спрощення систем (9) і (10) зробимо додаткові перетворення. Перше рівняння цих систем мають інтеграли, тому, наприклад, з (9) маємо:

$$u'=C_1-\frac{E\nu}{R\left[\rho\left(1-\nu^2\right)V^2-E\right]}w\ ;$$

$$u'''=-\frac{E\nu}{R\left[\rho\left(1-\nu^2\right)V^2-E\right]}w'' \qquad \left(X<0\right), \quad (11)$$

де C_1 – константа.

У результаті друге рівняння системи (9) приводиться до форми:

$$\left\{\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}-\frac{\rho h^3}{12}\left[1+\frac{E}{G\left(1-\nu^2\right)}\right]V^2+\frac{\rho^2h^3}{12G}V^4\right\}w^{IV}+$$

$$+\left\{\rho h\left(1+\frac{Eh^2}{12\left(1-\nu^2\right)GR^2}\right)V^2-\frac{E^2h^3}{12\left(1-\nu^2\right)^2GR^2}\right\}w''+$$

$$+\frac{Eh}{\left(1-\nu^2\right)R^2}\left\{1+\frac{E\nu^2}{\rho\left(1-\nu^2\right)V^2-E}\right\}w=\frac{Eh\nu}{\left(1-\nu^2\right)R}C_1 \quad \left(X<0\right). \quad (12)$$

Аналогічні перетворення виконуються для системи (10) при $\left(X>0\right)$:

$$u'=C_2-\frac{E\nu}{R\left[\rho\left(1-\nu^2\right)V^2-E\right]}w\ ;$$

$$u''' = -\frac{E\nu}{R\left[\rho\left(1-\nu^2\right)V^2 - E\right]} w'' \qquad \left(X > 0\right), \tag{13}$$

де C_2 – константа.

Підставляючи (13) у (10), одержимо:

$$\left\{\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} - \frac{\rho h^3}{12}\left[1 + \frac{E}{G\left(1-\nu^2\right)}\right]V^2 + \frac{\rho^2 h^3}{12G}V^4\right\}w^{IV} +$$

$$+\left\{\rho h\left(1 + \frac{Eh^2}{12\left(1-\nu^2\right)GR^2}\right)V^2 - \frac{E^2h^3}{12\left(1-\nu^2\right)^2 GR^2}\right\}w'' +$$

$$+\frac{Eh}{\left(1-\nu^2\right)R^2}\left\{1 + \frac{E\nu^2}{\rho\left(1-\nu^2\right)V^2 - E}\right\}w = \frac{Eh\nu}{\left(1-\nu^2\right)R}C_2 + p_n \quad X > 0. \tag{14}$$

Загальний розв’язок $w(x)$ рівняння (12) представляється у вигляді суми загального розв’язку $w_{oo}(x)$ відповідного однорідного рівняння для (12) і його частинного розв’язку $w_{чн}(x)$:

$$w(x) = w_{oo}(x) + w_{чн}(x)\ . \tag{15}$$

Приймемо:

$$w_{oo}(x) = We^{\lambda x}\ .$$

Підставляючи праву частину цього рівняння у відповідне однорідне рівняння, одержимо біквадратне рівняння:

$$\left\{\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} - \frac{\rho h^3}{12}\left[1 + \frac{E}{G\left(1-\nu^2\right)}\right]V^2 + \frac{\rho^2 h^3}{12G}V^4\right\}\lambda^4 +$$

$$+\left\{\rho h\left(1 + \frac{Eh^2}{12\left(1-\nu^2\right)GR^2}\right)V^2 - \frac{E^2h^3}{12\left(1-\nu^2\right)^2 GR^2}\right\}\lambda^2 +$$

$$+\frac{Eh}{\left(1-\nu^2\right)R^2}\left\{1 + \frac{E\nu^2}{\rho\left(1-\nu^2\right)V^2 - E}\right\} = 0\ . \tag{16}$$

Уведемо позначення:

$$m = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} - \frac{\rho h^3}{12}\left[1 + \frac{E}{G\left(1-\nu^2\right)}\right]V^2 + \frac{\rho^2 h^3}{12G}V^4;$$

$$n=\rho h\left(1+\frac{Eh^2}{12\left(1-\nu^2\right)GR^2}\right)V^2-\frac{E^2h^3}{12\left(1-\nu^2\right)^2GR^2};$$

$$p=\frac{Eh}{\left(1-\nu^2\right)R^2}\left\{1+\frac{E\nu^2}{\rho\left(1-\nu^2\right)V^2-E}\right\}.$$

Тоді рівняння (16) можна представити у вигляді:

$$m\Lambda^2+n\Lambda+p=0\ . \tag{17}$$

З нього випливає:

$$\Lambda_{1,2}=\frac{-n\pm\sqrt{n^2-4mp}}{2m};$$

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\Lambda_1}\,;\lambda_{3,4}=\pm\sqrt{\Lambda_2}\ . \tag{18}$$

Вид розв’язку (15) залежить від значень Λ_1, Λ_2. Можливі різні випадки.

Нехай $\Lambda_1>0$, $\Lambda_2>0$. Тоді:

$$w_{oo}(X)=C_3e^{\sqrt{\Lambda_1}X}+C_4e^{\sqrt{\Lambda_2}X}+C_7e^{-\sqrt{\Lambda_1}X}+C_8e^{-\sqrt{\Lambda_2}X}\qquad (X<0);$$

$$w_{oo}(X)=C_5e^{-\sqrt{\Lambda_1}X}+C_6e^{-\sqrt{\Lambda_2}X}+C_9e^{\sqrt{\Lambda_1}X}+C_{10}e^{\sqrt{\Lambda_2}X}\qquad (X>0). \tag{19}$$

При визначенні констант C_3, C_4, …, C_{10} будемо враховувати, що розв’язки убувають на нескінченності, тобто $w_{oo}(X)\to 0$ при $X\to\pm\infty$. Ця умова дозволяє прийняти $C_7=C_8=C_9=C_{10}=0$ і розв’язки (19) спростити:

$$w_{oo}(X)=C_3e^{\sqrt{\Lambda_1}X}+C_4e^{\sqrt{\Lambda_2}X}\quad (X<0);$$

$$w_{oo}(X)=C_5e^{-\sqrt{\Lambda_1}X}+C_6e^{-\sqrt{\Lambda_2}X}\quad (X>0). \tag{20}$$

Частинні розв’язки $w_{чн}(x)$ неоднорідних рівнянь (12) і (14) мають вигляд:

$$w_{чн}(X)=\frac{\nu R}{1-\nu^2}\bullet\frac{\rho\left(1-\nu^2\right)V^2-E}{\rho V^2-E}C_1\qquad (X<0);$$

$$w_{чн}(X) = \frac{\nu R}{1-\nu^2} \bullet \frac{\rho(1-\nu^2)V^2 - E}{\rho V^2 - E} C_2 + \frac{R^2\left[\rho(1-\nu^2)V^2 - E\right]}{Eh(\rho V^2 - E)} p_n \quad (X > 0). \quad (21)$$

Рівності (20) і (21) дозволяють знайти загальний розв'язок (15):

$$w(X) = C_3 e^{\sqrt{\Lambda_1}X} + C_4 e^{\sqrt{\Lambda_2}X} + \frac{\nu R}{1-\nu^2} \bullet \frac{\rho(1-\nu^2)V^2 - E}{\rho V^2 - E} C_1 \quad (X < 0);$$

$$w(X) = C_5 e^{-\sqrt{\Lambda_1}X} + C_6 e^{-\sqrt{\Lambda_2}X} + \frac{\nu R}{1-\nu^2} \bullet \frac{\rho(1-\nu^2)V^2 - E}{\rho V^2 - E} C_2 +$$

$$+ \frac{R^2\left[\rho(1-\nu^2)V^2 - E\right]}{Eh(\rho V^2 - E)} p_n \qquad (X > 0). \quad (22)$$

Константи C_1, C_2, …, C_6, що входять в (22), знаходяться з умов сполучення розв'язку при $X = 0$. Умови нерозривності $w(X)$ і її похідних приводять до рівностей:

$$\begin{aligned} w_-(0) &= w_+(0); \\ w'_-(0) &= w'_+(0); \\ w''_-(0) &= w''_+(0); \\ w'''_-(0) &= w'''_+(0); \\ N_{1-}(0) &= N_{1+}(0). \end{aligned} \quad (23)$$

Остання рівність цієї системи дає

$$\left(u' - \nu\frac{w}{R}\right)_- = \left(u' - \nu\frac{w}{R}\right)_+ . \quad (24)$$

З урахуванням першої рівності системи (23) умова (24) приводиться до рівності:

$$u'_-(0) = u'_+(0). \quad (25)$$

Розглянемо першу рівність системи (11). З умови рівності нулю напружень при $X \to -\infty$ маємо $u'(-\infty) = w(-\infty) = 0$, звідки, $C_1 = 0$. Ураховуючи (25) разом з (11) і (13) і першою рівністю (23), одержуємо $C_2 = 0$.

Підставляючи (22) у перші чотири рівності (23), одержимо чотири рівняння для обчислення невідомих констант C_3, C_4, C_5, C_6:

$$C_3 + C_4 - C_5 - C_6 = \frac{R^2\left[\rho\left(1-\nu^2\right)V^2 - E\right]}{Eh\left(\rho V^2 - E\right)} p_n ;$$

$$\Lambda_1^{1/2} C_3 + \Lambda_2^{1/2} C_4 + \Lambda_1^{1/2} C_5 + \Lambda_2^{1/2} C_6 = 0 ;$$

$$\Lambda_1 C_3 + \Lambda_2 C_4 - \Lambda_1 C_5 - \Lambda_2 C_6 = 0 ;$$

$$\Lambda_1^{3/2} C_3 + \Lambda_2^{3/2} C_4 + \Lambda_1^{3/2} C_5 + \Lambda_2^{3/2} C_6 = 0 \ . \qquad (26)$$

Система (26) має розв’язок:

$$C_3 = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_2 - \Lambda_1} \bullet \frac{R^2\left[\rho\left(1-\nu^2\right)V^2 - E\right]}{2Eh\left(\rho V^2 - E\right)} ;$$

$$C_4 = -\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} \bullet \frac{R^2\left[\rho\left(1-\nu^2\right)V^2 - E\right]}{2Eh\left(\rho V^2 - E\right)} ;$$

$$C_5 = -\frac{\Lambda_2}{\Lambda_2 - \Lambda_1} \bullet \frac{R^2\left[\rho\left(1-\nu^2\right)V^2 - E\right]}{2Eh\left(\rho V^2 - E\right)} ;$$

$$C_6 = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} \bullet \frac{R^2\left[\rho\left(1-\nu^2\right)V^2 - E\right]}{2Eh\left(\rho V^2 - E\right)} \ .$$

Розглянемо циліндричну оболонку при наступних значеннях її механічних параметрів: діаметр оболонки $2R$ = 0,8 м; h = 0,008 м; щільність ρ = 7,8• 10^3 кг/м^3; коефіцієнт Пуассона ν = 0,3; швидкість V = 40 м/с переміщення тиску p_n .

Тоді $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ = 0,792 Н/м^2; m = 9,657• 10^3; n = -5,715• 10^4; p = 1,029• 10^{10}.

У цьому випадку: $\Lambda_{1,2} = 2{,}959 \pm 1{,}09 \bullet 10^3 i$.

Оскільки $\lambda_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\Lambda_{1,2}}$, то $\lambda_{1,2,3,4} = \pm\alpha \pm i\beta = \pm 23{,}38 \pm 23{,}31 i$.

Так як корені є комплексними некратними, то загальний розв’язок (15) приводиться до вигляду:

$$w_+(x) = e^{-\alpha x}\left(C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x\right) + e^{\alpha x}\left(D_1 \sin\beta x + D_2 \cos\beta x\right) + w_{чн} \quad (X > 0);$$

$$w_-(x) = e^{\alpha x}\left(C_3 \sin\beta x + C_4 \cos\beta x\right) + e^{-\alpha x}\left(D_3 \sin\beta x + D_4 \cos\beta x\right) \quad (X < 0). \qquad (27)$$

Враховуючи умови обмеженості прогинів w на нескінченності, приймаємо:

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 0 \tag{28}$$

і розв'язок (27) заміняємо співвідношеннями:

$$\begin{aligned} w_+(x) &= e^{-\alpha x}\left(C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x\right) + w_{чн} \qquad (X > 0); \\ w_-(x) &= e^{\alpha x}\left(C_3 \sin\beta x + C_4 \cos\beta x\right) \qquad (X < 0). \end{aligned} \tag{29}$$

Константи C_i $\left(i = \overline{1,4}\right)$, що входять в (29) знаходимо з умов (23) сполучення розв'язку в точці $X = 0$.

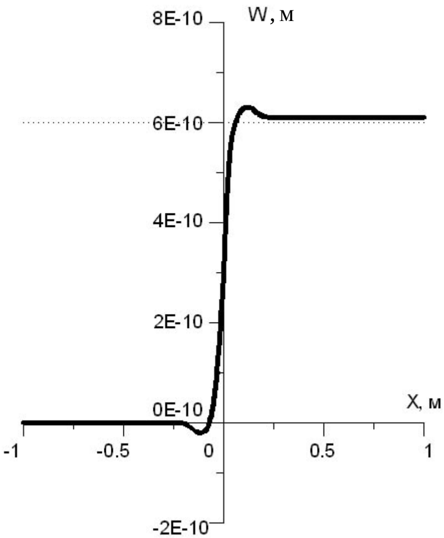

Рис. 1. Форма прогину оболонки під дією східчастого навантаження, що рухається

На рис. 1 показана форма функції w хвилі, що біжить, в оболонці під дією східчастого поля тиску, який рухається. Аналізуючи одержаний результат можна відмітити, що найбільше викривлення вона має в околі фронту навантаження. Тому в цій зоні має місце найбільше значення згинальних моментів.

Ураховуючи значення констант C_i, виражених через $A = \dfrac{R^2\left[\rho\left(1-\nu^2\right)V^2 - E\right]}{Eh\left(\rho V^2 - E\right)}$, можна зробити висновок, що при прямуванні знаменника дробу в правій частині до нуля, значення прогину прямує до нескінченності. При цьому значення швидкості руху східчастого навантаження

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

можна вважати критичним. Воно збігається зі значенням подовжньої швидкості хвилі в суцільному пружному стержні.

1. *Алексеева Л.А., Украинец В.Н.* Критическая скорость движущейся нагрузки в тоннеле, подкрепленном двухслойной оболочкой.//Известия АН СССР. Механика твердого тела.- 1987.- № 4.- С.156-161.
2. *Пожуев В.И.* Влияние скорости движения волны давления на реакцию трехслойной цилиндрической оболочки.-Прикладная механика.- 1983.- 19, № 7.- С.59-64.
3. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Гайдайчук В.В.* Расчет оболочек сложной формы.//Киев: Будівельник, 1990, 198 с.
4. *Мнев Е.Н., Перцев А.К.* Гидроупругость оболочек.-Л.: Судостроение, 1970, 365 с.
5. *Гуляев В.И., Мельник В.М., Яковенко Е.В.* Динамика балки на упругом основании под действием перемещающейся силы и момента (модель С.П. Тимошенко).//Прикладная механика.- 2000.- 36, № 12.- С.121-127.

Матеріал надійшов до редакції 07.07.04.