

УДК 539.3

Баженов В.А., д-р техн. наук,
Кривенко О.П., канд. техн. наук,
Соловей М.О., канд. техн. наук,

ЗБІЖНІСТЬ І ТОЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ ПРОСТОРОВОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА В ЗАДАЧАХ НЕРІВНОМІРНОГО НАГРІВУ СТЕРЖНІВ І БАЛОК

Розглянуті збіжність і точність розв'язків для просторового скінченного елемента при дослідженні напружено-деформованого стану стержнів і балок як тривимірних тіл при дії нерівномірного температурного поля.

Робота присвячена питанню чисельного обґрунтування розробленого методу [1-4] розв'язування задачі статичної стійкості тонких неоднорідних оболонок. Скінченноелементна методика побудована на основі геометрично нелінійних співвідношень тривимірної теорії термопружності та моментної схеми скінченних елементів [5], яка поширена на задачі термопружного деформування оболонок ступінчато-змінної товщини. Апроксимація оболонки за товщиною виконується одним просторовим ізопараметричним скінченним елементом (СЕ).

Розв'язування задач нелінійного деформування оболонок звичайно зводиться до багаторазового розв'язування лінеаризованих систем рівнянь. Ефективність нелінійних методик суттєво залежить від точності лінійного розрахунку. Дослідження збіжності лінійних розв'язків дозволяє виявити основні властивості скінченного елемента та методики нелінійного розрахунку.

Наведені результати дослідження збіжності та точності визначення напружено-деформованого стану стержнів і балок, які розглядаються як тривимірні тіла, при дії нерівномірного температурного поля. У характерних точках відслідковувалися компоненти вектора переміщень і тензора напружень, величини яких можна контролювати.

1. Нерівномірний за довжиною нагрів стержня, защемленого на кінцях.

Розглянутий жорстко затиснутий на кінцях прямий стержень (рис. 1, а), для якого температура у поперечному перерізі прийнята сталою, а її розподіл за довжиною (вздовж осі x^3) здійснюється за степеневим законом (рис. 1, б)

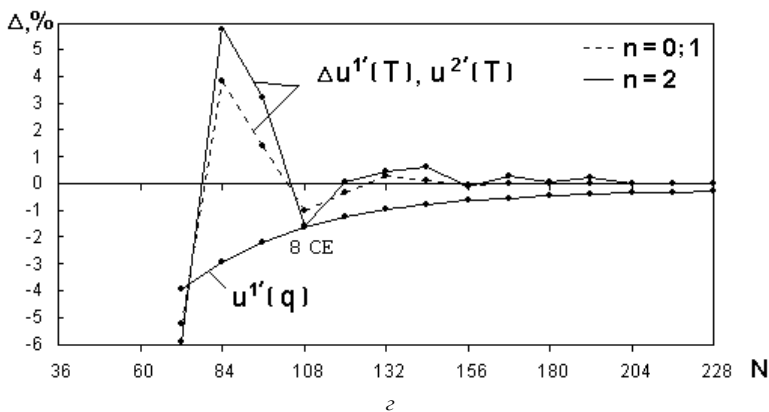
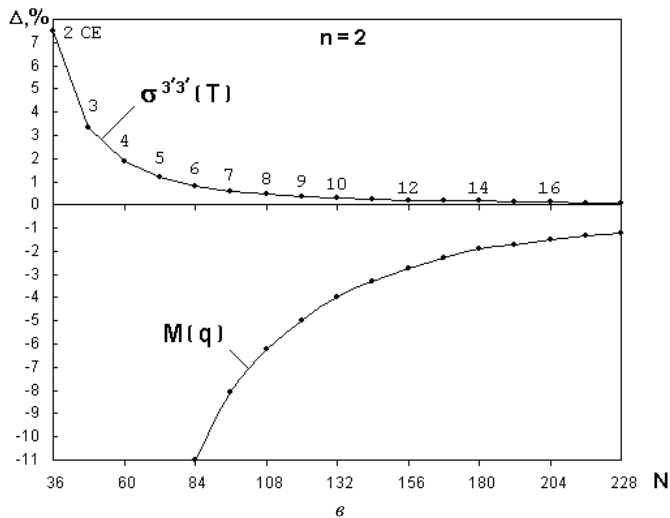
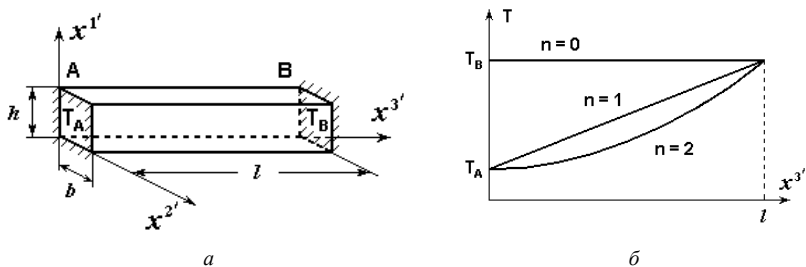


Рис. 1. Збіжність розв'язків для жорстко затиснутого на кінцях стержня при нерівномірних вздовж довжини нагрівів

$$T(x^{3'}) = T_A + (T_B - T_A) \left(\frac{x^{3'}}{l} \right)^n, \quad (1)$$

де T_A та T_B – температура на лівому та правому кінцях стержня, l – його довжина, n – показник степеня.

Дослідження збіжності отримуваних розв'язків виконане для трьох варіантів зміни температури. При $n=0$ температура за довжиною стержня є сталою та дорівнює T_B , при $n=1$ – змінюється лінійно, при $n=2$ – за параболічним законом. Вихідні дані взяті згідно до [6]: $h=4$ см, $b=5$ см, $l=80$ см, $T_A=10^\circ\text{C}$, $T_B=55^\circ\text{C}$, $E=2 \cdot 10^6$ кг/см² – модуль пружності ізотропного матеріалу, $\nu=0$ – коефіцієнт Пуассона, $\alpha=125 \cdot 10^{-7}$ град⁻¹ – коефіцієнт лінійного розширення. Результати виконаних досліджень наведені на рис. 1 - рис. 4 та в табл. 1. Для всіх варіантів розподілу температури повздовжнє напруження $\sigma^{3'3'}$, що є незмінним за довжиною стержня, при порівнянні результатів визначалося за формулою [6]

$$\sigma^{3'3'} = \alpha \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right) E.$$

Величини напруження $\sigma^{3'3'}$ при сталому та лінійному законах зміни температури отримані точно, незалежно від густоти скінченноелементної сітки. Така точність пояснюється тим, що в цій задачі для стержня точно апроксимуються граничні умови, геометрія та температурне навантаження. При параболічному законі отримана швидка монотонна збіжність напружень $\sigma^{3'3'}$ (рис. 1, в; N – число невідомих, Δ – похибка обчислення величин у %). При нагріві стержня за трьома законами для переміщень u^1 та u^2 , що пов'язані з розширенням перерізу на середині довжини, спостерігається швидка осцилююча збіжність (рис. 1, г). Переміщення u^1 є різницею вузлових переміщень ($u'_g - u'_n$) відповідно на верхній ($x^1 = h$) та нижній ($x^1 = 0$) поверхнях стержня, а переміщення u^2 є вузловим переміщенням на серединній поверхні стержня ($x^1 = h/2$). Похибка для напружень $\sigma^{3'3'}$ пов'язана з апроксимацією більш складного (у порівнянні з лінійним) нелінійного розподілу температури. Поява похибок для вузлових переміщень u^1 та u^2 пояснюється моделюванням крайового ефекту поперечного розширення перерізів стержня біля затиснень його кінців.

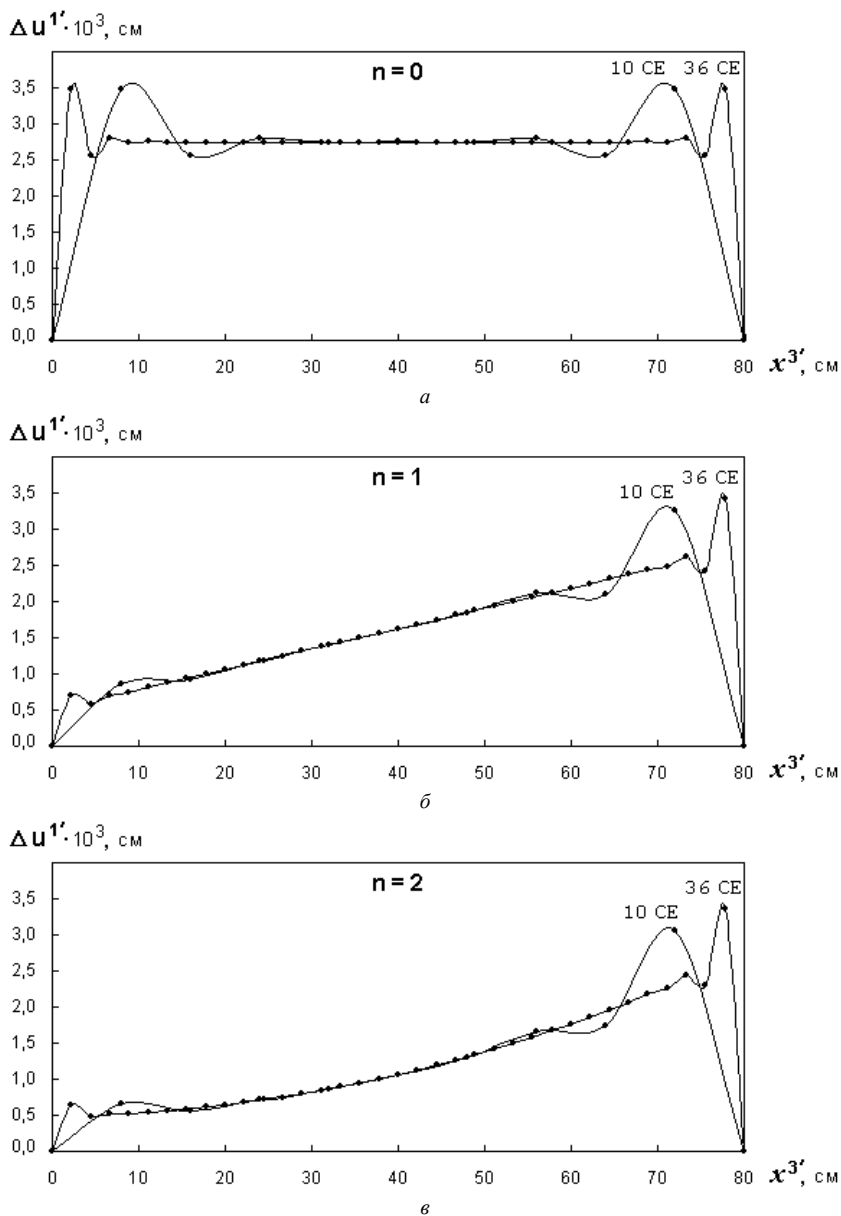


Рис. 2. Крайовий ефект для вертикального розширення у защемленому на кінцях стержні

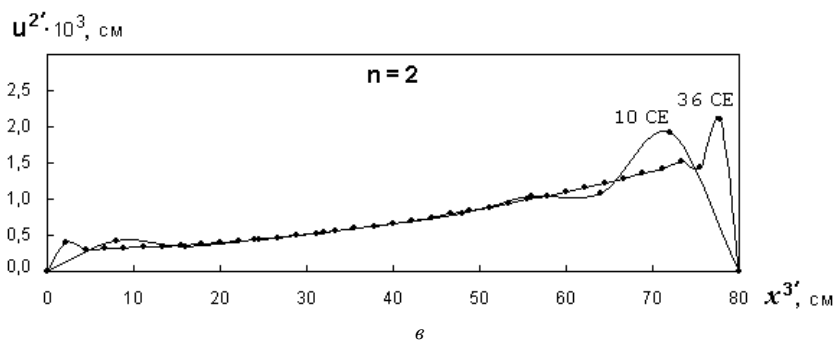
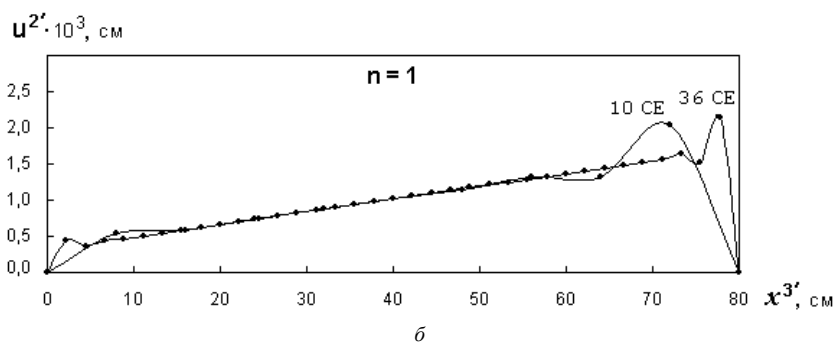
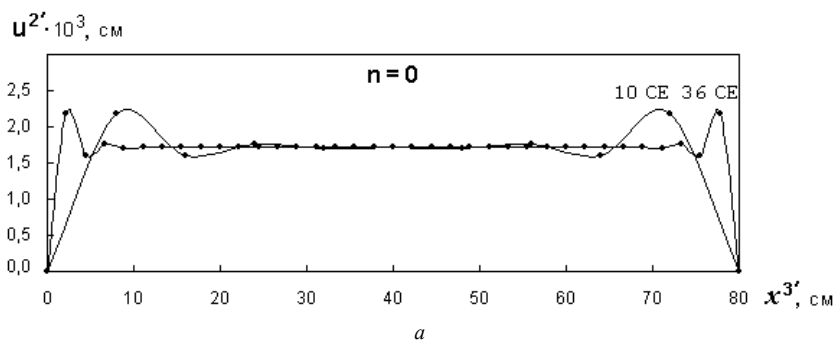


Рис. 3. Крайовий ефект для горизонтального розширення у защемленому на кінцях стержні

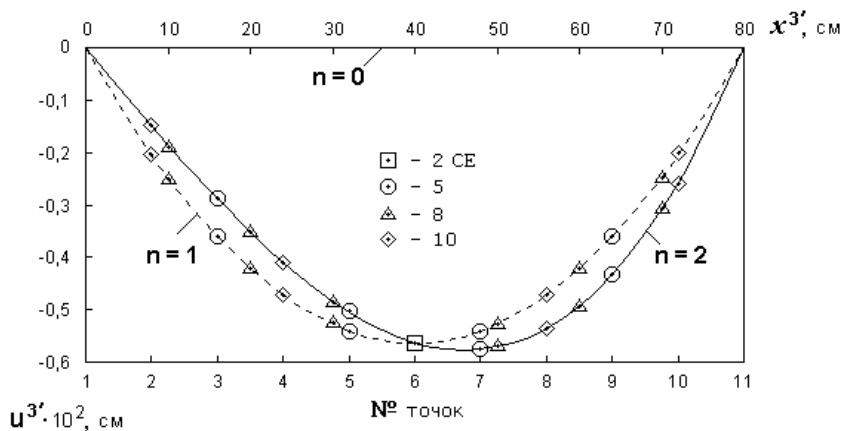


Рис. 4. Епюри повздовжніх переміщень точок защемленого на кінцях стержня

Таблиця 1

Значення повздовжніх переміщень точок защемленого на кінцях стержня при двох нерівномірних за довжиною нагрівах

№ точок	$x^{3'}$, см	$u_{n=1}^{3'} \cdot 10^2$, см	$u_{n=2}^{3'} \cdot 10^2$, см	$(u_{n=1}^{3'} - u_{n=2}^{3'}) \cdot 10^2$, см
1	0	0	0	0
2	8	-0.2025	-0.1485	-0.0540
3	16	-0.3600	-0.2880	-0.0720
4	24	-0.4725	-0.4095	-0.0630
5	32	-0.5400	-0.5040	-0.0360
6	40	-0.5625	-0.5625	0
7	48	-0.5400	-0.576	0.0360
8	56	-0.4725	-0.5355	0.0630
9	64	-0.3600	-0.4320	0.0720
10	72	-0.2025	-0.2565	0.0540
11	80	0	0	0

На рис. 2 і рис. 3 показані епюри поперечних переміщень Δu^1 та u^2 для всіх розглянутих варіантів закону (1) на прикладі двох характерних сіток з рівномірним кроком між вузлами – 10 СЕ та 36 СЕ. Для першої рідкої сітки ефект хвильової поперечної деформації поширюється майже на всю довжину стержня. Для другої більш густої сітки крайовий ефект зосереджується біля опор на $1/9$ довжини стержня. При будь-якій кількості СЕ, більшій ніж вісім, хвильовий характер деформування спостерігається в межах тільки чотирьох найближчих до опор елементів при незмінній величині їх вузлових поперечних переміщень. У середній частині стержня при достатньому (більше 8) числі СЕ поперечні вузлові переміщення Δu^1 та u^2 обчислюються точно, як для тіла, що вільно деформується при температурному нагріві. Ефект хвильової поперечної деформації спостерігається як для лінійного, так і для параболічного законів розподілу температури, як при сталих, так і змінних вздовж стержня кроках сітки. Подальші дослідження підтвердили наявність цього явища також при розгляданні пластин і оболонок, що мають граничні умови жорсткого затиснення.

На рис. 4 наведені епюри повздовжніх вузлових переміщень u^3 при нагріві стержня відповідно за лінійним ($n=1$, пунктирна крива) та параболічним ($n=2$, суцільна крива) варіантами розподілу температури. Відмітимо, що при згущенні сітки переміщення в обох варіантах є ординатами одних і тих же епюр. Таким чином самі епюри при згущенні сітки не змінюються. Епюра, що відповідає лінійному розподілу температури, є симетричною відносно середини стержня. Епюра, що відповідає параболічному розподілу температури, є кососиметричною відносно першої епюри – на скільки ліва половина суцільної кривої розміщується вище пунктирної, на стільки ж її права частина розміщується нижче (табл. 1).

При сталій за довжиною температурі ($n=0$) повздовжні переміщення u^3 отримані нульовими.

Для порівняння наведені криві збіжності розв'язків при дії на стержень поперечного рівномірно розподіленого тиску інтенсивністю q : на рис. 1, в – згинаючого моменту M (на опорах та в центрі), на рис. 1, г – прогину центра стержня u^1 . Відмітимо, що збіжність результатів при дії нагріву настає швидше.

2. Нерівномірний за довжиною нагрів вільно опертої балки.

Розглянута вільно оперта балка (рис. 5, а) при тих самих, як і у попередньому прикладі защемленого стержня, законах розподілу температури (1) (рис. 5, б).

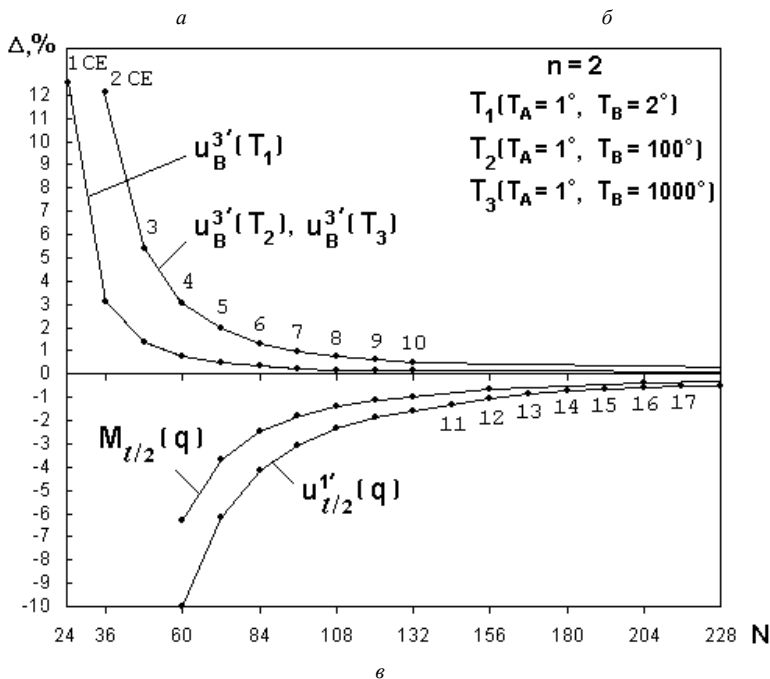
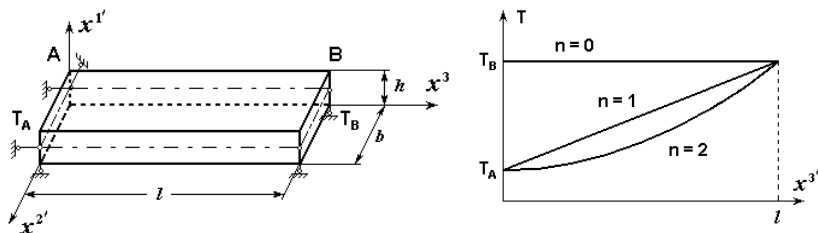


Рис. 5. Збіжність розв'язків для вільно опертої балки при нерівномірних вздовж довжини нагрівах

Прийняті наступні вихідні дані: $h=1$ см, $b=1$ см, $l=10$ см, $E=10$ кг/см², $\nu=0$, $\alpha=1$ град⁻¹. Розглядалися три варіанти величин параметрів

температурного нагріву T_A і T_B : відповідно 1) $1^\circ C$, $2^\circ C$; 2) $1^\circ C$, $100^\circ C$; 3) $1^\circ C$, $1000^\circ C$. Досліджувалася збіжність і точність обчислення повздовжнього переміщення u_B^3 правого кінця балки (переріз B) (рис. 5, в). Для порівняння результатів застосовувалася формула

$$u_B^3 = \Delta l = \alpha l \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right).$$

Для сталого ($n=0$) і лінійного ($n=1$) законів розподілу температури, як і слід було очікувати, усі компоненти вектора переміщень обчислюються точно. При нагріві за параболічним законом ($n=2$) виявлена залежність досить швидкої збіжності повздовжнього переміщення u_B^3 від різниці величин перепаду температур ($T_B - T_A$). Якщо при порівнянні результатів для перепадів температур на $1^\circ C$ (1 варіант) та на $99^\circ C$ (2 варіант) помітна різниця для кривих збіжності, то при порівнянні результатів для перепадів температур на $99^\circ C$ та на $999^\circ C$ (3 варіант) криві збіжності співпадають.

На рис. 5, г для порівняння подані криві збіжності розв'язків при дії на балку рівномірно розподіленого тиску інтенсивністю q : прогину $u_{l/2}^3$ і згинного моменту $M_{l/2}$ в середині балки. Крива збіжності для кутів повороту кінців балки співпадає з кривою для $M_{l/2}$. Як і у попередньому прикладі збіжність результатів при нагріві настає швидше.

3. Нерівномірний за товщиною нагрів консольної балки.

Збіжність і точність розв'язків при лінійному за товщиною (вздовж осі x^1) та сталому на серединній поверхні (вздовж осей x^2 і x^3) розподілі температури, який викликає згин із площини серединної поверхні, досліджені на прикладі консольної балки (рис. 6, а, б). Вихідні дані взяті згідно до [6]: $h=10$ см, $b=10$ см, $l=200$ см, $T_B = -10^\circ C$, $T_H = 50^\circ C$, $E=1$ кг/см², $\nu=0$, $\alpha=118 \cdot 10^{-7}$ град⁻¹. Результати досліджень наведені на рис. 6, в і рис. 6, г.

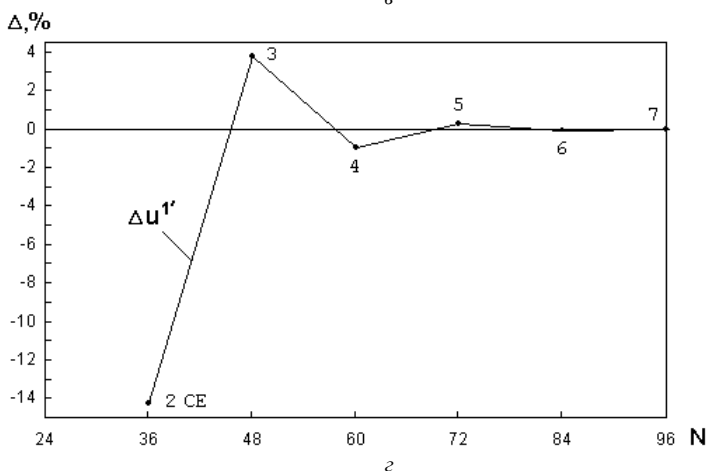
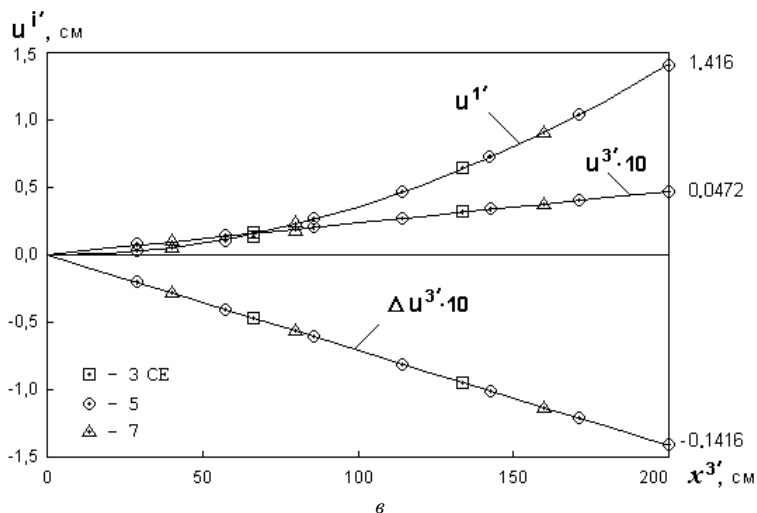
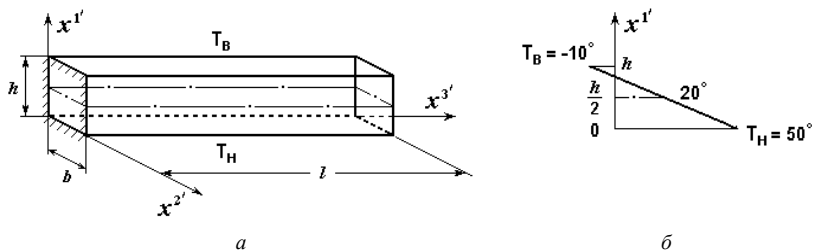


Рис. 6. Збіжність розв'язків для консольної балки при нерівномірному за товщиною нагріві

Для порівняння переміщень точок перерізу вільного кінця балки використовувались наступні формули:

для прогину середини перерізу –
$$u^1 = -\alpha l^2 (T_H - T_B) / 2h,$$

для вертикального розширення перерізу –
$$\Delta u^1 = \alpha h (T_H + T_B) / 2,$$

для повздовжнього переміщення перерізу –
$$u^3 = -\alpha l (T_H + T_B) / 2,$$

для кута повороту перерізу –
$$\phi = \Delta u^3 = \alpha l (T_H - T_B) / h,$$

де Δu^3 – різниця вузлових переміщень ($u_g^3 - u_n^3$) відповідно на верхній ($x^1 = h$) та нижній ($x^1 = 0$) поверхнях балки.

Вже один скінченний елемент дає точні значення для переміщень u^1 , u^3 та Δu^3 . Величини цих переміщень не залежать від густоти сітки, тому, наприклад, при розбитті балки на 3, 5 та 7 СЕ, вони точно попадають на теоретичні криві (рис. 6, в). Для переміщення Δu^1 характерна швидка осцилююча збіжність (рис. 6, г). Причина появи похибки пов'язана з хвильовим характером поперечної деформації балки у защемленого кінця, як це спостерігалось у попередньому прикладі нагріву жорстко затиснутого на обох кінцях стержня.

На цій же балці з квадратним перерізом досліджена точність розв'язків при аналогічному нерівномірному нагріві, але вже в площині серединної поверхні (лінійному вздовж осі x^2 та сталому вздовж осей x^1 і $x^{3\odot}$). Цей розподіл температури викликає згин балки в площині її серединної поверхні. Прогин кінця балки, яка поділена, наприклад, на 10 СЕ, становить 1.4172 см, що на 0.08% більше від точного результату. Таким чином, розв'язки цих двох задач підтверджують однакові властивості просторового скінченного елемента в напрямку його товщини (в якому прийнята гіпотеза прямої лінії [1]) та в обох напрямках на серединній поверхні СЕ.

Для порівняння розглянуті результати дослідження збіжності та точності розв'язків для консольної балки при дії різних силових навантажень. При дії повздовжнього стиску один СЕ дає точний розв'язок для повздовжньої сили, повздовжніх і поперечних переміщень. При розрахунку на згин із площини серединної поверхні балки моделювання одним СЕ дає точні значення повздовжніх і поперечних сил, а також кута повороту вільного кінця балки; два СЕ дають величину прогину кінця консолі з похибкою 3.8%, три СЕ зменшують її до 0.3%. При згині в площині серединної поверхні балки від пари сил один СЕ дає точний результат по переміщенням і напруженням, а при згині там же від дії

однієї сили один СЕ дає точний розв'язок для кута повороту та напружень, два СЕ дають для переміщення кінця балки під силою похибку 2.3%, три СЕ – 1.1%. При розрахунку консольної балки на кручення один СЕ дає для дотичних напружень та кута повороту похибку в 2%, а два СЕ – 1%.

1. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Нелінійні рівняння деформування тонких багатопарових поребриних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КДТУБА. - 1998. - Вип. 64. - С. 116-127.
2. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Аят Н.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах прочности и устойчивости гибких оболочек при термосиловых воздействиях // Проблемы прочности. - 1999. - N 5. - С. 96-102.
3. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Нелинейные уравнения МКЭ в задачах устойчивости неоднородных оболочек // Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: Доклады XVII Международной конференции. - СПб.: НИИХ СПбГУ, 1999. С. 40-44.
4. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Співвідношення моментної схеми скінченних елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. К.: КНУБА, 1999. - Вип. 66. - С. 22-25.
5. Метод конечных элементов в механике твердых тел / *А.С.Сахаров, В.Н.Кислюкий, В.В.Киричевский и др.* - К.: Вища шк. Головное изд.-во. - 1982. - 480 с.
6. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов. - К.: Вища шк. Головное изд.-во, 1986. - 775 с.

Надійшло до редакції 13.11.2006 р.