

## КОНТРОЛЬ АЕРОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЕЛЕМЕНТІВ ЛОПАТЕВОГО АПАРАТУ ГАЗОПЕРЕКАЧУВАЛЬНОГО АГРЕГАТУ З УРАХУВАННЯМ ЗМІНИ ЇХ КОНФІГУРАЦІЇ

Леонід Заміховський, Наталія Іванюк

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, вул. Карпатська, 15, Ів-Франківськ, Україна

## GAS-PUUMP UNITS VANE APPARATUS ELEMENTS AERODYNAMICAL CHARACTERISTICS CONTROL TAKING TO ACCOUNT THE CONFIGURATION CHANGES

Leonid Zamikhovskii, Natalia Ivanjuk

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Carpathian str., 15, Iv-Frankivsk, Ukraine

**АНОТАЦІЯ.** Проаналізовано результати розрахунків аеродинамічних характеристик еліптичних профілів лопатей за розробленою методикою на основі інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, встановлено особливості процесу обтікання лопатей за різних значень кута атаки та параметрів еліпса. Розглянуто особливості відтворення профілю лопатей за експериментально-визначеними координатами певної множини точок їх поверхні. Проведено розрахунки аеродинамічних характеристик для різних типів геометрії лопатей.

**Ключові слова:** лопать, обтікання, інтегральне рівняння, профіль, аеродинамічні характеристики, зношення.

**АННОТАЦИЯ.** Проанализированы результаты расчетов аэродинамических характеристик эллиптических профилей лопастей по предложенной методике на основе интегрального уравнения Фредгольма второго рода, установлены особенности процесса обтекания лопастей при разных значениях угла атаки и параметров эллипса. Рассмотрены особенности восстановления профиля лопаток по экспериментально определенным координатам определенного множества точек их поверхности. Проведены расчеты аэродинамических характеристик для разных типов геометрии лопастей.

**Ключевые слова:** лопасть, обтекания, интегральное уравнение, профиль, аэродинамические характеристики, износ.

**SUMMARY. Purpose.** To estimate the influence of the gas pump units vane apparatus aerodynamic characteristics for the investigation of the gas-pump unit technological parameters. **Methodology/approach.** A theoretical framework is proposed based on the integral equation for the tangential velocity components definition using numerical method and the profile aerodynamical characteristics calculations. The depending on between such parameters and the angle of attack and the vane space configuration are investigated. **Findings.** It is possible to apply the theoretical results for the investigation and estimation of the vane configuration changing influence on the gas pump unit productivity. **Research limitations/implications.** The present study provides a starting point for the gas pump unit technical state non-destructive control system design. **Originality/value.** The presented results allows to increase the tested equipment and systems reliability, which is useful for the objects of Ukrainian gas and oil industry.

**Key words:** vane, gas flow, integral equation, profile, aerodynamic characteristics, wear and tear.

### Вступ

Контроль технічного стану лопатей лопатевого апарату газоперекачувальних агрегатів (ГПА) – компресорів низького і високого тисків, турбін високого і низького тисків, нагнітачів здійснюється, як правило, при зупинці ГПА та демонтажі лопатевого апарату шляхом прямих вимірювань або з використанням методів візуально-оптичного контролю, магнітопорошкової діагностики та кольорової дефектоскопії на основі чого приймається рішення стосовно ремонту лопатей шляхом відновлення їхніх геометричних розмірів або проведення заміни. В той же час розроблено та активно використовуються математичні методи розрахунку параметрів дозвукової течії навколо крилових профілів – зокрема, метод дискретних вихорів [1], методи інтегральних рівнянь [2]. При цьому вивчаються різні типи обтікання – стаціонарне безвідривне, нестаціонарне,

нестаціонарне в рамках моделі пограничного шару тощо – залежно від характеру задачі, що вирішується. Основні результати стосовно реалізації вказаних методів, як комплексу програмних продуктів, були одержані наприкінці ХХ століття, проте вони постійно вдосконалюються завдяки розвитку відповідного програмного забезпечення та підвищення швидкодії засобів обчислювальної техніки. Це викликає необхідність вивчення аеродинамічних процесів, які відбуваються в конструкції лопатевого апарату ГПА в процесі функціонування та дослідження можливості використання сучасних методів аеродинаміки дозвукових потоків газу як для оцінки його технічного стану, так і визначення ефективності роботи ГПА.

**Метою статті** є розробка методу контролю аеродинамічних характеристик

лопатею лопатевого апарату ГПА з використанням методу математичного моделювання процесу обтікання та оцінка їхньої зміни внаслідок зміни технічного стану лопатей, обумовленого величиною їхнього зношення, втратою початкової геометричної конфігурації та зміною кута атаки лопатей, що є характерним для функціонування ГПА сучасних конструкцій.

### Виклад основного матеріалу

Характер обтікання лопатей та їхні геометричні особливості – незначні лінійні розміри, дозвукова швидкість руху лопатей дозволяють прийняти обґрунтоване рішення відносно застосування моделі плоскопаралельного безвідриного обтікання профілю лопаті ідеальною нестисненою рідиною в рамках стаціонарної моделі і розробити ефективні обчислювальні алгоритми для визначення основних аеродинамічних характеристик досліджуваних профілів, до яких відносяться коефіцієнти опору, підйимальної сили та обертового моменту, а також оцінити динаміку зміни цих параметрів у процесі зносу лопаті. В рамках оцінки технічного стану елементів конструкції ГПА в умовах їхньої реальної експлуатації на компресорних станціях вказані моделі та результати застосовуються вперше. Розв'язуючи інтегральне рівняння Фредгольма другого роду відносно дотичної компоненти швидкості [3], отримаємо

$$V_{\theta}(\theta_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V_{\theta}(\theta) K(\theta; \theta_0) d\theta + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_0), \quad (1)$$

де  $V_{\theta}$  – дотична до профілю лопаті компонента швидкості;  $K(\theta, \theta_0)$  – ядро інтегрального рівняння

$$K(\theta; \theta_0) = \frac{[y(\theta) - y(\theta_0)]x'(\theta_0)}{(y(\theta) - y(\theta_0))^2 + (x(\theta) - x(\theta_0))^2} - \frac{[x(\theta) - x(\theta_0)]y'(\theta_0)}{(y(\theta) - y(\theta_0))^2 + (x(\theta) - x(\theta_0))^2}, \quad (2)$$

де  $x(\theta), x(\theta_0), y(\theta), y(\theta_0)$  – координати точок профілю при відповідних значеннях  $\theta$  – полярної координати;  $\Phi(\theta_0)$  – потенціал потоку [2], що набігає на профіль

$$\Phi(\theta_0) = (x(\theta_0) \cos \alpha + y(\theta_0) \sin \alpha) V_{\infty}, \quad (3)$$

де  $V_{\infty}$  – швидкість газового потоку на достатній відстані від профілю;  $\alpha$  – кут атаки, можна визначити компоненти  $V_{\theta}(\theta)$  та аеродинамічні характеристики:

- коефіцієнт лобового опору лопаті:

$$C_x = - \int_0^{2\pi} \left[ 1 - \frac{V_{\theta}^2(\theta)}{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} \right] y'(\theta) d\theta; \quad (4)$$

- коефіцієнт підйимальної сили:

$$C_y = \int_0^{2\pi} \left[ 1 - \frac{V_{\theta}^2(\theta)}{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} \right] x'(\theta) d\theta; \quad (5)$$

- коефіцієнт обертового моменту:

$$C_{mz} = \int_0^{2\pi} \left[ 1 - \frac{V_{\theta}^2(\theta)}{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} \right] \times \\ \times (x(\theta)x'(\theta) + y(\theta)y'(\theta)) d\theta. \quad (6)$$

При отриманні формул (4)-(6) було здійснено перехід до фізичних компонент вектора швидкості з урахуванням реальної довжини базисних векторів та переходу до одиничних векторів базисів у криволінійних координатах, в яких проводяться розрахунки. За вказаною моделлю проведено чисельний розв'язок задачі за плоскопаралельним обтіканням крилового профілю [4].

Переріз профілю лопаті являє собою криловий профіль малої товщини  $\left(\frac{\delta}{L}\right) \sim 0.1 \div 2$ , де  $\delta$  – максимальна товщина профілю;  $L$  – максимальна довжина хорди крила.

В пов'язаній з профілем системі координат будується аналогічне подання функції  $f(\theta)$ , яка задає її геометрію.

В градусній системі координат геометрія профілю задається наступним чином:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} = \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\ y = f(\theta), \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (7)$$

де  $\theta$  – полярний кут.

Вказаний підхід дозволяє побудувати аналітичне подання функції  $f(\theta)$ , виходячи із двох наступних допущень:

- передня кромка профілю являє собою частину еліпса, причому верхня та нижня поверхні профілю задаються еліпсом з різним ексцентриситетом;

- інші сектори верхньої та нижньої поверхні профілю лопаті моделюються багаточленом Ерміта (рис.1) з використанням умов неперервності профілю: профіль моделюється функцією  $f(\theta)$ , яка в точці спряження з еліптичним сектором є неперервною зі своїми двома похідними.

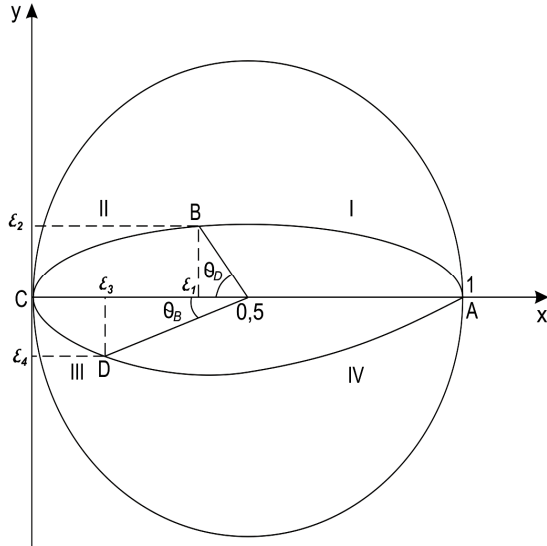


Рис. 1. Спосіб аналітичного задання профілю з використанням рівняння еліпса та багаточленів Ерміта

Fig. 1. Analytical method default profile using the equation of an ellipse and polynomials Hermite

Сектор II, ділянка BC. На даній ділянці подання (7) задається у формі:

$$\begin{cases} x = \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\ y = f_1(\theta), \end{cases} \quad \theta_B \leq \theta \leq \pi, \quad (8)$$

$$\text{де } f_1(\theta) = f_1(x(\theta)) = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \sqrt{2x\epsilon_1 - x^2}, \quad (9)$$

$\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$  - відповідно велика та мала півосі еліпса:

$$\frac{(x - \epsilon_1)^2}{\epsilon_1^2} + \frac{y^2}{\epsilon_2^2} = 1. \quad (10)$$

Знак «+» перед множником  $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$  означає, що розглядається верхня поверхня еліпса, кут  $\theta_B$  відповідає точці B.

Сектор III, ділянка CD. В такому випадку подання (7) набуває вигляду:

$$\begin{cases} x = \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\ y = f_2(\theta), \end{cases} \quad \pi \leq \theta \leq \theta_D, \quad (11)$$

де  $f_2(\theta)$  – визначається наступним чином:

$$f_1(\theta) = -\frac{\epsilon_4}{\epsilon_3} \sqrt{2x\epsilon_3 - x^2}. \quad (12)$$

Знак «-» в (12) означає, що розглядається нижня поверхня профілю.

Сектор I, ділянка AB. Подання (7) записується у вигляді:

$$\begin{cases} x = \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\ y = f_3(\theta), \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \theta_B, \quad (13)$$

де  $f_3(\theta)$  – багаточлен Ерміта, який будується за наступними умовами – в точці B задається величинами:

$$\begin{cases} f_3(x_B) = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \sqrt{2x_B\epsilon_1 - x_B^2} = y_{1B}; \\ f_3'(x_B) = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot \frac{\epsilon_1 - x_B}{\sqrt{2x_B\epsilon_1 - x_B^2}} = y_{2B}; \\ f_3''(x_B) = -\frac{\epsilon_1\epsilon_2}{(2x_B\epsilon_1 - x_B^2)^{\frac{3}{2}}} = y_{3B}; \\ f_3(x_A) = y_A, \end{cases} \quad (14)$$

де  $y_A$  – вертикальна координата точки A (в більшості практичних задач  $y_A = 0$ ). За умовами (14) будуємо багаточлен Ерміта за стандартними методами [5].

Сектор IV, ділянка DA. На вказаній ділянці подання (7) записується у вигляді:

$$\begin{cases} x = \cos^2 \frac{\theta}{2}; \\ y = f_4(\theta), \end{cases} \quad \theta_D \leq \theta \leq 2\pi, \quad (15)$$

де  $f_4(\theta)$  – багаточлен Ерміта, що будується за умовами:

$$\begin{cases} f_4(x_D) = -\frac{\epsilon_4}{\epsilon_3} \sqrt{2x_D\epsilon_3 - x_D^2} = y_{1D}; \\ f_4'(x_D) = -\frac{\epsilon_4}{\epsilon_3} \cdot \frac{\epsilon_3 - x_D}{\sqrt{2x_D\epsilon_3 - x_D^2}} = y_{2D}; \\ f_4''(x_D) = \frac{\epsilon_3\epsilon_4}{(2x_D\epsilon_3 - x_D^2)^{\frac{3}{2}}} = y_{3D}; \\ f_4(x_A) = y_A, \end{cases} \quad (16)$$

причому значення  $y_A$  в (16) та (14) співпадають.

Таким чином повністю задається параметризація профілю. Техніка побудови  $f_3(\theta)$  та  $f_4(\theta)$  може бути продемонстрована на наступному прикладі:

$$f_3(\theta) = y_{1B}C_1(x) + y_{2B}C_2(x) + y_{3B}C_3(x) + y_{4B}C_4(x), \quad (17)$$

де  $C_i(x), i=1..4$  – багаточлени третього степеня, які знаходяться з умов:

$$\begin{cases} C_1(x_B) = 1 & C_1'(x_B) = 0 & C_1''(x_B) = 0 \\ C_1(x_A) = 0; \\ C_2(x_B) = 0 & C_2'(x_B) = 1 & C_2''(x_B) = 0 \\ C_2(x_A) = 0; \\ C_3(x_B) = 1 & C_3'(x_B) = 0 & C_3''(x_B) = 1 \\ C_3(x_A) = 0; \\ C_4(x_B) = 1 & C_4'(x_B) = 0 & C_4''(x_B) = 0 \\ C_4(x_A) = 1. \end{cases} \quad (18)$$

Умови (18) однозначно визначають відповідні багаточлени – багаточлен  $C_1(x)$  знаходиться у вигляді:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \times \\ &\times (x - x_A); \\ C_1'(x) &= (2\alpha x + \beta)(x - x_A) + \\ &+ (\alpha x^2 + \beta x + \gamma); \\ C_1''(x) &= 2\alpha(x - x_A) + 2\alpha x + \beta + \\ &+ 2\alpha x + \beta. \end{aligned} \quad (19)$$

Звідси отримується система:

$$\begin{cases} (\alpha x_B^2 + \beta x_B + \gamma) \times \\ \times (x_B - x_A) = 1; \\ (2\alpha x_B + \beta)(x_B - x_A) + \\ + (\alpha x_B^2 + \beta x_B + \gamma) = 0; \\ 2\alpha(x_B - x_A) + 2\alpha x_B + \beta + \\ + 2\alpha x_B + \beta = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Система (20) є системою відносно невідомих  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\begin{cases} \alpha x_B^2 + \beta x_B + \gamma = \frac{1}{x_B - x_A}; \\ \alpha(3x_B^2 - 2x_B x_A) + \beta(2x_B - x_A) + \gamma = 0; \\ \alpha(3x_B - x_A) + \beta = 0, \end{cases} \quad (21)$$

звідки отримується:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} x_B^2 & x_B & 1 \\ 0 & 2x_B - x_A & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_B^2 & x_B & 1 \\ 3x_B^2 - 2x_B x_A & 2x_B - x_A & 1 \\ 3x_B - x_A & 1 & 0 \end{vmatrix}}; \quad (22)$$

$$\det A = \begin{vmatrix} x_B^2 & x_B & 1 \\ 3x_B^2 - 2x_B x_A & 2x_B - x_A & 1 \\ 3x_B - x_A & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} x_B^2 & \frac{1}{x_B - x_A} & 1 \\ 3x_B^2 - 2x_B x_A & 0 & 1 \\ 3x_B - x_A & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\det A} \quad (23)$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} x_B^2 & x_B & \frac{1}{x_B - x_A} \\ 3x_B^2 - 2x_B x_A & 2x_B - x_A & 0 \\ 3x_B - x_A & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\det A} \quad (24)$$

Багаточлен  $C_2(x)$  знаходиться із формули:

$$\begin{cases} C_2(x) = (x - x_B)(\alpha x + \beta)(x - x_A); \\ C_2'(x) = (\alpha x + \beta)(x - x_A) + \alpha(x - x_B) \times \\ \times (x - x_A) + (x - x_B)(\alpha x + \beta); \\ C_2''(x) = \alpha(x - x_A) + \alpha x + \beta + \alpha(x - \\ - x_A) + \alpha(x - x_B) + \alpha x + \beta + \alpha(x - x_B). \end{cases} \quad (25)$$

З умов  $C_2'(x) = 1; C_2''(x) = 0$  отримується наступна система рівнянь для знаходження невідомих величин  $\alpha$  та  $\beta$ :

$$\begin{cases} \alpha x_B + \beta = \frac{1}{x_B - x_A}; \\ \alpha(2x_B - x_A) + \beta = 0. \end{cases} \quad (26)$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{x_B - x_A} & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_B & 1 \\ 2x_B - x_A & 1 \end{vmatrix}}. \quad (27)$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} x_B & \frac{1}{x_B - x_A} \\ 2x_B - x_A & 0 \end{vmatrix}}{x_B - x_A}. \quad (28)$$

Багаточлен  $C_3(x)$  записується у вигляді:

$$C_3(x) = (x - x_B)^2(x - x_A)\alpha. \quad (29)$$

Константа ж знаходиться з умови:

$$C_3''(x_B) = 1;$$

$$\begin{aligned} C_3'(x) &= 2(x - x_B)(x - x_A)\alpha + \alpha(x - x_B)^2; \\ C_3''(x) &= 2(x - x_A)\alpha + 2(x - x_B)\alpha + \\ &+ 2\alpha(x - x_B); \\ C_3''(x) &= 2(x_B - x_A)\alpha = 1. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\alpha = \frac{1}{2(x_B - x_A)}. \quad (31)$$

Багаточлен  $C_4(x)$  має вигляд:

$$C_4(x) = (x - x_B)^3\alpha. \quad (32)$$

З умови  $C_4(x_A) = 1$ :

$$\alpha = \frac{1}{(x_A - x_B)^3}. \quad (33)$$

Таким чином побудову  $f_3(x)$  завершено. Вказаний підхід дозволяє суттєво підвищити точність моделювання профілів лопатей та розрахунку їхніх аеродинамічних параметрів, які експлуатуються тривалий час.

Поданий алгоритм реалізовано як комплекс програм. Проведено тестові розрахунки, результати яких представлено на рис.2, 3.

Встановлено, що при зміні кута атаки коефіцієнт лобового опору росте за абсолютною величиною, причому характер такого росту визначається геометричними характеристиками профіля. Існує значення кута атаки, за якого опір є мінімальним.

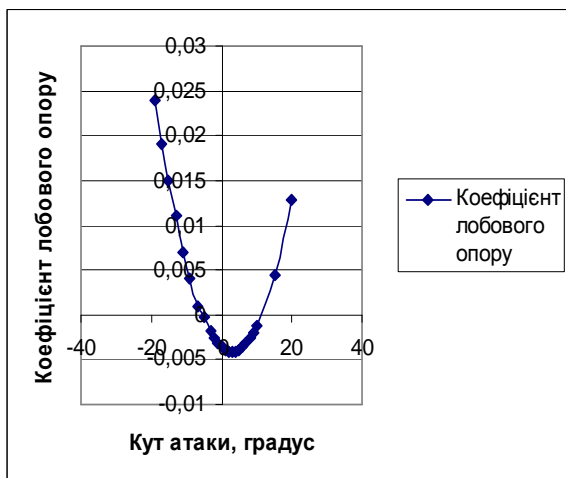


Рис.2. Залежність коефіцієнта лобового опору від кута атаки при сталій геометрії профіля

Fig.2. The dependence drag of coefficient on the angle attack at constant geometry profile

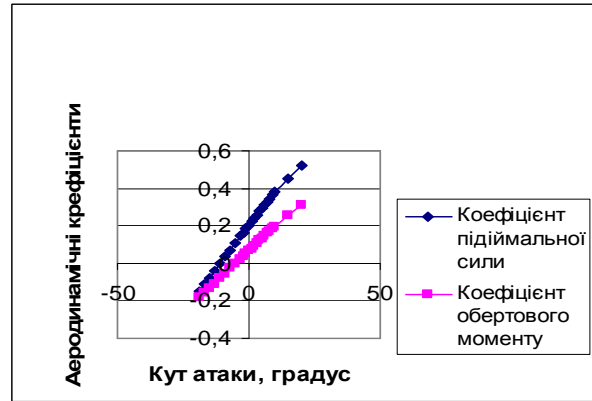


Рис.3. Залежність коефіцієнтів підйимальної сили та обертового моменту від кута атаки при сталій геометрії профілю

Fig.3. Dependence of the lift force and torque on the angle of attack at constant geometry profile

Представлені результати стосуються профіля, для якого передня кромка у верхній частині є фрагментом еліпса з малою піввіссю 0.045, а в нижній – з малою піввіссю 0.015.

Коефіцієнт підйимальної сили та коефіцієнт обертового моменту монотонно змінюються за зміною кута атаки, причому ця зміна суттєво залежить від геометрії профілю. Були проведені наступні чисельні дослідження:

- встановлено залежність параметрів  $C_x$ ,  $C_y$  та  $C_{mz}$  від степеня зносу верхньої поверхні лопаті. Виявлено стрибкоподібну зміну значень параметрів при відповідних значеннях великої піввісі еліпса, який моделює верхню поверхню;

- наведено залежність цих параметрів від степеня зносу нижньої поверхні лопаті. Виявлено закономірність зміни значень параметрів при відповідних значеннях великої піввісі еліпса, який моделює нижню поверхню, що полягає в монотонному спаданні відповідних характеристик при зношенні нижньої частини передньої кромки лопатки;

- наведено залежність цих параметрів від степеня зносу нижньої та верхньої поверхонь лопаті. Виявлено закономірність зміни значень параметрів при відповідних значеннях великих півосей еліпсів, які моделюють нижню та верхню поверхні, наведені результати свідчать про те, що при

одночасному зношенні верхньої та нижньої частини профіля лопаті зміна параметрів  $C_x$ ,  $C_y$  та  $C_{mz}$  відбувається інтенсивніше, ніж при зміні однієї з частин кромки лопаті;

- досліджено залежність аеродинамічних параметрів від ступеня зносу нижньої та верхньої поверхонь лопаті за різних значень кута атаки та змінній геометрії профіля. Виявлено монотонну зміну значень параметрів за відповідних значень великих півосей еліпсів, які моделюють нижню та верхню поверхні.

Значення кутів атаки дозволяють моделювати різні ступені викривлення профілів, замінити розв'язання тривимірної задачі аеродинаміки послідовністю одновимірних з урахуванням зміни за довжиною лопаті як її геометричних розмірів, так і кручення.

#### Висновки

За результатами проведених досліджень можна зробити висновки про те, що розроблена математична модель процесу обтікання профілів ідеальною рідиною та її чисельна реалізація дозволяє отримати ефективні методи оцінки та аналізу аеродинамічних параметрів лопатей лопатєвого апарату ГПА, адекватність моделі та точність результатів підтверджена шляхом паралельного розв'язання тестових задач за різними методами (метод дискретних вихорів, метод конформного відображення). Вказаний підхід в подальшому може бути реалізований для вирішення задач аналітичного подання більш складних профілів лопаті крилового типу з використанням інтерполяційних поліномів, а також для вивчення аеродинамічних процесів, що відбуваються на інших об'єктах системи транспортування нафти і газу.

#### Література

1. *Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел* / С.М. Белоцерковский и др., под. ред. С.М. Белоцерковского – М.: Наука, гл. ред. физ. - мат. лит., 1988 – 232с.

Надійшла до редакції

05.11.2012 р.

2. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина - / К. Флетчер – М.: Мир, 1988 – 352 с.
3. *Шкадов В.Я.* Применение численных методов к расчету аэродинамики элементов летательных аппаратов. / В.Я. Шкадов и др. – Отчет механико – математического факультета МГУ, №3, 1983. – 87 с.
4. *Іванюк Н.І.* Аналітичні дослідження впливу зміни геометрії лопатей газоперекачувального агрегату на параметри їх коливань та аеродинамічні властивості - / Іванюк Н.І. // Прилади та методи контролю якості. – Івано-Франківськ, 2012. – № 1(28). – С. 154–161.
5. *Самарский А. А.* Численные методы / А.А.Самарский, А.В.Гулин.– М.: Наука, 1989. – 432 с.

#### References

1. *Belotserkovskii S.M.*, 1988. Matematicheskoe modelirovanie ploskoparalelnogo otrivnogo obtekanija tel. [The body plane-parallel separated streamline mathematical modeling]. Moscow, Nauka Publ., 232.
2. *Fletcher K.*, 1988. Chislennie metody na osnove metoda Galerkina. [Numerical methods based on the Galerkin method]. Moscow, Mir Publ., 352.
3. *Shkadov V.Ja.*, 1983. Primenenie chislennikh metodov k raschety aerodinamicheskikh kharakteristik letatelnykh apparatov. [Numerical method applying to calculate the aircraft aerodynamically characteristics]. Otchet mehaniko – matematicheskogo fakulteta MGU [Report mechanical - mathematics faculty of MSU], no. 3, 87.
4. *Ivanjuk N. I.*, 2012. Analitichni doslidzhennja vplivu zmini geometrii lopatej gazoperekachuvalnogo agregatu na parametri ih kolivan ta aerodinamichni vlastivosti [Analytical study of the impact of changing the geometry of the blades gas compressor units on the parameters of vibrations and aerodynamic properties]. Prilady i metody kontrolyu jakosti [Devices and methods for quality control], no 1(28), 154-161.
5. *Samarskii A.A., Gulin A.V.*, 1989. Chislennie metody [Numerical methods]. Moscow, Nauka Publ., 232.

Затверджена до друку

09.11.2012 р.