

УДК 624.014

Білик С.І., канд. техн. наук

## **СТІЙКІСТЬ ПЛОСКОЇ ФОРМИ ЗГИНУ КОНСОЛЬНОЇ ДВОТАВРОВОЇ БАЛКИ ЗІ ЗМІННОЮ ВИСОТОЮ СТІНКИ ЗА МЕТОДОМ РІТЦА**

**Постановка проблеми.** Використання в конструкціях будівель зварних двотаврів змінного перерізу відкрило можливість знаходити раціональні системи за рахунок економічного розподілу матеріалу вздовж конструкцій та виявляти додаткові резерви несучої спроможності. Однією з таких задач є задача з визначення стійкості плоскої форми згину двотаврових балок зі змінною висотою стінки [4,5,6,8,9].

**Аналіз основних досліджень, публікацій і невирішених задач.** Відомі наукові дослідження [2,3,4,5,6], в яких отримано критерій стійкості плоскої форми згину балок постійного перерізу. Вперше розв'язання задачі втрати стійкості плоскої форми згину двотаврів постійного перерізу наведено в дослідженнях С.П. Тимошенка [2]. Теорія стійкості тонкостінних стержнів належить В.З. Власову [3]. В книгах [3,4,5,6] закладені основні теоретичні засади розрахунку тонкостінних стержнів постійного і змінного перерізів, викладена теорія просторової роботи тонкостінних балок і колон з постійним перерізом при врахуванні стиснутого крутіння. Стійкість балок ступінчато-змінного прямокутного перерізу проаналізована в дослідженнях [6]. В статті [7] аналітично отримано вираз для визначення критичного навантаження при втраті стійкості плоскої форми згину балки постійного перерізу з настилом. В дослідженні [8] аналітичним методом отримана система диференціальних рівнянь, яка описує просторову роботу пружної балки змінного перерізу, і отримано аналітичне рішення при апроксимації змінності перерізу параболічною залежністю двотаврової балки зі змінною висотою стінки. В статті [9] отримано диференціальне рівняння, яке описує стійкість плоскої форми згину двотаврової балки зі змінною висотою перерізу. В книзі [5] застосовується енергетичний підхід для визначення стійкості плоскої форми згину консольної двотаврової балки з постійною висотою стінки.

**Викладення основного матеріалу досліджень.** Досліджується стійкість плоскої форми згину консольної тонкостінної сталеві двотаврової балки довжиною  $l$  зі змінною висотою стінки при дії зосередженої сили на вільному кінці, яка прикладена у центрі ваги

найменшого перерізу (рис. 1). Початок декартової системи координат розташовано у центрі ваги максимального кінцевого перерізу стержня [9]. Прийняті робочі гіпотези тонкостінних пружних елементів теорії В.З.Власова [3]. Прийняті позначення: переміщення центру згину -  $\eta, \xi$ , кута повороту перерізу -  $\theta$ . До основи теорії [3] покладена гіпотеза про недеформованість перерізу елемента відкритого профілю. Граничні умови обпирання консольної балки будуть.

$$\begin{aligned} z=0 \rightarrow \theta_0 &= 0; & \theta'_0 &= 0; & \xi_0 &= 0; \\ \xi'_0 &= 0; & \eta_0 &= 0; & \eta'_0 &= 0; \\ z_n = l_0 \rightarrow \theta_n'' &= 0; & \xi_n'' &= 0; & \eta_n'' &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

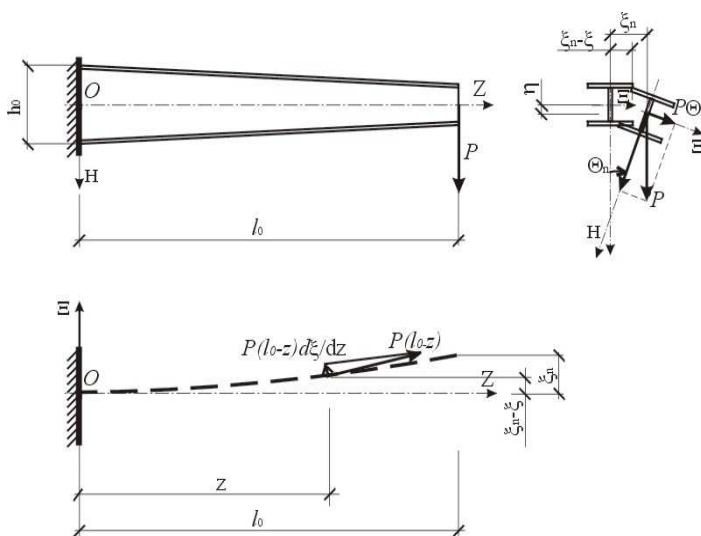


Рис. 1. Конструкція та форма втрати стійкості консольної двотаврової сталевій балки зі змінною висотою стінки

Апроксимація зміни секторіального моменту інерції перерізу балки по довжині і моменту інерції перерізу відносно осі  $OX$  прийнято за параболічною залежністю.

$$\begin{aligned} EI_{xz} &= EI_{x0} \left(1 - \gamma_y \frac{z}{l}\right)^2; & EI_{\omega} &= EI_{\omega 0} \left(1 - \gamma_{\omega} \frac{z}{l}\right)^2; \\ \gamma_y &= 1 - \sqrt{\frac{I_{xn}}{I_{x0}}}; & \gamma_{\omega} &= 1 - \sqrt{\frac{I_{\omega n}}{I_{\omega 0}}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для оцінки діапазону критичного навантаження на балку зі змінною висотою стінки скористаємось енергетичним підходом та принципом можливих переміщень, на яких побудовано метод В. Ритца [1,5]. Переміщення балки характеризуються прогинами  $\eta_z$  в площині  $HOZ$  і кутами повороту –  $\theta_{iz}$ . Прогини в площині  $\Xi OZ$  (горизонтальний згин балки) завжди можна виразити через додатковий згинальний момент, який визначається за формулою [9] –  $M_{yz} = Pl(1-z/l)\theta_z = EI_y \xi''$ .

$$\eta_z = \sum_{j=1}^m f_j \eta_{jz} ; \theta_z = \sum_{i=1}^n a_i \theta_{iz}, \quad (4)$$

де  $f_j$  та  $a_i$  – коефіцієнти,  $\eta_{jz}$  та  $\theta_{iz}$  - апроксимуючі функції переміщень і кутів повороту перерізу лінійно незалежні

При дослідженні нестійкої рівноваги балки варіація повної потенціальної енергії балки має вигляд.

$$\delta\Pi = \sum_{j=1}^m \frac{\partial\Pi}{\partial f_j} \delta\eta_{jz} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Pi}{\partial a_i} \delta\theta_{iz}. \quad (5)$$

Потенціальна енергія дорівнює потенціальній енергії деформації та потенціальній енергії навантаження. Потенціальна енергія навантаження дорівнює роботі зовнішніх сил на можливих переміщеннях зі зворотним знаком.

$$\Pi = U_\eta + U_\xi + U_{t\omega} - A_{P\eta} - A_{P\theta}. \quad (6)$$

Враховуючи (4) та (5).

$$\frac{\partial\Pi}{\partial f_j} = \frac{\partial(U_\eta + U_\xi + U_{t\omega} - A_{P\eta} - A_{P\theta})}{\partial f_j} = \frac{\partial(U_\eta - A_{P\eta})}{\partial f_j}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_i} = \frac{\partial(U_\eta + U_\xi + U_{t\omega} - A_{P\eta} - A_{P\theta})}{\partial a_i} = \frac{\partial(U_\xi + U_{t\omega} - A_{P\theta})}{\partial a_i}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial(U_\xi + U_{t\omega} - A_{P\theta})}{\partial f_j} = 0; \quad \frac{\partial(U_\eta - A_{P\eta})}{\partial a_i} = 0. \quad (9)$$

Таким чином, за умови (4) відношення (7) і (8) не будуть залежати одне від одного і стійкість балки в площині дії згинального моменту буде залежати тільки від умови (8). Варіація потенціальної енергії при втраті стійкості плоскої форми згину балки згідно (5) та (8) приймає вигляд.

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} \delta \theta_{iz} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (U_{\xi} + U_{t\omega} - A_{P\theta})}{\partial a_i} \delta \theta_{iz}. \quad (10)$$

Згідно [1,5] має місце критерій втрати стійкості через мінімум частини потенціальної енергії балки, яка характеризується горизонтальним згином та кутами повороту перерізу:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial (U_{\xi} + U_{t\omega} - A_{P\theta})}{\partial a_i} = 0. \quad (11)$$

Для лінійно-пружного матеріалу за можливо записати інтегральний вираз потенціальної енергії деформації внутрішніх сил при горизонтальному згині ( $U_{\xi}$ ):

$$U_{\xi} = \int_0^l \frac{M_{yz}^2}{2EI_y} dz \rightarrow U_{\xi} = \frac{P^2 l^3}{2EI_y} \int_0^1 (1 - z/l)^2 \theta_z^2 d \frac{z}{l}. \quad (12)$$

За теоремою Кастільяно маємо запис роботи зовнішніх сил на можливих вертикальних переміщеннях, які виникають при куті повороту перерізу.

$$\Delta_P = \frac{\partial}{\partial P} U_{\xi} = \frac{2P l^3}{2EI_y} \int_0^1 (1 - z/l)^2 \theta_z^2 d \frac{z}{l}. \quad (13)$$

$$A_{P\theta} = P \Delta_P = a_1 \frac{P^2 l_0^3}{EI_y} \int_0^1 (1 - \frac{z}{l})^2 \theta_z^2 d \frac{z}{l}, \quad (14)$$

де для лінійно-пружного матеріалу інтегральний вираз потенціальної енергії деформації внутрішніх сил стиснутого крутіння ( $U_{t\omega}$ ) набуває вигляду.

$$U_{t\omega} = \int_0^l \frac{(M_{t_z} + M_{t\omega_z})^2}{g_{t\omega}} dz = \int_0^l \frac{l(M_{t_z} + M_{t\omega_z})^2}{g_{t\omega}} d \frac{z}{l}. \quad (15)$$

В формулі (15) вказана зведена змінна жорсткість балки при стиснутому крутінні  $g_{t\omega_z}$ , яка прийнята за [8,9] при переході до  $t_z = z/l$  ( $t_z$  - відносна координата перерізу).

$$g_{t\omega_z} = \frac{EI_{\omega 0}}{l^2} f_{t\omega_z} \rightarrow f_{t\omega_z} = [(1 - \gamma_{\omega t_z})^2 \frac{\pi^2}{4} + \frac{GI_{t0} l^2}{EI_{\omega 0}} (1 - \gamma_{t_z})]. \quad (16)$$

Величини крутильного моменту вільного крутіння  $M_{t_z}$  балки та згинно-крутильного моменту стиснутого крутіння  $M_{\omega_z}$  залежать від похідних кутів повороту перерізу [5,8,9].

$$M_{t_z} = GI_{t0}(1 - \gamma_{t_z})\theta'; \quad M_{\omega_z} = -(1 - \gamma_{\omega t_z})^2 EI_{\omega 0} \theta'''. \quad (17)$$

Прийняті дві апроксимуючі функції можливих кутів повороту  $\theta_{1z}$  та  $\theta_{2z}$ , тоді:

$$\theta_z = \theta_{1z} + \theta_{2z}. \quad (18)$$

Граничним умовам (1) задовольняють функції:

$$\theta_{1z} = a_1 f_1 \rightarrow f_1 = (1 - \cos \frac{\pi t_z}{2}); \quad \theta'_{1z} = a_1 f'_1 \rightarrow f'_1 = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t_z}{2}; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \theta_{2z} &= a_2 (1 - \cos \frac{5\pi t_z}{2} + \frac{t_z^2}{2} - \frac{t_z^3}{6}) \rightarrow \\ &\rightarrow f_2 = (1 - \cos \frac{5\pi t_z}{2} + \frac{t_z^2}{2} - \frac{t_z^3}{6}) \end{aligned} \quad (20)$$

За методом В. Рітца (W. Ritz) для двох функцій критерій (11) набуває вигляду.

$$\begin{cases} \frac{\partial(U_{\xi} + U_{t\omega} - A_{P\theta})}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial(U_{\xi} + U_{t\omega} - A_{P\theta})}{\partial a_2} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

У скороченому вигляді за (12...16) маємо відношення.

$$U_{\xi} + U_{t\omega} - A_{P\theta} = \int_0^1 \frac{l(M_{tz} + M_{\omega z})^2}{2g_{t\omega z}} dt_z - \frac{P^2 l^3}{2EI_y} \int_0^1 (1-t_z)^2 \theta_z^2 dt_z \quad (22)$$

При врахуванні (19) та (20) критерій (21) набуває вигляду системи однорідних алгебраїчних рівнянь. Нетривіальне рішення системи буде при рівності нулю головного визначника системи. Відповідні алгебраїчні перетворення дають рівняння для визначення критичної сили.

$$(\Phi_1 - k_{My}^2 T_1)(\Phi_2 - k_{My}^2 T_2) - (\Phi_{12} - k_{My}^2 T_{12})^2 = 0; \quad (23)$$

$$k_{My}^4 - k_{My}^2 \frac{(T_1 \Phi_2 + \Phi_1 T_2 - 2\Phi_{12} T_{12})}{(T_1 T_2 - T_{12}^2)} + \frac{\Phi_1 \Phi_2 - \Phi_{12}^2}{(T_1 T_2 - T_{12}^2)} = 0;$$

$$k_{My}^2 = \frac{P^2 l^6}{EI_{\omega} EI_y} = \frac{(T_1 \Phi_2 + \Phi_1 T_2 - 2\Phi_{12} T_{12})}{2(T_1 T_2 - T_{12}^2)} \pm \sqrt{\frac{(T_1 \Phi_2 + \Phi_1 T_2 - 2\Phi_{12} T_{12})^2}{4(T_1 T_2 - T_{12}^2)^2} - \frac{\Phi_1 \Phi_2 - \Phi_{12}^2}{(T_1 T_2 - T_{12}^2)}} \quad (24)$$

У (23,24) використанні такі відношення:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_0^1 \frac{1}{f_{t\omega z}} \left[ \frac{(GI_{t0})^2 l^6}{(EI_{\omega 0})^2} (1 - \gamma_t t_z)^2 (f_1')^2 + (1 - \gamma_{\omega} t_z)^4 l^6 (f_1''')^2 \right] dt_z - \\ &- 2 \int_0^1 \frac{1}{f_{t\omega z}} \frac{GI_{t0} l^6}{EI_{\omega 0}} (1 - \gamma_t t_z) (1 - \gamma_{\omega} t_z)^2 f_1' f_1''' dt_z; \\ \Phi_2 &= \int_0^1 \frac{1}{f_{t\omega z}} \left[ \frac{(GI_{t0})^2 l^6}{(EI_{\omega 0})^2} (1 - \gamma_t t_z)^2 (f_2')^2 + (1 - \gamma_{\omega} t_z)^4 (f_2''')^2 l^6 \right] dt_z - \\ &- 2 \int_0^1 \frac{1}{f_{t\omega z}} \frac{GI_{t0} l^6}{EI_{\omega 0}} (1 - \gamma_t t_z) (1 - \gamma_{\omega} t_z)^2 f_2' f_2''' dt_z; \\ \Phi_{12} &= \int_0^1 \frac{1}{f_{t\omega z}} \left[ \frac{(GI_{t0})^2 l^6}{(EI_{\omega 0})^2} (1 - \gamma_t t_z)^2 (f_1')(f_2') + (1 - \gamma_{\omega} t_z)^4 (f_1''')(f_2''') l^6 \right] dt_z - \\ &- \int_0^1 \frac{1}{f_{t\omega z}} \frac{GI_{t0} l^6}{EI_{\omega 0}} [(1 - \gamma_t t_z) (1 - \gamma_{\omega} t_z)^2 f_1' f_2''' - (1 - \gamma_t t_z) (1 - \gamma_{\omega} t_z)^2 f_2' f_1'''] dt_z. \end{aligned}$$

Числові дослідження. В таблиці представлені значення приведенного критичного навантаження  $k_{M_y}^2$ , що обчислені за формулою (24). Для всіх розрахунків було прийнято  $\gamma_{\omega} = \gamma_t$ .

Таблиця 1

Значення приведенного критичного навантаження за формулою (24)

$\gamma_{\omega}$	$k_{M_y}^2$ при $k_{r_{\omega}}^2$		
	0.1	0.3	0.5
0	189.3959	196.3181	203.3643
0.1	161.4353	167.9557	174.5961
0.2	135.8012	141.9197	148.1557
0.4	112.5092	118.2266	124.0604
0.5	91.57581	96.89417	102.3282
0.6	73.01804	77.94039	82.97707
0.7	56.85097	61.3807	66.02153
0.8	43.08431	47.22366	51.46709
0.9	31.71659	35.46361	39.30161
0.99	22.72672	26.06969	29.48267

Обчислене за критерієм (24) значення приведеного критичного навантаження  $k_{M_y}^2$  для балки з постійним перерізом при дії на вільному кінці зосередженої сили дорівнює 189 при  $k_{\omega}^2 = 0.1$ , яке на 3,5% відрізняється від значення, що приведене у [2]. При прийнятті однієї апроксимуючої функції за (19) функції рівняння (21) переходе набуває вигляду:

$$\Phi_1 - k_{M_y}^2 T_1 = 0 \rightarrow k_{M_y}^2 = \frac{\Phi_1}{T_1}. \quad (25)$$

Обчислене за формулою (25) значення приведеного критичного навантаження  $k_{M_y}^2$  для балки з постійним перерізом при дії на вільному кінці зосередженої сили дорівнює 246 при  $k_{\omega}^2 = 0.1$ , що на 32% вище за аналітичне значення отримане у [2].

**Висновки та перспективи.** Отримані результати слід вважати приблизним розв'язком розглянутої задачі, але дослідження дають відповідь на питання, в якому діапазоні слід шукати точне значення критичного навантаження.

1. *Баженов В.А., Гранат С.Я., Шишов О.В. А.С.*, Будівельна механіка.– К.; 1999. – 584 с.
2. *Тимошенко С.П.* Устойчивость стержней пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971.– 808 с.
3. *Власов В.З.* Тонкостенные упругие стержни. – М.: Госиздат, Физматгиз, 1959 – 568 с.
4. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник./Под ред. И.А.Биргера и Я.Г.Пановко. Т.3. - М.: Машиностроение, 1968 - 567 с.
5. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
6. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашенников, Н.Н. Шапошников. - М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
7. *Сладков С.И.* Устойчивость плоской формы изгиба балок с настилом.//Сопротивление материалов и теория сооружений. Вып.55. - К.: Будівельник, 1989 - С. 86-89.
8. *Білик С.І.* Просторова робота сталевих тонкостінних балок із змінною висотою стінки. // Современные строительные конструкции из металла и древесины. Сб. науч. Тр. Ч. I. - Одесса: МОН України, Одесская ГАСА, 2006 - С.4-11.
9. *Білик С.І.* Стійкість плоскої форми згину сталевих двотаврових балок із змінною висотою стінки. // Будівельні металеві конструкції: сьогодення та перспективи розвитку. V Міжн. наук.-техн. конф., 18-22 вересня 2006 р. – К.: Видавництво „Сталь”, 2006. – С. 90-92.