

## **ПРИНЦИП ТА МЕТОДИ АНАЛІЗУ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ УДАРНО-ВІБРАЦІЙНИХ МАЙДАНЧИКІВ З ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПРИВОДОМ**

Зростаючі масштаби виробництва збірного залізобетону на сучасному етапі вимагають неперервного вдосконалення й створення нових високопродуктивних машин та обладнання для механізації технологічних процесів. Найбільш важливим з них є формування. Цей процес забезпечується у значній мірі за допомогою використання машин вібраційної (ударно-вібраційної) дії: вібраційних майданчиків та обладнання, що реалізують гармонічні коливання. Останнім часом переважною тенденцією, що намітилась, є застосування саме вібротехніки ударної дії [1-5]. При цьому слід відмітити їх високу ефективність для формування широкої номенклатури виробів будівельної індустрії. Разом з тим ще недостатньо вивчені явища, що відбуваються у вібротехніці "машина-середовище" при виникненні ударних та автоколивань. Слід прикласти значні зусилля для відшукування оптимальних умов їх роботи і керування, для визначення критеріїв ефективності функціонування та стійкості періодичних режимів роботи. Зокрема, однією з актуальних задач є вибір конструкції вібротехніки, що реалізує необхідні коливання за мінімальних витрат енергії, а також кількості мас (дво- та тримасова) системи, в якій відбувається формування бетонної (будівельної) суміші подібним методом.

**Метою даної роботи** є обґрунтування основних принципів та вибір надійних методів (у т.ч. машинно-орієнтованих) аналізу нелінійної динаміки ударно-вібраційних майданчиків з електромагнітним приводом.

Аналіз великої кількості точних розв'язків у нелінійних неавтономних системах [8] дозволяє стверджувати, що основні нелінійні ефекти у цих системах є проявом внутрішніх коливань властивостей системи, тобто вільних коливань.

Такий підхід передбачає, що у системах визначальну роль при коливаннях відіграють пружні відновлюючі сили. Тому з'являється можливість на основі аналізу вільних коливань системи та параметрів вимушуючої (електромагнітної) сили передбачити можливість тих чи інших нелінійних ефектів без звичайних математичних обчислень та розрахунків. Опис основних властивостей нелінійних коливань систем з використанням лише вказаних фізичних міркувань даний у першій частині роботи.

Складова електромагнітної частини приводу впливає на визначення особисто її параметрів, а на закон руху системи в цілому не впливає. Вдосконаленням існуючої двомасової схеми [2-5] є перехід до більш складних тримасових схем машин, які дають можливість реалізувати зовнішній вплив на виріб, що формується, частот, які відмінні від основної.

У класичних нелінійних системах, наприклад, ударних, виникають частоти, відмінні від основної (супер- та субрезонансні), а у даній роботі пропонується цілеспрямоване збагачення ударно-коливного спектру системи.

Відомо [9], що багатомасні вібраційно-ударні системи (ВУС) (у даній роботі приймається варіант тримасової ВУС) з кількома ударними парами набувають різноманітних структур і можливих періодичних режимів руху. Аналітичні методи динамічного розрахунку розроблені лише для найпростіших ВУС. Найпростішими періодичними режимами руху таких систем є так звані правильні [10], коли у кожній ударній парі відбувається лише один удар за період.

Для багатомасних ВУС безпосереднє застосування умов періодичності призводить до систем рівнянь високої розмірності відносно невідомих постійних інтегрування. Тому

для розрахунків правильних рухів використовують, зазвичай, іншу методику, що полягає в наступному: умови періодичності записують окремо для кожного із ланцюгів й зв'язують ці умови для сусідніх ланцюгів, використовуючи рівняння їх удару одного з одним. Послідовно переходячи від одного ланцюга до другого у напрямку, протилежному напрямку передачі ударного імпульсу від джерела збудження, визначають у результаті рекурентного процесу невідомі швидкості ланцюгів до й після удару їх один з одним.

1. Принципи та розрахункові схеми для аналізу реакції ВУС.

Відомо [6], що при проектуванні ВУС, які знаходяться під впливом удару (ударів), їх міцність (ефективність формування бетонної (будівельної) суміші) визначається за реакцією на удар. Ця характеристика визначається або переміщенням одного елемента обладнання (ВУС) відносно іншого, або величиною динамічних навантажень, які сприймаються обладнанням. Реакція системи може бути визначена за часовою залежністю параметрів удару відомими розрахунковими методами. Однак, використовуючи методи перетворення результатів вимірювань характеристик удару, можна знайти безпосередньо зв'язок між ударом та реакцією ВУС.

Для розробки розрахункової схеми представимо обладнання у вигляді спрощеної моделі. Типова схема зображена на рис 1.

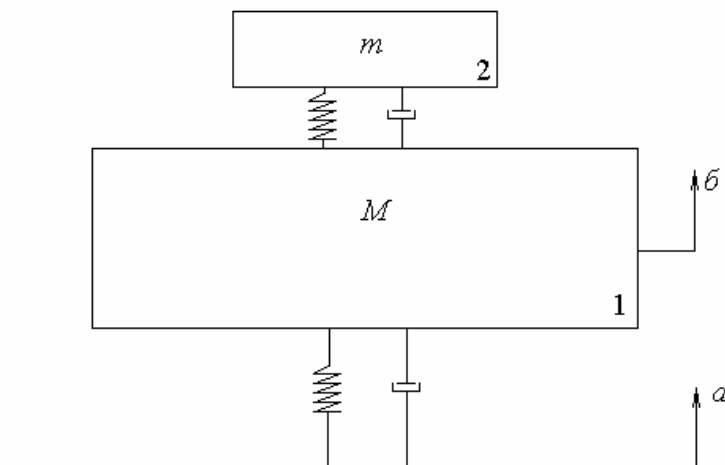


Рис. 1. 1 – головна система; 2 – допоміжна система;  
а – заданий ударний рух, б – реакція головної системи

Вона складається з "допоміжної системи" (верхня маса), що спирається на "основну систему" (нижню масу). В залежності від призначення дослідження певної характеристики реакції ВУС – моделі повинні бути відомі: а) при розрахунку "допоміжної системи" – для цього необхідно знати закон руху "основної системи"; рух "основної системи" є збудженням для допоміжної; б) при розрахунку "основної конструкції (ВУС)" – для цього необхідно знати її переміщення при ударі у вигляді функції часу чи максимальну величину цього переміщення. Кожна система із зосередженими параметрами має один ступінь свободи руху, причому маса  $m$  менше, ніж маса  $M$ . Тому, на рух маси  $M$  допоміжна система впливає мало (хоча можливі й інші ситуації функціонування ВУС з  $m \approx M$ ). Ударний рух головної маси представляє собою вхідний ударний рух по відношенню до допоміжної системи.

Вибираючи належний метод обробки даних ВУС, інформацію про реакцію системи на удар, яка потрібна для розрахунку елементів системи, отримують на основі вимірювання (та зміни) параметрів руху ВУС у часі.

Іншим прикладом ВУС може слугувати ударно-вібраційний майданчик з електромагнітним приводом (рис. 2).

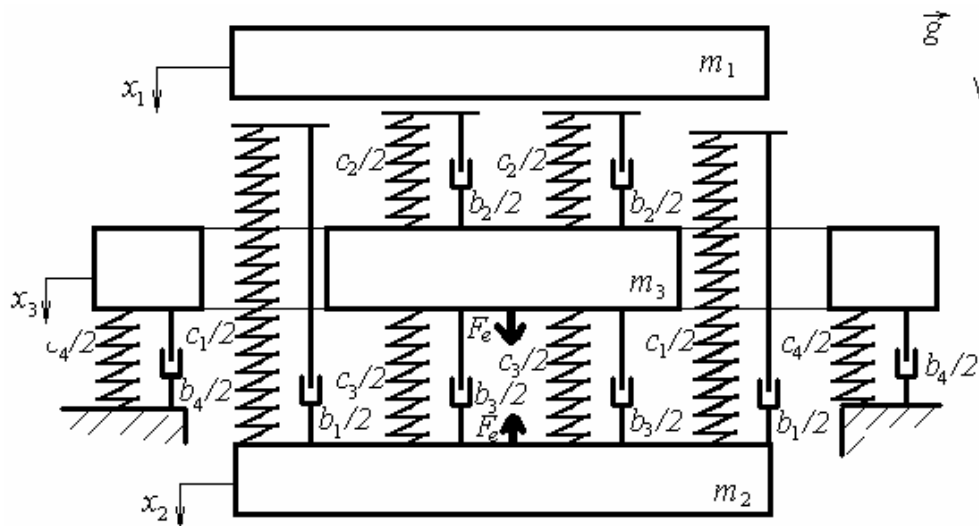


Рис. 2. ВУС з електромагнітним приводом:  
 $F_e$  – електромагнітна сила;  $g$  – прискорення вільного падіння

Установка працює наступним чином: на пружні прокладки ( $c_2, b_2$ ) і пружні елементи ( $c_1, b_1$ ), які закріплені на рухомій рамі ( $m_3$ ), встановлюють форму з бетонною сумішшю ( $m_1$ ) та подають в обмотку статора пульсуючий струм, який створює відносні взаємні переміщення в протифазі якоря і статора, що в свою чергу обумовлює протифазні коливання рухомої рами ( $m_3$ ) і ударника ( $m_2$ ), який буферними елементами ( $c_1, b_1$ ) наносить удар по дну форми ( $m_1$ ). В момент удару або трохи раніше котушка електромагніта знеструмлюється. Після удару маса ( $m_1$ ) відривається від маси ( $m_3$ ), а маса ( $m_2$ ) за допомогою пружних елементів ( $c_3, b_3$ ) рухається в початкове положення. Під дією власної ваги маса ( $m_1$ ) повертається, ударяючись з масою ( $m_3$ ) пружними елементами ( $c_2, b_2$ ) і знову відскакує вгору. У цей час маса ( $m_2$ ) досягає свого крайнього нижнього положення, де і вмикається електромагніт і маси ( $m_2$ ) і ( $m_1$ ) рухаються назустріч одна одній до нового зіткнення. Цикл повторюється. (Слід зазначити, що  $c_i$  – жорсткість  $i$ -го пружного елемента,  $b_i$  – коефіцієнт, що враховує вплив дисипативних сил, які обумовлюють розсіювання енергії коливань і пропорційні швидкості руху  $i$ -ої маси ( $\sim \dot{x}_i$ )).

Для виведення системи рівнянь, що описують вільні (та вимушені) коливання у даній ВУС, застосуємо рівняння у лагранжовій формі (вони принаймні, описують вільні коливання).

Кінетична енергія системи

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2), \quad (1)$$

де крапка над  $x_i$  означає диференціювання по часу  $t$ , а  $x_i(t)$ .

Потенціальна енергія системи

$$\Pi = \frac{1}{2} \{c_1(x_1 - x_2)^2 + c_2(x_1 - x_3)^2 + c_3(x_3 - x_2)^2 + c_4 x_3^2\}. \quad (2)$$

Формула Лагранжа

$$L = T - \Pi. \quad (3)$$

Дисипативні сили є лінійними функціями швидкостей і описуються наступною дисипативною функцією  $\tilde{\Phi}$

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{2} \{b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_3)^2 + b_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2 + b_4 \dot{x}_3^2\}. \quad (4)$$

Рівняння Лагранжа для даної ВУС мають вигляд



$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right\} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \dot{x}_i}, \quad i=1, 2, 3, \quad (5)$$

або

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1(x_1 - x_2) + c_2(x_1 - x_3) = -b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_3); \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_1(x_1 - x_2) - c_3(x_3 - x_2) = b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + b_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2); \\ m_3 \ddot{x}_3 - c_2(x_1 - x_3) + c_3(x_3 - x_2) + c_4 x_3 = b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) - b_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - b_4 \dot{x}_3. \end{cases} \quad (6)$$

Тобто, вільні коливання системи за контакту мас  $m_3$  й  $m_1$  з пружними елементами  $c_1, c_2$  мають вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1(x_1 - x_2) + c_2(x_1 - x_3) + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) = 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_1(x_2 - x_1) + c_3(x_2 - x_3) + b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + b_3(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) = 0; \\ m_3 \ddot{x}_3 + c_2(x_3 - x_1) + c_3(x_3 - x_2) + c_4 x_3 + b_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) + b_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + b_4 \dot{x}_3 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Нехай розв'язки системи (7) мають вид:  $x_i(t) = A_i \cdot e^{j\omega t}$ , де  $A_i$  - амплітуда,  $\omega$  - (кругова) частота вільних коливань ВУС. Тоді, у наближенні  $\omega \cdot b_i \ll c_i$ ; де  $i = (\overline{1,4})$ , характерні частоти ВУС можна записати з наступного рівняння

$$\begin{vmatrix} (-\omega^2 m_1 + c_1 + c_2) & -c_1 & -c_2 \\ -c_1 & (-\omega^2 m_2 + c_1 + c_3) & -c_3 \\ -c_2 & -c_3 & (-\omega^2 m_3 + c_2 + c_3 + c_4) \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

або:

$$\begin{aligned} & (-\omega^2 m_1 + c_1 + c_2) \cdot (-\omega^2 m_2 + c_1 + c_3) \cdot (-\omega^2 m_3 + c_2 + c_3 + c_4) + \\ & + (-c_1 c_2 c_3) + (-c_1 c_2 c_3) - c_2^2 (-\omega^2 m_2 + c_1 + c_3) - \\ & - c_1^2 (-\omega^2 m_3 + c_2 + c_3 + c_4) - c_3^2 (-\omega^2 m_1 + c_1 + c_2) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Характерна частина даної ВУС, що має найбільше значення, лежить в околі частоти  $\Omega_0$

$$\Omega_0 = \left\{ \frac{c_1 + \frac{c_2 c_3}{c_2 + c_3}}{m_1 + m_2 + m_3} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Якби пружний елемент  $(c_1, b_1)$  був відсутній, то значення  $\Omega_0^*$  було б іншим

$$\Omega_0^* = \left\{ \frac{\frac{c_2 \cdot c_3}{c_2 + c_3}}{m_1 + m_2 + m_3} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

У зв'язку з високою інерційністю електромагнітного приводу  $f_0^* = \frac{\Omega_0^*}{2 \cdot \pi}$  не перевищує 20 Гц, а практично складає 13...15 Гц. Для "збільшення" спектру гармонік принаймні вдвічі слід, щоб виконувались наступні рівності

$$c_1 = 3 \cdot \left( \frac{c_2 \cdot c_3}{c_2 + c_3} \right), \quad \Omega_0 = 2 \cdot \Omega_0^*, \quad (12)$$

за інших однакових значень  $m_1, m_2, m_3$ .

Для отримання спектру коливань ВУС втричі більшою за  $\Omega_0^*$  слід виконати наступні умови

$$c_1 = 8 \cdot \left( \frac{c_2 \cdot c_3}{c_2 + c_3} \right), \quad \Omega_0 = 3 \cdot \Omega_0^* \quad (13)$$

Відомо [8], що коефіцієнт ударного імпульсного демпфування  $R_0$  пов'язаний з характеристиками руху маси  $m$ , яка зазнає в'язкого тертя за законом  $R = b \cdot \dot{x}$ , наступним співвідношенням:

$$R_0 = 1 - \frac{b}{m} \cdot \Delta t, \quad (14)$$

де  $\Delta t$  - час контакту маси  $m$  з пружиною, яка має коефіцієнт в'язкості  $b$ .

Виходячи зі співвідношення (14), можна розрахувати величину  $\Delta t \equiv \tau_k$ :

$$\tau_k = \frac{(1 - R_0) \cdot m}{b}. \quad (15)$$

У таблиці 1 наведені значення  $\tau_k$ ,  $c$  з прокладками (та буферами) вібромайданчика форми з бетонною сумішшю маси  $m_1 = 2000$  кг.

Таблиця 1. Час контакту ( $\tau_k$ , с) маси ( $m$ , кг) з пружинами

$c, \frac{H}{m}$	№ варіанту	$b, \frac{H \cdot c}{m}$	$R_0$			
			0,8	0,9	0,95	0,99
$c_2$	1	$3 \cdot 10^4$	0,013	$6,667 \cdot 10^{-3}$	$3,333 \cdot 10^{-3}$	$6,667 \cdot 10^{-4}$
	2	$3,5 \cdot 10^4$	0,011	$5,714 \cdot 10^{-3}$	$2,857 \cdot 10^{-3}$	$5,714 \cdot 10^{-4}$
	3	$5 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$
	4	$10^5$	$4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$
$c_1 + c_2$	1	$3,3 \cdot 10^5$	$1,212 \cdot 10^{-3}$	$6,061 \cdot 10^{-4}$	$3,03 \cdot 10^{-4}$	$6,061 \cdot 10^{-5}$
	2	$3,5 \cdot 10^5$	$1,143 \cdot 10^{-3}$	$5,714 \cdot 10^{-4}$	$2,857 \cdot 10^{-4}$	$5,714 \cdot 10^{-5}$
	3	$5 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$
	4	$10^6$	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$

Розглядувана ВУС (віброударна система) має несиметричну триланцюгову пружну характеристику (рис. 3):

$$f(x) = \begin{cases} p_2^2 \cdot x - (p_2^2 - p_1^2) \cdot \Delta_1, & x \geq \Delta_1, \\ p_1^2 \cdot x, & 0 \leq x \leq \Delta_1, \\ p_3^2 \cdot x, & x \leq 0. \end{cases}$$

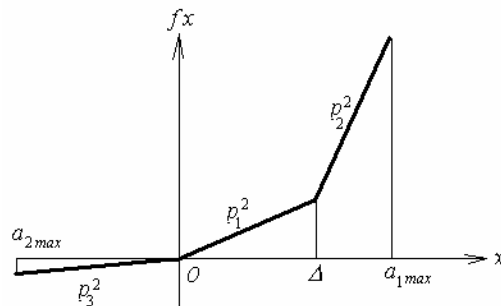


Рис. 3.

На рис. 3  $a_{1max} > 0$  - максимальна амплітуда відхилення (паралельна  $\vec{g}$ ),  $a_{2max} < 0$  - максимальна амплітуда відхилення (протилежний напрямку руху щодо  $\vec{g}$ ).

При цьому введені наступні позначення



$$4\pi^2 \cdot p_1^2 = \frac{c_2}{m_1}; \quad 4\pi^2 \cdot p_2^2 = \frac{c_1 + c_2}{m_1}; \quad 4\pi^2 \cdot p_3^2 = \frac{g}{|a_{2\max}|}. \quad (16)$$

Період вільних коливань розглядуваної ВУС, які охоплюють всі три дільниці  $([a_{2\max}; 0]; [0; \Delta]; [\Delta; a_{1\max}])$ , можна знайти наступним чином [8]

$$T = 2 \cdot (t_1 + t_2 + t_3), \quad (17)$$

де

$$t_1 = \frac{1}{p_1} \cdot \left( \pi - \arctg \sqrt{\left( \frac{a_{1\max}}{\Delta} - 1 \right) \cdot (1 - \beta_2)} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{p_1} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\left( \frac{a_{1\max}}{\Delta} - 1 \right) \cdot (1 - \beta_2)} \right); \quad (18)$$

$$t_2 = \frac{1}{p_2} \cdot \arccos\left(\frac{1}{\beta_2}\right); \quad t_3 = \frac{1}{p_3} \cdot \arccos\left(\frac{1}{\beta_3}\right). \quad (19)$$

У виразах (18), (19)

$$\beta_2 = 1 + \frac{p_2^2}{p_1^2} \cdot \left( \frac{a_{1\max}}{\Delta} - 1 \right); \quad \beta_3 \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Тоді з (19) маємо

$$t_3 = \frac{\pi}{2p_3}. \quad (21)$$

Отже

$$\left. \begin{aligned} T &= 2 \cdot (t_1 + t_2 + t_3), \quad \text{де:} \\ t_1 &= \frac{1}{p_1} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\left( \frac{a_{1\max}}{\Delta} - 1 \right) \cdot (1 - \beta_2)} \right); \\ t_2 &= \frac{1}{p_2} \cdot \arccos\left(\frac{1}{\beta_2}\right); \quad t_3 = \frac{\pi}{2p_3}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

У (22) маємо  $\beta_2 = 1 + \frac{p_2^2}{p_1^2} \cdot \left( \frac{a_{1\max}}{\Delta} - 1 \right)$ .

Частота вільних коливань з урахуванням (22) має вид

$$p \equiv f = \frac{\pi}{(t_1 + t_2 + t_3)}. \quad (23)$$

Залежність між максимальними відхиленнями  $a_{1\max}$  та  $a_{2\max}$ , має вигляд

$$|a_{2\max}| = \left\{ \frac{p_1^2}{p_3^2} \cdot (2\Delta \cdot a_{1\max} + \Delta^2) + \frac{p_2^2}{p_3^2} \cdot (a_{1\max} - \Delta)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

Амплітудно-частотні залежності для даної ВУС наведені на рис. 4.

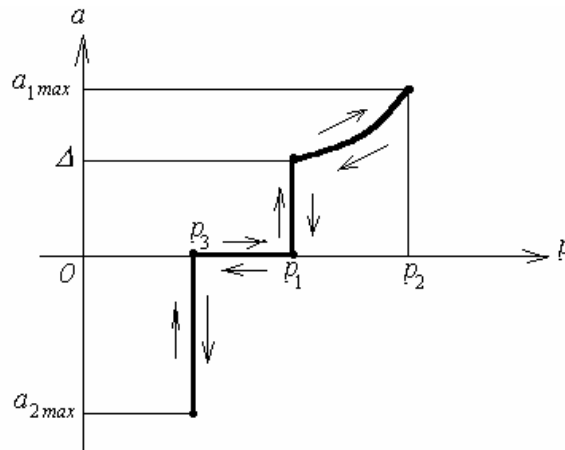


Рис. 4.

При збільшенні розмаху коливань частота вільних коливань ВУС прямує до

$$\tilde{p} = \frac{2p_1 \cdot p_3}{p_1 + p_3}. \quad (25)$$

Таблиця 2. Таблиця розрахунку частот вільних коливань ВУС при  $c_1 = 10^8$ ,  $c_2 = 10^7$ .

$\Delta$ , м	$0,1 \cdot 10^{-3}$			$0,5 \cdot 10^{-3}$			$1 \cdot 10^{-3}$		
$a_{1MAX}$ , м	$1,1 \cdot \Delta$	$1,5 \cdot \Delta$	$2 \cdot \Delta$	$1,1 \cdot \Delta$	$1,5 \cdot \Delta$	$2 \cdot \Delta$	$1,1 \cdot \Delta$	$1,5 \cdot \Delta$	$2 \cdot \Delta$
$p_1$ , Гц	11,254	11254	11,254	11,254	11,254	11,254	11,254	11,254	11,254
$p_2$ , Гц	37,325	37,325	37,325	37,325	37,325	37,325	37,325	37,325	37,325
$p_3$ , Гц	121,24	84,9	55,144	24,248	16,98	11,029	12,124	8,49	5,514
$T$ , с	0,306	0,209	0,189	0,409	0,357	0,417	0,539	0,542	0,701

Висновки.

Отримані основні характеристики руху вібромайданчика з електромагнітним приводом у режимі вільних коливань, зокрема: період та час контакту з пружинами та буферами.

Наявність третьої маси "збагачує" частотний спектр вільних коливань системи.

Визначена амплітудно-частотна (т.з. склетна крива) характеристика системи.

Встановлені фізичні та геометричні залежності параметрів вільних коливань системи будуть у подальшому використані для аналізу стійкості періодичного режиму руху системи та її нелінійних властивостей.

### Література

1. Иносков В.Л., Назаренко И.И., Хо Тхи Ха. Новая электромагнитная низкочастотная виброплощадка ударного действия // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1982. – №7. – С.118-122.
2. Назаренко И.И., Баранов Ю.А. Виброударная площадка для уплотнения бетонных смесей в форме. – А.С. 1316827 (СССР). Опубл. в Б.И., – №32. – 1987.
3. Назаренко И.И., Емченко С.В., Баранов Ю.А. Устройство для уплотнения бетонных смесей в форме. – А.С. 1316827 (СССР). Опубл. в Б.И., – №31. – 1989.
4. Назаренко И.И., Коломиец В.И., Баранов Ю.А. Виброударная площадка для уплотнения бетонных смесей в форме. – А.С. 1316827 (СССР). Опубл. в Б.И., – №31. – 1989.
5. Хо Тхи Ха. Исследования динамики виброплощадки с электромагнитным приводом. – Диссертация канд. техн. наук. – К.: КИСИ, 1982. – 200с.



6. *Сирил М. Харрис, Чарльз И. Крил.* Справочник по ударным нагрузкам. – Л.: Судостроение, 1980. – 360с.
7. *Бычков Ю.А., Васильев Ю.В.* Расчет периодических режимов в нелинейных системах уравнения: Машинно-ориентированные методы. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1988. – 112с.
8. *Закржевский М.В.* Колебания существенно-нелинейных механических систем. – Рига: Зинатне, 1980. – 183с.
9. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В.Н.Челомей (пред.) – М.: Машиностроение, 1979 – Т.2. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И.И. Блехмана, 1979. – 351с.
10. *Нагаев Р.Ф.* Правильные импульсные движения в одномерной системе // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т.31. - №2. – С.242-254.