

Ю.В. Човнюк, к.т.н., проф. МКА;
В.С. Ловейкін, д.т.н., проф. НУБіПУ;
Д.А. Паламарчук, аспірант, (КНУБА, Київ)

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ РУХУ МЕХАНІЗМІВ З НЕЛІНІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ ПОЛОЖЕННЯ ЛАНОК

АННОТАЦІЯ. Отримані точні аналітичні розв'язки задачі оптимізації усталеного режиму руху механізмів з нелінійною функцією положення ланок

Ключові слова: розв'язок, режим руху, ланка, функція, задача

АННОТАЦИЯ. Получены точные аналитические решения задачи оптимизации установившегося режима движения механизмов с нелинейной функцией положения звеньев

Ключевые слова: решение, режим движения, звено, функция, задача

SUMMARY. The exact analytical decisions of the optimization problem for the steady-state motion regime of mechanisms with the nonlinear function of the links' position are presented

Keywords: the decision, mode of movement, part, function, problem

Вступ

У механізмах і машинах з нелінійною функцією положення ланок, кожна ланка рухається за своїм законом, який визначається конструкцією механізму та законом руху ведучої ланки. Це призводить до того, що кінетична енергія всього механізму на ділянці усталеного руху є змінною функцією. Тому максимальне значення кінетичної енергії, яке в швидкохідних механізмах із незначною силою технологічного опору визначає одну з основних складових енергетичних витрат привідного механізму, в багатьох випадках в кілька разів перевищує її середнє значення.

Виклад основного матеріалу

Приведення до руху кожної ланки механізму із нелінійною функцією положень призводить до виникнення додаткових енергетичних витрат і збільшення динамічних навантажень, які діють на окремі ланки. Вирішення цих задач можливе за рахунок підбору геометричних та інерційних параметрів механізму [1]. Однак такий підхід не дає можливості отримати найбільш доцільні розв'язки [2]. Крім того, такий підхід може бути використаний лише для механізмів зі сталою масою ланок.

Метою даної роботи є розробка методики мінімізації енергетичних витрат, які витрачаються на здійснення руху механізмів і

машин з нелінійною функцією положення ланок. В даному випадку основним видом енергетичних витрат є витрати кінетичної енергії. Вирішення цієї задачі можливе за рахунок оптимізації режиму руху механізму або машини на ділянці усталеного руху [3]. Тому при виборі оптимального режиму руху мінімізуємо інтегральний критерій, що враховує середні за час циклу витрати кінетичної енергії,

$$\tilde{T} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} T(t, q_k, \dot{q}_k, a_i) dt, \quad (1)$$

де T - кінетична енергія механізму або машини; t - час; t_0, t_1 - відповідно початковий і кінцевий моменти часу циклу усталеного руху механізму або машини; q_k - k -та узагальнена координата механізму; a_i - i -тий ($i = 1, 2, \dots, p$) конструктивний параметр механізму; s, p - відповідно кількість узагальнених координат і конструктивних параметрів механізму.

Функціонал (1) є середнім значенням кінетичної енергії механізму або машини на ділянці усталеного руху із початкового положення q_{k0} , в положення q_{k1} ($k = 1, 2, \dots, s$) протягом часу $\Delta t = t_1 - t_0$, а також відображає небажані властивості механізму або машини, тому підлягає мінімізації.

Отже для мінімізації функціоналу (1) необхідно розв'язати рівняння Ейлера-Лагранжа [5], тобто

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 0. \quad (2)$$

У результаті розв'язку рівнянь (2) для конкретних механізмів або машин отримуємо закони зміни узагальнених координат $q_k = q_k(t)$ та їх швидкостей $\dot{q}_k = \dot{q}_k(t)$, які забезпечують оптимальний енергетичний режим усталеного руху.

Розглянемо методику визначення оптимальних режимів усталеного руху механізмів з нелінійною функцією положення ланок і одним ступенем вільності. Для таких механізмів кінетична енергія може бути представлена залежністю

$$T = J_o(\alpha) \frac{\dot{\alpha}^2}{2}, \quad (3)$$

де α - узагальнена координата механізму, за яку вибрана кутова координата ланки зведення механізму, що здійснює обертальний рух; $\dot{\alpha}$ - кутова швидкість ланки зведення; J_o - зведений до ланки зведення момент інерції механізму.

Після підставлення виразу кінетичної енергії (3) у рівняння (2), в яких координати q_k та \dot{q}_k замінено відповідно на α та $\dot{\alpha}$, отримаємо звичайне нелінійне диференціальне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$T = J_o \ddot{\alpha} + \frac{\dot{\alpha}^2}{2} \frac{\partial J_o}{\partial \alpha} = 0, \quad (4)$$

за крайових умов $t = t_0$, $\alpha = \alpha_0$ і $t = t_1$, $\alpha = \alpha_1$. Причому α_0 і α_1 - початкове та кінцеве значення узагальненої кутової координати (координати ланки зведення) механізму на ділянці усталеного руху.

Отримана крайова задача (4) у [5] розв'язана чисельним методом – методом колокацій. Задача, що наведена нижче, точно розв'язана аналітичним методом із застосуванням результатів поданих у [6].

Запишемо вираз (4) у іншому вигляді, вважаючи, що $J_o = J_o(\alpha)$:

$$J_o \ddot{\alpha} + \frac{\dot{\alpha}^2}{2} \frac{dJ_o}{d\alpha} = 0, \quad (5)$$

причому $J_o(\alpha) \neq 0$, $J_o > 0$.

Поділимо всі члени виразу (5) на $J_o(\alpha)$, тоді отримаємо

$$\ddot{\alpha} + \frac{\dot{\alpha}^2}{2} \frac{dJ_o}{J_o d\alpha} = 0 \Rightarrow \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 \frac{d(\ln J_o)}{2d\alpha} = 0. \quad (6)$$

Прийнявши $\frac{d(\ln J_o)}{2d\alpha} \equiv \Phi(\alpha)$, подамо останнє рівняння у вигляді

$$\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 \cdot \Phi(\alpha) = 0. \quad (7)$$

Вважаючи, що $\dot{\alpha} \neq 0$, поділимо всі члени рівняння (7) на $\dot{\alpha}$. В результаті отримаємо

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}} + \dot{\alpha} \cdot \Phi(\alpha) = 0. \quad (8)$$

Проінтегрувавши рівняння [6], в результаті отримуємо

$$\ln|\dot{\alpha}| + \int \Phi(\alpha) d\alpha = C, \quad (9)$$

де $C = const$. Або

$$\ln|\dot{\alpha}| + \frac{1}{2} \int \frac{d[\ln J_o(\alpha)]}{d\alpha} d\alpha = C. \quad (10)$$

Провівши перетворення отримаємо

$$\begin{aligned} \ln|\dot{\alpha}| + \frac{1}{2} \ln[J_o(\alpha)] &= C \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln|\dot{\alpha}| + \ln[J_o(\alpha)^{1/2}] &= C. \end{aligned} \quad (11)$$

Далі

$$\ln|\dot{\alpha} \cdot J_o(\alpha)^{1/2}| = C \Rightarrow \dot{\alpha} \cdot J_o(\alpha)^{1/2} = C_1, \quad (12)$$

де C_1 - константа.

Проінтегрувавши останнє рівняння, маємо

$$\int [J_o(\alpha)]^{1/2} d\alpha = C_1 t + C_2, \quad (13)$$

де C_2 - константа.

Для визначення крайових умов, наведених у [5], отримаємо наступні рівності

$$\left\{ \begin{aligned} C_1 &= (t_0 - t_1)^{-1} \times \\ &\times \left[\int_0^{\alpha_0} J_o(\alpha)^{1/2} d\alpha - \int_0^{\alpha_1} J_o(\alpha)^{1/2} d\alpha \right]; \\ C_2 &= (t_0 - t_1)^{-1} \times \\ &\times \left[t_0 \int_0^{\alpha_1} J_o(\alpha)^{1/2} d\alpha - t_1 \int_0^{\alpha_0} J_o(\alpha)^{1/2} d\alpha \right]. \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Отримані рівності для констант C_1, C_2 слід підставити у рівняння (13), яке можна записати так:

$$\int_0^{\alpha} [J_o(\tilde{\alpha})] d\tilde{\alpha} = C_1 t + C_2. \quad (15)$$

Це і є шуканий закон $\alpha(t)$ за крайових (початкових) умов, наведених вище та у [5]. Константи C_1, C_2 знаходимо із системи (14).

Якщо початкові умови задачі мають вигляд:

$$\alpha = \alpha_0 \text{ при } t = t_0, \text{ та } \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0 \text{ при } t = t_0, \quad (16)$$

тоді константи C_1, C_2 рівняння (15), яке ви-

значає закон $\alpha(t)$, визначаються таким чином:

$$\left\{ \begin{aligned} C_1 &= \dot{\alpha}_0 \cdot J_o(\alpha_0)^{1/2}; \\ C_2 &= \int_0^{\alpha_0} [J_o(\tilde{\alpha})]^{1/2} d\tilde{\alpha}. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Тоді закон $\alpha(t)$ можна подати у вигляді:

$$\int_0^{\alpha} [J_o(\tilde{\alpha})]^{1/2} d\tilde{\alpha} = \dot{\alpha}_0 [J_o(\tilde{\alpha})]^{1/2} t + \int_0^{\alpha_0} [J_o(\tilde{\alpha})]^{1/2} d\tilde{\alpha}. \quad (18)$$

Як приклад визначимо оптимальний режим усталеного руху врівноваженої шарнірно-зчленованої стрілової системи крана під час зміни вильоту вантажу. Схема стрілової системи подана на рис. 1 у вигляді голономної механічної системи із абсолютно жорсткими ланками і одним ступенем вільності.

Стрілова система складається із стріли 1, хобота 2, відтяжки 3, рухомої противаги 5

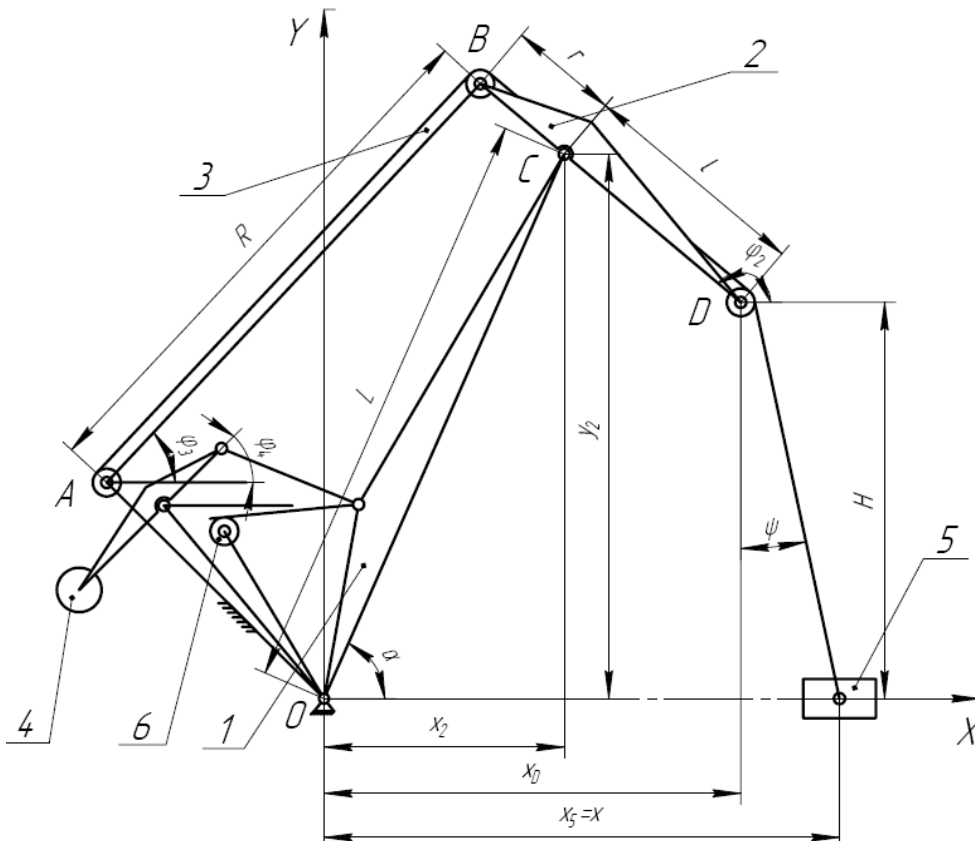


Рис.1. Динамічна модель стрілової системи крана

4, вантажу 5 та привідного механізму 6.

За узагальнену координату (координата ланки зведення) прийемо кутову координату повороту стріли α .

Для такої стрілової системи запишемо функцію кінетичної енергії в процесі зміни вильоту вантажу

$$T = J_o(\alpha) \cdot \frac{\dot{\alpha}^2}{2};$$

$$J_o(\alpha) = J_1 + m_2 \left[\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial \alpha} \right)^2 \right] + J_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} \right)^2 + J_3 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha} \right)^2 + J_4 \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial \alpha} \right)^2 + m_5 \left(\frac{\partial x_5}{\partial \alpha} \right)^2, \quad (19)$$

де J_1, J_2, J_3, J_4 - моменти інерції відповідно стріли, хобота, відтяжки та противаги відносно власних вісей обертання; m_2, m_5 - маси відповідно хобота та вантажу; $\frac{\partial x_2}{\partial \alpha}, \frac{\partial y_2}{\partial \alpha}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha}, \frac{\partial \varphi_4}{\partial \alpha}, \frac{\partial x_5}{\partial \alpha}$ - оператори передачі руху першого порядку (перші передаточні функції) відповідно хобота, відтяжки, противаги в обертальному русі навколо центра мас, а також хобота і вантажу при поступальному русі їх центра мас. Передаточні функції зв'язують відповідні координати ланок із узагальненою координатою α [4], де $\dot{\alpha}$ - кутова швидкість повороту стріли.

Визначимо часткову похідну від зведеного моменту інерції стрілової системи $J_o(\alpha)$ за узагальненою координатою α :

$$\frac{\partial J_o}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial J_o(\alpha)}{\partial \alpha} = 2 \left[m_2 \times \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial y_2}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 y_2}{\partial \alpha^2} \right) + J_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \alpha^2} + J_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \alpha^2} + J_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial \alpha^2} + m_5 \frac{\partial x_5}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x_5}{\partial \alpha^2} \right], \quad (20)$$

де $\partial^2 x_2 / \partial \alpha^2, \partial^2 y_2 / \partial \alpha^2, \partial^2 \varphi_2 / \partial \alpha^2, \partial^2 \varphi_3 / \partial \alpha^2, \partial^2 \varphi_4 / \partial \alpha^2, \partial^2 x_5 / \partial \alpha^2$ - оператори передачі руху другого порядку (другі передаточні функції) відповідно хобота, відтяжки, противаги в обертальному русі навколо центра мас, а також хобота і вантажу при поступальному русі їх центра мас [4].

Залежності (13)-(15) були розраховані за різних значень відносного часу при усталеному русі механізму від 0 до 1. Ці розрахунки проведені для трьох стрілових систем кранів: КПМ 32-35-10,5; КПМ 75-20-10,5; КПМ 40-27-10,5. Отримані чисельні розрахунки наведені у табл. 1.

Через кутові: координату, швидкість та прискорення ланки зведення визначені кінематичні характеристики інших ланок стрілової системи на ділянці усталеного руху. За отриманими кінематичними характеристиками окремих ланок для трьох стрілових систем кранів визначені функції кінетичної енергії для існуючих систем (T_{i1}, T_{i2}, T_{i3}) та для оптимізованих систем (T_{o1}, T_{o2}, T_{o3}). Результати подані у табл. 2.

Таблиця 1

Кутова швидкість стріли $\dot{\alpha}_0$ та кутова швидкість відтяжки $\dot{\varphi}_{30}$ у залежності від \bar{t} для оптимізованих кранів трьох стрілових систем

\bar{t}	$\dot{\alpha}_0, \text{рад/с}$			$\dot{\varphi}_{30}, \text{рад/с}$		
	1	2	3	1	2	3
0	0,0115	0,008	0,0073	0,015	0,0075	0,008
0,2	0,011	0,0078	0,00725	0,014	0,0065	0,0078
0,4	0,01	0,0076	0,0071	0,0135	0,006	0,0073
0,6	0,0095	0,0074	0,007	0,013	0,005	0,007
0,8	0,009	0,0072	0,00698	0,012	0,004	0,0067
0,9	0,0085	0,0071	0,00695	0,0115	0,003	0,0063
1,0	0,008	0,007	0,0069	0,01	0,0025	0,006

Залежність кінетичної енергії від \bar{t} для існуючих T_{i1}, T_{i2}, T_{i3} та оптимізованих кранів T_{o1}, T_{o2}, T_{o3}

\bar{t}	$T_i, \text{кДж}$			$T_o, \text{кДж}$		
	1	2	3	1	2	3
0	2,15	2,95	1,05	2,5	3,7	4,6
0,2	2,2	3,1	4,2	2,5	3,7	4,6
0,4	2,5	3,5	4,3	2,5	3,7	4,6
0,6	2,7	4,0	4,5	2,5	3,7	4,6
0,8	2,8	4,5	4,85	2,5	3,7	4,6
1,0	3,3	6,0	5,5	2,5	3,7	4,6

Аналіз отриманих результатів показує, що в існуючих стрілових системах максимальні значення кінетичної енергії перевищують її середні значення на 30% (КПМ 32-35-10,5), на 53,8% (КПМ 75-20-10,5) та на 25,8% (КПМ 40-27-10,5). В деяких кранах це значення може досягати 100%. У оптимізованих стрілових системах максимальне значення складає відповідно 0,46%, 0,21% та 0,11%.

Висновки

Використання оптимізованих режимів усталеного руху механізмів з нелінійною функцією положення ланок дозволяє значно скоротити енергетичні витрати.

В оптимізованих стрілових системах покращується динамічний режим руху, який приводить до зменшення динамічних навантажень, що діють на окремі ланки.

Отримані результати можуть бути використані для подальшого вдосконалення і уточнення існуючих методів інженерного розрахунку механізмів різних типів з нелінійною функцією положення ланок на ділянці усталеного руху.

Література

1. *Нестеров А.П.* Оптимизация режимных параметров подъемника по критерию «минимум эквивалентной мощности» // Подъемно-транспортное оборудование: Весн. межвед. научн.- техн. сб.- 1991.- Вып. 22.- С.25-29.
2. *Ловейкін В.С., Душанін Я.С.* Оптимізація конструктивних параметрів приводу механізму зміни вильоту стрілової системи крана // Гірничі, будівельні, дорожні та меліо-

ративні машини.- К.:КНУБА, 1998,- Вип. 52.- С.72-75.

3. *Артоболовский И.И.* Динамические критерии режима движения машины // Теоретична та приложена механика/ Болгария, 1971.- Вып.1.- С.11-24.
4. *Горский Б.Е., Ловейкин В.С.* Методика составления операторов передачи движения // Горные, строительные и дорожные машины.- К.: Техніка, 1979.- Вып. 28.- С.99-105.
5. *Ловейкин В.С.* Оптимізація усталеного режиму руху механізмів з нелінійною функцією положення ланок // Динаміка, міцність і надійність сільськогосподарських машин: Пр. І-ї міжнародної науково-технічної конференції (DSR AM-I), 4-7 жовтня 2004р., Тернопіль (Україна).- Тернопіль: Терноп. держ. техн. університет ім. І. Пулюя, 2004.- С.158-162.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1971.- 576с.
7. *Серлин Л.Г., Орлов А.Н.* Оптимизация крановых конструкций и их автоматическое проектирование. Учебное пособие. – Л., 1985. – 85 с.
8. *Ловейкін В.С., Душанін Я.С.* Оптимізація енергетичного режиму при зміні вильоту стрілових систем кранів. // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. – Харьков, 1999. – Вып. 48. – с. 166-172.

Рецензент: Ю.Д. Абрашкевич, д.т.н., проф.
(КНУБА)

Отримано: 14.11.2008р.