

УДК 534-21:537.226.86

Л.О. Григор'єва¹, канд. фіз.-мат. наук
А.А. Кириченко¹, канд. фіз.-мат. наук
Н.О. Бабкова²

¹Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, Україна. 03680

²Національний авіаційний університет
просп. Комарова, 1, м. Київ, Україна.

ВИЗНАЧЕННЯ ЕЛЕКТРОРУШІЙНОЇ СИЛИ ПОЛЯРИЗОВАНОЇ ПО ТОВЩИНІ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ ПРИ МЕХАНІЧНОМУ ЗБУРЕННІ

Запропоновано метод для визначення електрорушійної сили тонких кільцевих поляризованих по товщині п'єзокерамічних пластин з електродованими плоскими поверхнями при нестационарних механічних навантаженнях. Проведено чисельну реалізацію запропонованого методу, що дає змогу ефективно знаходити ЕРС п'єзоелемента при різних способах закріплення і навантаження. Виконуються дослідження динамічного електромеханічного стану пластини, що виникає при цьому.

Ключові слова: п'єзокерамічна кільцева пластина, чисельний метод, різниця потенціалів, динамічний електро-механічний стан, електрорушійна сила п'єзоелементу, нестационарне механічне навантаження.

Вступ. П'єзоелектричні елементи пластинчастої форми є широко застосовуваними електромеханічними перетворювачами при гармонічних та імпульсних електричних і механічних збуреннях [5, 7 та ін.]. Теоретичним та експериментальним дослідженням цих тіл при сталих гармонічних коливаннях присвячено наукові роботи [3, 5 та ін.]. У статтях [10, 11] вивчалися гармонійні товщинні коливання неоднорідних та п'єзоелектричних шарів з викривленими границями. Питання нестационарних коливань розглядалися в [4, 8, 9 та ін.].

Дослідження тонких перетворювачів доцільно проводити в наближенні плоского напруженого стану, враховуючи лінійний розподіл електричного потенціалу по товщині. На основі запропонованого наближення в [4] досліджувались нестационарні коливання п'єзокерамічних кільцевих пластин при електричних збуреннях. При механічному навантаженні п'єзоелектричні перетворювачі працюють в режимі прямого п'єзо ефекту і є джерелом електричного струму. Електрична напруга на розімкнутих електродах п'єзоелектричного елементу буде електрорушійною силою джерела струму. Визначення електрорушійної сили п'єзоелементів при гармонічних навантаженнях проводились в роботах [1, 6]. Підхід до визначення ЕРС для пластинчастих елементів в нестационарному випадку

запропоновано в [2] за допомогою інтегрального рівняння Вольтерра. В даній статті розроблено та реалізовано чисельний спосіб знаходження ЕРС та дослідження динамічного осесиметричного електромеханічного стану поляризованих по товщині п'єзокерамічних тонких кільцевих пластин при механічному збуренні.

1. Основні залежності. Вивчається динамічний осесиметричний електромеханічний стан поляризованих по товщині п'єзокерамічних тонких кільцевих пластин. Товщина пластини h , координата r змінюється в межах $R_0 \leq r \leq R_1$. Коливання тіла в загальному випадку описуються рівнянням руху [5]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}. \quad (1.1)$$

Напруження задовольняють співвідношенням

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} \left(\nu_E \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

де s_{11}^E, s_{12}^E - обернені до модулів пружності матеріальні константи при сталій напруженості електричного поля, $\nu_E = -s_{12}^E / s_{11}^E$ - аналог модуля Пуассона в оберненому законі Гука.

Рівняння коливань (1.1) в переміщеннях

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}. \quad (1.3)$$

Тут швидкість поширення електропружної хвилі

$$a^2 = \frac{1}{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E \rho}. \quad (1.6)$$

З (1.2) маємо

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - 2d_{31} E_z \right). \quad (1.4)$$

Електрична індукція в загальному випадку визначається за формулою

$$D_z = d_{13} (\sigma_r + \sigma_\theta) + d_{33} \sigma_z + \varepsilon_{33}^T E_z. \quad (1.5)$$

Напруженість електричного поля

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (1.6)$$

Для тонких пластин вважаємо [5], що електричний потенціал всередині тіла змінюється по лінійному закону

$$\varphi = \frac{U(t)}{h} z,$$

звідки

$$E_z = -\frac{U(t)}{h}. \quad (1.7)$$

Тут $U(t)$ - шукана електрорушійна сила перетворювача, яка визначається з умови рівності нулевій струму при розімкнутих електродах

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\iint_{A^\pm} \frac{dD_z}{dt} dA^\pm = 0, \quad (1.8)$$

де A^\pm - поверхня пластини, покрита електродами, Q - заряд на електродах. З (1.8) випливає

$$Q = -\iint_{A^\pm} D_z dA^\pm = \text{const}. \quad (1.9)$$

З (1.5), (1.4), (1.7) при відсутності навантажень вздовж вісі z маємо

$$D_z = \frac{d_{13}}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} - \left(\epsilon_{33}^T - \frac{2d_{13}^2}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \right) \frac{U(t)}{h}. \quad (1.10)$$

Якщо плоскі поверхні пластини повністю покриті електродами, то $A^\pm = A_{nl} = \pi(R_1^2 - R_0^2)$. Інтегруємо (1.9) з врахуванням (1.10):

$$Q = -\iint_{A^\pm} \left[\frac{d_{13}}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} - \left(\epsilon_{33}^T - \frac{2d_{13}^2}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \right) \frac{U(t)}{h} \right] r dr d\theta,$$

$$-Q = \frac{2\pi d_{13}}{s_{11}^E(1-\nu_E)} (R_1 u_r(R_1, t) - R_0 u_r(R_0, t)) - \left(\epsilon_{33}^T - \frac{2d_{13}^2}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \right) \frac{U(t)}{h} A_{nl}. \quad (1.11)$$

Якщо при $t = 0$ заряд $Q(0) = 0$, то $Q(t) = 0$. З (1.11) отримуємо вираз для знаходження електрорушійної сили

$$U(t) = \frac{\pi h k_p^2}{d_{13} A_{nl} (1 - k_p^2)} (R_1 u_r(R_1, t) - R_0 u_r(R_0, t)). \quad (1.12)$$

Тут $k_p^2 = \frac{2d_{13}^2}{s_{11}^E(1-\nu_E)\epsilon_{33}^T}$ - планарний коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Перетворимо вираз для σ_r :

$$\sigma_r = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} + \frac{\pi(1+\nu_E)}{A_{nl}} \frac{k_p^2}{(1-k_p^2)} (R_1 u_r(R_1, t) - R_0 u_r(R_0, t)) \right). \quad (1.13)$$

Збурення в пластині виникають шляхом прикладання механічного тиску до бокових поверхонь. При цьому друга бокова поверхня може бути жорстко защемлена або вільна від навантажень:

$$\sigma_r(R_i, t) = P_i(t) \quad \vee \quad u_r(R_i, t) = 0, \quad i=0, 1. \quad (1.14)$$

У початковий момент часу задаються переміщення точок пластини і їх швидкості

$$u_r(r, t=0) = u(r), \quad \frac{\partial u_r}{\partial t}(r, t=0) = v(r). \quad (1.15)$$

Перейдемо до безрозмірних величин

$$\bar{r}R = r, \quad \bar{u}_r R = u_r, \quad \bar{t} = \frac{at}{R}. \quad (1.16)$$

Підставляючи (1.16) в (1.3), отримуємо рівняння коливань в безрозмірних змінних

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{t}^2}. \quad (1.17)$$

Рівняння для напружень (1.2) обезрозмірюються наступним чином:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \sigma_r s_{11}^E (1 - \nu_E^2) = \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \nu_E \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} + (1 + \nu_E) \bar{U}(t), \\ \bar{\sigma}_\theta &= \sigma_\theta s_{11}^E (1 - \nu_E^2) = \nu_E \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} + (1 + \nu_E) \bar{U}(t), \end{aligned} \quad (1.18)$$

де електрорушійна сила знаходиться із співвідношення

$$\bar{U}(t) = \frac{d_{13}}{h} U(t) = \frac{\pi k_p^2}{A_{ni} (1 - k_p^2)} (\bar{R}_1 \bar{u}_r(\bar{R}_1, t) - \bar{R}_0 \bar{u}_r(\bar{R}_0, t)). \quad (1.19)$$

Надалі знаки безрозмірності будуть пропускатися.

2. Чисельний метод розв'язання. Для чисельного розв'язку задачі (1.17), (1.18) при початкових умовах (1.15) і граничних умовах (1.14) вводиться розбиття відрізка $R_0 < r < R_1$

$$\Omega = \{r_i = R_0 + (i - 0.5)\Delta_r, \Delta_r = (R_1 - R_0)/(n - 1), i = 0, \dots, n\}. \quad (2.1)$$

При заміні похідних по просторовій координаті центрально-різницевиими виразами рівняння руху (1.17) перетвориться до виду

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta_r^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2r_i \Delta_r} - \frac{u_i}{r_i^2}, \quad i = 1, \dots, n - 1. \quad (2.2)$$

У випадку заданих на границях напружень $\sigma_r(R_0, t) = P_0(t)$ та $\sigma_r(R_1, t) = P_1(t)$ значення $u_0(t)$ і $u_n(t)$ можна визначити, використовуючи наступні апроксимації напружень

$$\sigma_{r,0} = \frac{u_1 - u_0}{\Delta r} + \nu_E \frac{(u_0 + u_1)}{2R_0} + \frac{\pi(1 + \nu_E)}{2A_{nn}} \frac{k_p^2}{(1 - k_p^2)} (R_1(u_n + u_{n-1}) - R_0(u_0 + u_1)) = P_0(t),$$

$$\sigma_{r,n} = \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta r} + \nu_E \frac{(u_n + u_{n-1})}{2R_1} + \frac{\pi(1 + \nu_E)}{2A_{nn}} \frac{k_p^2}{(1 - k_p^2)} (R_1(u_n + u_{n-1}) - R_0(u_0 + u_1)) = P_1(t). \quad (2.3)$$

Звідси отримуємо систему для знаходження законтурних значень $u_0(t)$ і $u_n(t)$ при відомих значеннях переміщень в внутрішніх точках:

$$\left(\frac{\nu_E}{2R_0} - \frac{1}{\Delta r} - A_1 R_0\right) u_0 + A_1 R_1 u_n = P_0(t) - \left(\frac{1}{\Delta r} + \frac{\nu_E}{2R_0} + A_1 R_0\right) u_1 - A_1 R_1 u_{n-1},$$

$$-A_1 R_0 u_0 + \left(\frac{\nu_E}{2R_1} + \frac{1}{\Delta r} + A_1 R_1\right) u_n = P_1(t) + A_1 R_0 u_1 - \left(\frac{1}{\Delta r} + \frac{\nu_E}{2R_1} + A_1 R_1\right) u_{n-1}, \quad (2.4)$$

де $A_1 = \frac{\pi(1 + \nu_E)}{2A_{nn}} \frac{k_p^2}{(1 - k_p^2)}$.

При заданих переміщеннях на одній з границь залишається лише одне з рівнянь (2.4), і обчислення помітно спрощуються.

Електрорушійна сила знаходиться відповідно до співвідношення (1.21)

$$U(t) = \frac{A_1}{(1 + \nu_E)} (R_1(u_n + u_{n-1}) - R_0(u_0 + u_1)). \quad (2.6)$$

Для інтегрування по часу розбиваємо досліджувану часову ділянку на інтервали довжиною Δ_t і застосовуємо загальноприйняті методи, наприклад, явну чисельну схему. У явній схемі переміщення на $(k + 1)$ -му шарі знаходяться по відомому розподілу переміщень на k -му і $(k - 1)$ -му часових шарах наступним чином

$$u_i^{k+1} = \Delta_t^2 \left[\left(\frac{1}{\Delta_r^2} + \frac{1}{2r_i \Delta_r} \right) u_{i+1}^k - \left(\frac{2}{\Delta_r^2} + \frac{1}{r_i^2} \right) u_i^k + \left(\frac{1}{\Delta_r^2} - \frac{1}{2r_i \Delta_r} \right) u_{i-1}^k \right] + 2u_i^k - u_i^{k-1}. \quad (2.7)$$

Внаслідок умовної стійкості явної чисельної схеми крок за часом у рекурентних формулах (2.5), (2.4) повинен бути в кілька разів менше кроку по просторовій координаті. Зазвичай при прийнятому обезрозміренні достатньо взяти $\Delta_t \approx 0.1\Delta_r$. Значення переміщень на тимчасових шарах $t_0 = 0$ і $t_1 = \Delta_t$ визначаються з початкових умов (1.17).

3. Аналіз отриманих результатів. Проведемо аналіз коливань кільцевої пластини під дією механічного тиску. Товщина пластини $h = 2 \text{ мм}$, зовнішній радіус $R_1 = 5 \text{ см}$, внутрішній $R_0 = 3 \text{ см}$. Матеріал пластини – п'єзокераміка ЦТС-19, для якої маємо наступні матеріальні параметри [3, 5]:

$$s_{11}^E = 15,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}, \quad c_{12}^E = -5,8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}, \\ d_{13} = -125 \cdot 10^{-12} \text{ Кл} / \text{В}, \quad \varepsilon_{33}^S = 1360,8, 85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} / \text{м}, \quad \rho = 7740 \text{ кг} / \text{м}^3.$$

При таких даних швидкість поширення електропружної хвилі в пластині $a = 3150 \text{ м} / \text{с}$. При безрозмірній приймалося $R = R_1$.

Розглянемо реакцію пластини на миттєво прикладене при $t = 0$ збурення $\sigma_r(R_1, t) = P_1(t) = P \sin \omega t$, $\sigma_r(R_0, t) = 0$. Для обчислень візьмемо $P = 1$, безрозмірна частота навантаження $\bar{\omega} = \omega R / a = 1$, якій відповідає частота в герцах $\omega = 6,31 \cdot 10^4 \text{ рад} / \text{с}$.

На рис. 1 наведено безрозмірні динамічні криві для переміщень зовнішніх поверхонь та електрорушійної сили при описаному вище збуренні.

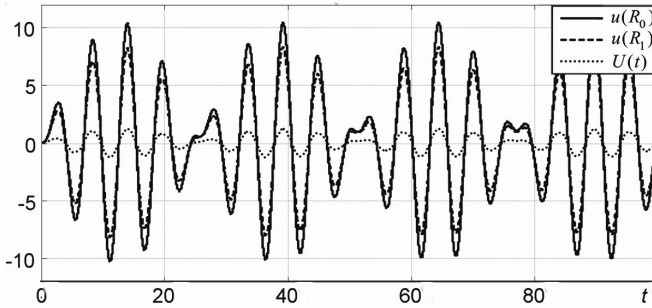


Рис. 1

Рис. 2 показує динаміку зміни окружних напружень σ_θ на зовнішніх поверхнях кільцевої пластини. Виявилось, що окружні напруження на поверхні $r = R_1$ вищі за радіальні в 8 разів згідно до граничних умов, а максимальні напруження $\sigma_{\theta \max} = 15$ виникають на внутрішній поверхні $r = R_0$.

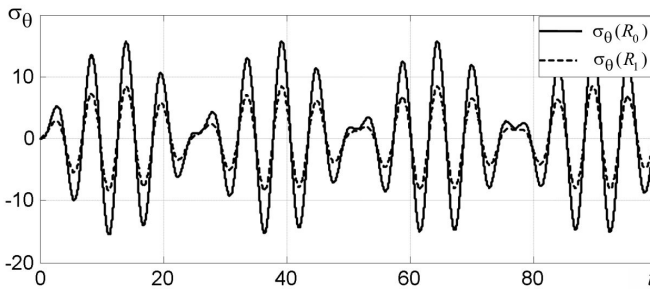


Рис. 2

На рис. 3 наведено криві ЕРС при різних значеннях частоти збурення ω . Бачимо, що максимальних значень електрорушійна сила набуває при $\bar{\omega}=1$. Найменшу область зміни різниці потенціалів маємо при $\bar{\omega}=2$.

Рис. 4 ілюструє динаміку зміни електрорушійної сили для пластин з різними радіусами внутрішнього отвору, отримані при $\bar{\omega}=1$. Максимальна різниця потенціалів виникає при $\bar{R}_0=0.6$. Таким чином, з усіх розглянутих випадків максимальна ЕРС виникає при $\bar{\omega}=1$, $\bar{R}_0=0.6$ і досягає значення $\bar{U}_{\max}=1.22$.

Таким чином, запропонований чисельний метод знаходження електрорушійної сили п'єзоелемента при нестаціонарних механічних навантаженнях дає змогу ефективно визначати ЕРС для кільцевих п'єзокерамічних пластин з різними умовами закріплення та навантаження. Дослідження динамічного електромеханічного стану пластини, що стає відомим при цьому, може бути використано при проектуванні та виборі оптимальних умов функціонування п'єзокерамічного перетворювача.

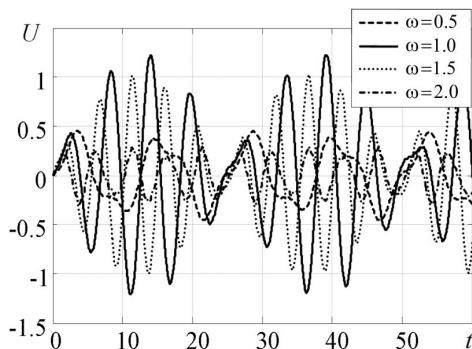


Рис. 3

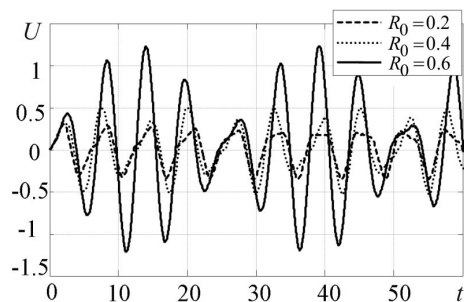


Рис. 4

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Болкисев А.М., Рудницький С.И., Шульга Н.А. Электроакустическая чувствительность пьезокерамического цилиндра при гармоническом нагружении // Прикл. механика. - 1989. - 25, №12. - С. 68-73.
2. Шульга М.О. Визначення електрорушійної сили п'єзоелектричних перетворювачів при механічних навантаженнях // Доп. НАН України. - 2009. - №1 - С.70-74.
3. Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел. - К: Наук. думка, 1990. - 228 с.

4. Шульга Н.А., Григорьева Л.О., Ластивка И.О., Бабкова Н.О. Численный анализ нестационарных колебаний круглых пьезоэлектрических пластин // Теоретич. и прикладная механика, 2011. – №2(48), с. 98-104.
5. Шульга М.О., Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин.—К.: Наукова думка, 2008.—270 с.
6. Шульга Н.А., Рудницкий С.И., Качаенко О.Б. Электроакустическая чувствительность пьезокерамической цилиндрической оболочки в акустической среде // Прикл. механика. - 1989. - 25, №2. - С. 44-48.
7. Mazon W.P. Piezoelectricity, its history and applications //J. Acoust. Soc. Am. –1981. – 70. N 6. – P. 1561 –1566.
8. Grigor'eva L.O. Electromechanical nonstationary thickness vibrations of a piezoceramic layer // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 2. – P. 159–164.
9. Shulga M.O., Grigoryeva L.O. Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation // Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis. – Nova Science Publishers, New York. – 2011. – pp.179-204.
10. Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O., Kornienko V.F. Harmonic thickness vibrations of inhomogeneous elastic layers with curved boundaries // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 1. – P. 62–69.
11. Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O. Comparative analysis of the electroelastic thickness vibrations of layers with curved boundaries // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 2. – P. 177–185.

REFERENCES

1. Bolkisev A.M., Rudnicki S.I., Shul'ga N.A. Electroacoustic sensitivity of piezoceramic cylinder under harmonic loading [in Russian] // J. Appl. mechanics. - 1989. - 25, № 12. - P. 68-73.
2. Shul'ga M.O. Definition of electromotive force piezoelectric transducers under mechanical loads [in Ukrainian] // Extras. National Academy of Sciences of Ukraine. – 2009. №1 - С.70-74.
3. Shul'ga N.A., Bolkisev A.M. Vibrations of piezoceramic bodies [in Russian]. - Naukova Dumka, 1990. - 228 p.
4. Shul'ga N.A., Grigorieva L.O., Lastivka I.O., Babkova N.O. Numerical analysis of nonstationary vibrations of round piezoelectric plates [in Russian] // Theor. and Applied Mechanics, 2011. - № 2 (48), p. 98-104.
5. Shul'ga M.O., Karlash V.L. Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates [in Ukrainian]. □ Naukova Dumka, Kyiv. - 2008.
6. Shulga N.A., Rudnicki S.I., Kachaenko O.B. Electroacoustic sensitivity of piezoceramic cylindrical shell in an acoustic medium [in Russian] // J. Appl. mechanics. - 1989. - 25, № 2. - S. 44-48.
7. Mazon W.P. Piezoelectricity, its history and applications //J. Acoust. Soc. Am. –1981. – 70. N 6. – P. 1561 –1566.
8. Grigor'eva L.O. Electromechanical nonstationary thickness vibrations of a piezoceramic layer // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 2. – P. 159–164.
9. Shulga M.O., Grigoryeva L.O. Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation // Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis. – Nova Science Publishers, New York. – 2011. – pp.179-204.

10. *Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O., Kornienko V.F.* Harmonic thickness vibrations of inhomogeneous elastic layers with curved boundaries // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – 47, N 1. – P. 62–69.
11. *Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O.* Comparative analysis of the electroelastic thickness vibrations of layers with curved boundaries // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – 47, N 2. – P. 177–185.

Стаття надійшла до редакції 31.01.2014 р.

Григорьева Л.О., Кириченко А.А., Бабкова Н.О.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩЕЙ СИЛЫ ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ПО ТОЛЩИНЕ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ МЕХАНИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Предложен метод для определения электродвижущей силы тонких кольцевых поляризованных по толщине пьезокерамических пластин с электродированными плоскими поверхностями при нестационарных механических нагрузках. Проведено численную реализацию предложенного метода, что позволяет эффективно находить ЭДС пьезоэлемента при различных способах закрепления и нагрузки. Выполнено исследование возникающего при этом динамического электромеханического состояния пластины.

Ключевые слова: пьезокерамическая кольцевая пластина, численный метод, разность потенциалов, динамическое электромеханическое состояние, электродвижущая сила пьезоэлемента, нестационарное механическое нагружение.

Grigorieva L.O., Kirichenko A.A., Babkova N.O.

DEFINITION OF ELECTROMOTIVE FORCE OF POLARIZED ON THICKNESS ANNULAR PLATES UNDER MECHANICAL PERTURBATION

A method for determining the electromotive force of the thin ring polarized on the thickness piezoceramic plates with electroded flat surfaces under unsteady mechanical loads is proposed. The numerical implementation of the proposed method enables efficient founding of piezoelement EMF at different ways of fixing and loading. It is determined studying of dynamic electro-mechanical plate state.

Keywords: piezoceramic annular plate, numerical method, potential difference, dynamic electro-mechanical state, piezoelement electromotive force, unsteady mechanical loads.