

УДК 539.375

С.О. Пискунов, канд. техн. наук,
О.І. Гуляр, д-р техн. наук,
Ю.В. Максим'юк

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ В'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ ТІЛ

Проведено розробку і дослідження ефективності кроково-ітераційного алгоритму розв'язання геометрично нелінійних задач пластичності і повзучості двовимірних тіл. Досліджено ефективність застосування початкових наближень і корекції тензора пружних констант відповідно до властивостей пластичності і повзучості матеріалу.

Вступ. Основною задачею на стадії проектування відповідальних елементів конструкцій, що являють собою вісесиметричні тіла обертання, є забезпечення міцності і надійності їх роботи під час всього періоду експлуатації. На практиці ця задача, як правило, вирішується методами чисельного моделювання процесів нелінійного деформування та накопичення ушкоджень матеріалу, які виникають в матеріалі під впливом тривалого зовнішнього навантаження. При цьому, особливо на етапі розвитку зон континуального руйнування, в матеріалі можуть виникати значні деформації, урахування яких при визначенні несучої здатності потребує розв'язання геометрично нелінійних задач в'язкопружнопластичності з урахуванням ушкодження матеріалу.

1. Алгоритми розв'язання системи нелінійних рівнянь в'язкопружнопластичності з урахуванням геометричної нелінійності

1.1. Розв'язання фізично-нелінійних задач

Визначення напружено-деформованого стану тіл при в'язкопружно-пластичному деформуванні є складною задачею механіки деформованого твердого тіла, що пов'язано з необхідністю урахування незворотних деформацій різного характеру. Так, деформації пластичності є миттєвими, а виникнення деформацій повзучості пов'язано з плином часу.

Складність процесу в'язкопружнопластичного деформування потребує побудови ефективних алгоритмів розв'язання поставленої задачі. Ці алгоритми орієнтовані на моделювання тривалих за часом процесів деформування матеріалу, є інваріантними щодо використовуваних форм рівнянь повзучості та надають можливість урахування змін фізико-механічних властивостей матеріалу залежно від параметрів напружено-деформованого стану і температури.

Моделювання еволюційного процесу нелінійного деформування для геометрично нелінійних задач здійснюється кроковим методом за параметрами навантаження і часу. Вибір величини кроку за параметром (Δt за часом і Δp за навантаженням) здійснюється виходячи з необхідності дотримання умов збіжності, як ітераційного процесу розв'язання систем нелінійних рівнянь, так і отримуваних результатів. При цьому значення Δt і Δp суттєво залежать від механічних характеристик матеріалу (параметрів кривих пружнопластичного деформування і повзучості) та характеру змінення зовнішнього навантаження. Правильний вибір кроку за часом і навантаженням суттєво впливає на точність отримуваних результатів, тому проведення відповідних досліджень збіжності є важливим етапом розв'язання задачі. При розв'язанні задач пластичної формозміни та повзучості при силовому навантаженні інтервал часу t , під час якого триває процес деформування, розбивається на скінченне число M відрізків Δt_m ($m=1,2,3,\dots,M$) в загальному випадку різної величини. При цьому критерієм вибору оптимального значення Δt є збіжність ітераційного процесу розв'язання системи нелінійних рівнянь.

Передбачається, що механічні характеристики в межах кроку по часу є сталими і визначаються по результатам розв'язку на попередньому кроці.

На кожному кроці по часу Δt_m основні операції виконуються в такій послідовності. За величиною обраного кроку по часу Δt_m (навантаженню) із використанням значень вектора прирощень переміщень на попередньому кроці $\{\Delta u_{m-1}\}$ і співвідношенням параметрів Δt_{m-1} і Δt_m визначається початкове значення приросту вектора переміщення на даному кроці $\{\Delta u_m\}$. На кожній ітерації n кроку m вектор невідомих переміщень $\{u\}_n^m$ системи нелінійних рівнянь МСЕ може бути поданий у вигляді:

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \left[K^* \right]^{-1} (\{Q\}_n^m - \{R\}_n^m), \quad (1)$$

де $\left[K^* \right]$ – матриця жорсткості дискретної моделі, обчислена з урахуванням корекції тензора пружних констант.

$$C^{ijkl*} = C^{ijkl} - 4G^2 s^{ij} s^{kl} \left(\frac{1}{\gamma^p} + \frac{1}{\gamma^c} \right),$$

де $C^{ijkl} = \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl}$.

Якщо ітераційну процедуру виконувати з матрицею, елементи якої обчислюються без урахування корекції тензора пружних сталей, то формулу (1) можна записати у вигляді:

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + [K]^{-1} (\{Q\}_n^m - \{R\}_n^m). \quad (2)$$

Передбачаючи, що змінення швидкості деформування від кроку до кроку є незначним, значення приросту вектора переміщень на кроці m визначається таким чином:

$$\{\Delta u_m\} = \frac{\{\Delta u_{m-1}\} \Delta t_m}{\Delta t_{m-1}}. \quad (3)$$

У випадку крокового розв'язання задачі пластичності за параметром навантаження Δp_m відповідно отримаємо

$$\{\Delta u_m\} = \frac{\{\Delta u_{m-1}\} \Delta p_m}{\Delta p_{m-1}}. \quad (4)$$

Обчислення здійснюються до виконання умови:

$$(\{Q\}_n^m - \{R\}_n^m) \leq \zeta \|\{Q\}_n^m\|, \quad (5)$$

де ζ – параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь.

Величини напружень уточнюються на кожній ітерації кроку в залежності від поточного рівня деформацій пластичності і повзучості. В кінці кожного кроку здійснюється обчислення величини повних напружень на кроці m .

2. Обчислення напружень при наявності деформацій пластичності і повзучості.

При ізотермічному навантаженні зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається співвідношеннями теорії пластичного текучості для матеріалу при ізотропному зміцненні.

Повний приріст тензора деформацій $d\varepsilon_{ij}$ дорівнює сумі приросту пружних $d\varepsilon_{ij}^e$, пластичних $d\varepsilon_{ij}^p$ деформацій і деформацій повзучості $d\varepsilon_{ij}^c$

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^c. \quad (6)$$

Предбачається, що пружні деформації малі і зв'язані з напруженнями узагальненим законом Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}.$$

Матеріал пластично нестисливий і зміна його об'єму лінійно-пружна: $\varepsilon_{ij}^p = 0$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e$.

Прирошення деформацій пластичності визначається згідно з асоційованим законом пластичного течіння, пластичні деформації розвиваються по нормалі до поверхні текучості:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = \lambda_p s_{ij}.$$

Для ізотропного матеріалу за наявності спрочнення при умові текучості Мизеса поверхні текучості описується рівнянням:

$$f_p = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - \tau_s^2 = 0.$$

де τ_s – межа текучості при чистому зсуві; $\chi = \int \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}$ – параметр зміцнення Одквіста.

В загальному випадку на кожному кроці розв'язання задачі на першому етапі проводиться визначення напружено-деформованого стану в припущенні пружного деформування (розв'язання лінійної задачі).

Отримані напруження перевіряються за умовою наявності пластичного деформування $\tau > \tau_s$, де τ_s – поточне значення межі текучості. При виконанні цієї умови у відповідних точках конструкції проводиться визначення напружено-деформованого стану, яке пов'язано із припущенням миттєвих деформацій пластичності. Після цього з урахуванням припущення часу на кроці проводиться визначення напружено-деформованого стану з урахуванням перебігу процесу повзучості.

На початку кожної ітерації n кроку m компоненти тензора напружень $\tilde{\sigma}^{ij}$ обчислюються за формулою:

$$\left(\tilde{\sigma}^{ij}\right)_n = \left(\tilde{\sigma}^{ij}\right)_{n-1} + \left(\Delta\tilde{\sigma}^{ij}\right)_n, \quad (7)$$

де $\left(\Delta\tilde{\sigma}^{ij}\right)_n$ – прирощення напружень, які визначаються згідно з законом Гука за величиною прирощення повних деформацій.

Дійсні значення напружень $\left(\sigma^{ij}\right)_n^m$, що використовуються для визначення компонент вектора вузлових реакцій $\{R\}_n^m$, обчислюються за формулою:

$$\left(\sigma^{ij}\right)_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} \left(\sigma^{ij}\right)_n^m + \left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = \left(\sigma_o\right)_n^m + \left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m, \quad (8)$$

де $\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m$ – компоненти девіатора напружень, що враховують прирощення нелінійних деформацій пластичності або повзучості.

Визначення компонент девіатора $\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m$ тензора дійсних напружень, що входять до формули (8), при наявності деформацій пластичності, здійснюється з урахуванням поточних значень межі текучості τ_s [11]:

$$\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = \left(\mathbf{S}^{ij}\right)_n^m \frac{\tau_s}{\tau}, \quad (9)$$

де $\tau = \sqrt{s_{ij}s^{ij}}/2$ – поточне значення інтенсивності дотичних напружень.

Далі проводиться обчислення дійсних значень прирощень деформацій пластичності $(\Delta \varepsilon_{ij}^p)_m$:

$$(\varepsilon_{ij}^p)_m = (\varepsilon_{ij}^p)_{m-1} + (\Delta \varepsilon_{ij}^p)_m = (\varepsilon_{ij}^p)_{m-1} + \left(1 - \frac{\tau_s}{\tau_i}\right) (\overline{s_{ij}})_m / G_1.$$

При наявності деформацій повзучості на початку кожної ітерації n кроку m компоненти тензора напружень σ_{ij} також обчислюються за формулами (7), (8) з урахуванням наявності деформацій повзучості. У цьому випадку:

$$\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = (s^{ij})_n^m - G_1 (\Delta \varepsilon_{ij}^c)_n^m, \quad (\Delta \varepsilon_{ij}^c)_n^m = (\xi_{ij}^c)_n^m \Delta t_m, \quad (10)$$

де $G_1 = E / (1 - 2\nu)$, $(\xi_{ij}^c)_n^m = \frac{3}{2} [\xi_i^c(\sigma_i)]_m^n \frac{(s_{ij})_n^m}{(\sigma_i)_m^n}$, Δt_m – величина кроку за часом.

Після виконання умови збіжності ітераційного процесу (5) проводиться обчислення прирощень деформацій повзучості $(\Delta \varepsilon_{ij}^c)_m$ і ушкодження $(\Delta \omega)_m$ із використанням напружень, отриманих на останній ітерації кроку, і відповідних накопичених величин $(\varepsilon_{ij}^c)_m$ і ω_m :

$$(\varepsilon_{ij}^c)_m = (\varepsilon_{ij}^c)_{m-1} + (\Delta \varepsilon_{ij}^c)_m = (\varepsilon_{ij}^c)_{m-1} + (\xi_{ij}^c)_m \Delta t_m, \quad (11)$$

$$\omega_m = \omega_{m-1} + (\Delta \omega)_m = \omega_{m-1} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_m \Delta t_m,$$

де $(\xi_{ij}^c)_m$ обчислюється відповідно до використовуваних законів стану матеріалу - на основі рівнянь теорії текучості: $\xi_i^c = A \sigma_i^n$, теорії зміцнення: $\xi_i^c = B \frac{\sigma_i^m}{\partial_c \alpha}$, або теорії накопичення пошкоджень

Ю.М.Работнова [6]: $\xi_i^c = D \left(\frac{\sigma_i}{1-\omega} \right)^m$. Величина $\left(\frac{d\omega}{dt} \right)_m$ найбільш часто

приймається у вигляді ступеневої функції напруження, або у вигляді рівняння

Качанова [2]: $\frac{d\omega}{dt} = C_1 \left[\frac{\sigma_e}{1-\omega} \right]^m$, рівняння Работнова

[6]: $\frac{d\omega}{dt} \omega^{-\beta} = C_2 \left[\frac{\sigma_e}{1-\omega} \right]^m$, рівняння Шестерикова [13]: $\frac{d\omega}{dt} = C_3 \left[\frac{\sigma_e}{1-\omega^r} \right]^m$,

рівняння Леметра [15]: $\frac{d\omega}{dt} = C_4 \left[\frac{\sigma_e}{1-\omega} \right]^m \frac{1}{(1-\omega)^q}$.

Формули (7), (8), (9) є інваріантними щодо конкретизованого вигляду зазначених рівнянь повзучості.

У кінці кожного кроку для всіх точок тіла здійснюється перевірка умови локальної втрати несучої здатності матеріалу:

$$\omega > \omega^*, \quad (12)$$

де ω^* – критичне значення параметра ушкодження, що відповідає моменту руйнування матеріалу, $\omega^*=1$ [6].

При чисельному розв'язанні задачі континуального руйнування відповідно до викладеного алгоритму стан повного руйнування матеріалу $\omega^*=1$ в дійсності не досягається [1]. У зв'язку з цим, в чисельних розв'язках приймається $\omega^* < 1$ ($\omega^*=0,9$ [4], $\omega^*=0,95\dots 0,96$ [12], $\omega^*=0,99$ [1]).

Виконанні зазначеної умови руйнування (12) свідчить про виникнення в матеріалі макроскопічної порожнини, в межах якої несуча здатність матеріалу є вичерпаною – зони континуального руйнування. Її моделювання здійснюється із використанням спеціального алгоритму (див. п. 3).

Для дослідження характеру збіжності і вірогідності результатів, та порівняння ефективності використання викладених алгоритмів обчислення напружень при наявності деформацій пластичності розглянемо приклад про деформування нескінченної товстостінної труби під впливом внутрішнього тиску, який змінюється від 0 до $p_{\max} = 0.07 \text{ МН/м}^2$, характеристики матеріалу: $E = 1 \text{ МПа}$, $\nu = 0,3$ [9].

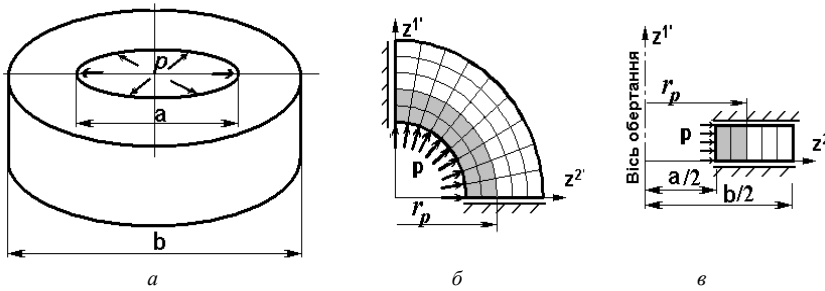


Рис.1. Пружно-пластичне деформування товстостінної труби:
розрахункові схема, дискретні моделі МСЕ

Розрахунок проведений для фрагмента труби, обмеженого двома перпендикулярними до її осі поперечними перерізами, дискретна модель якого побудована із використанням вісесиметричних СЕ та СЕ для розв'язання плоскої задачі. (рис. 1). Отримані значення напружень співпали з еталоном і між собою.

При зростанні навантаження від 0 до $p_1 = 0,037 \text{ МН/м}^2$ на внутрішній поверхні труби виникає зона пластичних деформацій (зона пластичності), діаметр якої збільшується із зростанням навантаження. При $p = p_{\max}$ зона пластичності розповсюджується на всю товщину стінки труби. При розв'язанні задачі покрокове зміння навантаження p в інтервалі $p_1 \leq p \leq p_{\max}$ проводилось так, щоб на кожному з кроків за навантаженням прирощення радіуса зони пластичності становило 1/5 товщини стінки труби ($p_1 = 0,037$, $p_2 = 0,051$, $p_3 = 0,059$, $p_4 = 0,064$, $p_5 = p_{\max} = 0,07 \text{ МН/м}^2$).

В таблиці 1 наведені величини кільцевого напруження на внутрішній поверхні труби $\sigma_{z'z'}^{\max}(z^2 = a)$ і максимальних значень кільцевого напруження $\sigma_{z'z'}^{\max}(p)$ при різних значення навантаження p . Протягом всього процесу деформування спостерігається збіг результатів, отриманих за розробленим алгоритмом із розв'язком наведеним в [9].

Таблиця 1

$p, \text{ МН/м}^2$	0,037	0,051	0,059	0,064	0,07
$\sigma_{z'z'}^{\max}, \text{ МПа [еталон]}$	0,06	0,067	0,074	0,081	0,086
$\sigma_{z'z'}^{\max}, \text{ МПа (1)-(5)}$	0,061	0,066	0,073	0,08	0,084
Похибка	1,6%	3%	1,6%	0	0

Ефективність застосування алгоритмів (1) і (2)-(4) показано на (рис. 2а) і (рис. 2,б) відповідно у вигляді залежності обсягу обчислювальних витрат, необхідних на розв'язання задачі при різних розмірах зони пластичного деформування, границя якої відповідає координаті $\rho = r_p / R$ (рис. 3.), де R - зовнішній радіус циліндра.

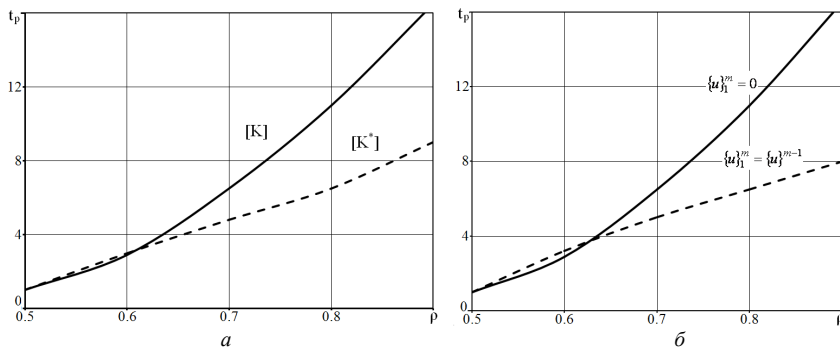


Рис. 2. Пружно-пластичне деформування товстостінної труби: порівняння обчислювальних витрат

Для дослідження збіжності отримуваних результатів розв'язання задачі здійснювалось при вдвічі менших кроках за навантаженням. Розбіжність величин напружень і деформацій пластичності, одержаних у цих двох випадках становила менше 1%.

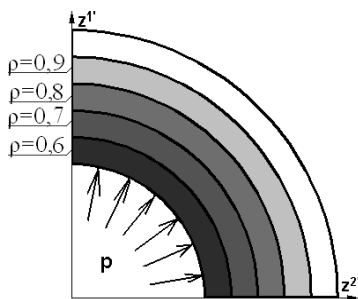


Рис. 3. Розповсюдження зони пластичності в товстостінній трубі

Розв'язання даного тестового прикладу засвідчило, що кількість обсяг обчислювальних витрат при використанні алгоритмів (1) і (2)-(4) зменшується в два рази.

Для дослідження характеру збіжності ітераційного процесу при розв'язанні задач повзучості і підтвердження вірогідності отримуваних результатів розглянемо тестовий приклад про деформування в умовах повзучості тонкостінної трубки. При моделюванні процесу деформування розглядалася ділянка

зразка, що обмежена двома поперечними перетинами, проведеними на відстані 1 мм, яка апроксимувалася із використанням вісесиметричного та плоских скінчених елементів (рис. 4.).

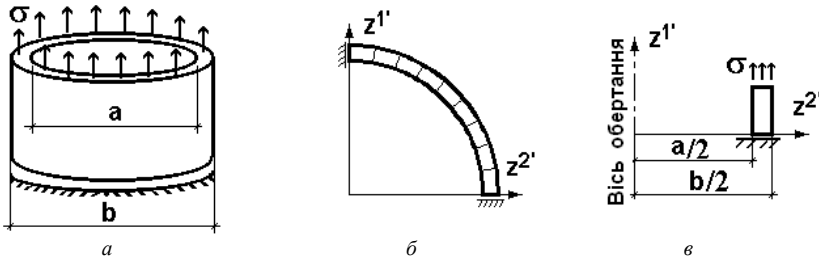


Рис. 4. Тонкостінна труба: розрахункова схема, дискретні моделі МСЕ

Деформування під впливом постійного розтягуючого навантаження в умовах повзучості описується системою рівнянь:

$$\frac{d\varepsilon_{ic}}{dt} = A \frac{Sh(\sigma/c)}{(1-\omega)^{k_1}}, \quad \frac{d\omega}{dt} = B \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^{k_2}, \quad (13)$$

де $A = 3,12 \cdot 10^{-4} \text{ год}^{-1}$, $k_1 = 2,36$, $c = 20,5 \text{ МПа}$, $B = 0,58 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^{-3,17} \text{ год}^{-1}$, $k_2 = 3,17$ – константи матеріалу при $T = 850^\circ \text{C}$ [3;13].

Величини деформацій повзучості при $\sigma = 60 \text{ МПа}$, отримані за формулами (7)-(13) (таблиця 2), добре узгоджуються з експериментальним результатом [3].

Таблиця 2

t , год	2,5	5	7,5	10	12,5
ε_c % [еталон]	0,625	1,27	2,2	3,6	5
ε_c % (7)-(13)	0,625	1,29	2,4	3,76	5
Похибка	0	1,55%	9%	4,44%	0

На графіку (рис. 5) показана залежність відношення кількості ітерацій N , необхідних на розв'язання задачі при різних значеннях деформацій повзучості до кількості ітерацій N_0 , потрібної для розв'язання задачі до максимального рівня деформацій повзучості при застосуванні алгоритму (2) при $\{u\}_1^m = 0$.

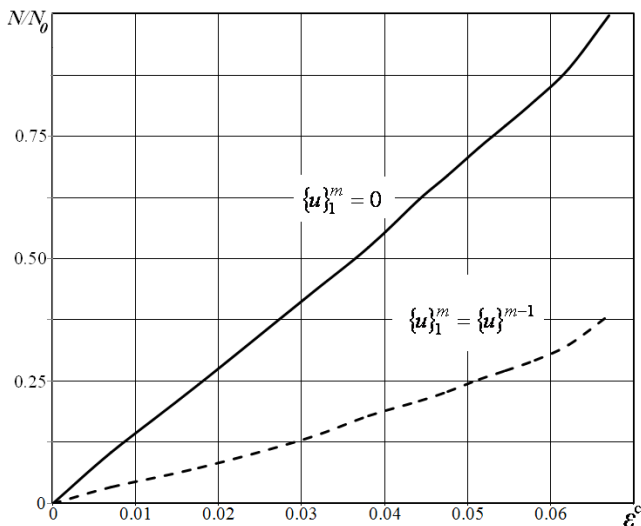


Рис. 5. Деформування в умовах повзучості тонкостінної труби порівняння обчислювальних витрат

Як видно, застосування початкового наближення природжень переміщень дозволяє зменшити обчислювальні витрати в три рази.

3. Розв'язання задач континуального руйнування в умовах повзучості.

Момент часу t^* , коли хоч в одному із СЕ, координати центра ваги якого $\{z^{1*}, z^{2*}\}$, задовольняється умова (12), фіксується як момент переходу від процесу накопичення пор і порушення суцільності матеріалу, що враховуються інтегрально за допомогою параметра ушкодження, до процесу зародження макроскопічних дефектів – розвитку зони континуального руйнування. Для моделювання розвитку зони континуального руйнування в точці з координатами $\{z^{1*}, z^{2*}\}$ вводиться порожнина із площею поперечного перерізу S_0 , в межах якої напруження і модуль пружності матеріалу дорівнюють нулю. Подальше визначення напружено-деформованого стану і параметра ушкодження для нової розрахункової схеми, що містить порожнину, і часу до досягнення умов $\omega = \omega^*$ в прилеглих до порожнини точках виконується за алгоритмом (2,7,9), (10)-(12). При цьому до зони руйнування поступово приєднується нові фрагменти (скінчені елементи).

При реалізації описаної процедури в межах двовимірної постановки МСЕ початковий розмір зони континуального руйнування S_0 приймається таким, що має форму скінченного елемента, координати центра ваги якого дорівнюють $\{z^{1*}, z^{2*}\}$ (рис. 6,в). Подальший розвиток зони континуального руйнування реалізується шляхом урахування умови дорівнювання нулю напружень і модуля пружності для елементів, в центрі ваги яких виконується умова $\omega = \omega^*$. На рис.6,в проілюстровано цей процес, де час до приєднання кожного нового фрагмента зон руйнування позначений $\Delta t_i, i=1,2\dots k$. Розв'язання задачі закінчується при досягненні порожниною заданої площі S_k і визначенні необхідного для цього часу $t_s = t_0 + \Delta t_k$.

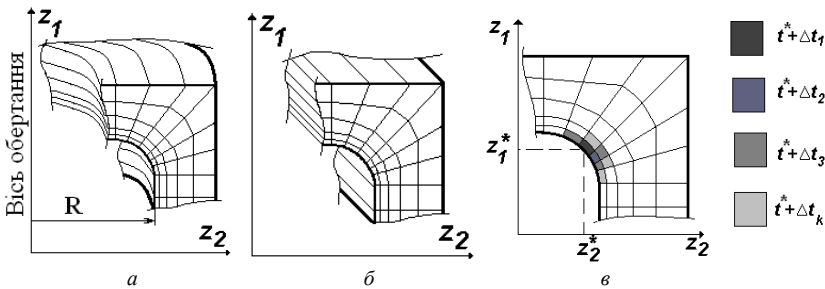


Рис. 6. Дискретні моделі МСЕ, розвиток зони континуального руйнування:

a, б -нанесення скінченоелементної сітки для розрахунку плоских і віссесиметричної об'єктів МСЕ,
в - процес розвитку зони континуального руйнування

Для апробації викладеного алгоритму моделювання розповсюдження зони континуального руйнування розглянуто наведену в роботі [1] задачу про розвиток зони континуального руйнування в товстостінній трубі. Загальний вигляд труби за наявності зони континуального руйнування радіусом r^* наведений на (рис. 7).

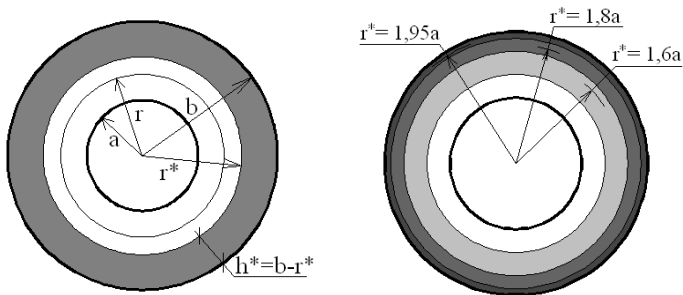


Рис. 7. Загальний вигляд труби за наявності зони континуального руйнування

Для опису деформування в умовах повзучості в роботі [1] використані кінетичні рівняння вигляду

$$\frac{d\varepsilon_{ic}}{d\tau} = B \left(\frac{\sigma_i}{1-\omega} \right)^{k_1}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = D \left(\frac{\sigma_{33'}}{1-\omega} \right)^{k_2}, \quad (18)$$

де $B = 1$, $D = 1$, $k_1 = 5$; $k_2 = 3.5$ – константи матеріалу; τ – приведений безрозмірний час; $\sigma_{33'}$ – кільцеве напруження.

Побудова дискретних моделей виконана аналогічно до прикладу, розглянутому в п. 2 (рис.1, а, б). Результати розв'язання задачі до досягнення параметром ушкодження критичного значення, проведеного за алгоритмом (11-12)-(14-16) збігаються з наведеними в роботі [1]. При деформуванні в умовах повзучості відбувається пере розподілення напружень, яке призводить до досягнення параметром ушкодження критичного значення на зовнішній поверхні труби. У подальшому зона руйнування радіусом r^* просувається із зовні до внутрішньої поверхні труби.

Для проведення аналізу вірогідності результатів моделювання розповсюдження зони континуального руйнування проведено порівняння змінення величин кільцевих напружень в залежності від товщини (розмірів) зони континуального руйнування в різних точках поперечного перерізу (рис. 8.). Отримані результати збігаються з наведеними в роботі [1].

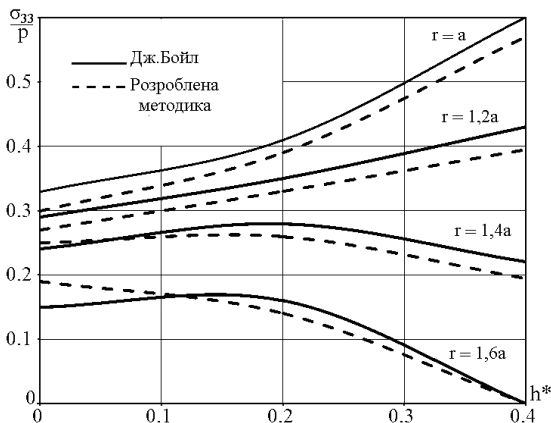


Рис. 8. Змінення величин кільцевих напружень в залежності від товщини зони континуального руйнування

Отже, розроблений алгоритм моделювання розвитку зони континуального руйнування дозволяє з високим ступенем точності визначати зміни параметри напружено-деформованого стану при змінні розмірів зони континуального руйнування .

4. Розв'язання геометрично нелінійних задач при пружному деформуванні.

У випадку наявності геометрично-нелінійного деформування наприкінці кожного кроку перерахунок базисних координат усіх вузлів сіткової області виконується по формулі:

$$z_m^\alpha = z_{m-1}^\alpha + \Delta u_m^\alpha .$$

Для дослідження характеру збіжності і вірогідності результатів, отримуваних із використанням викладеного алгоритму при наявності повних деформацій розглянуто тестову задачу про згин защемленої по контуру круглї пластини, завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 9,а).

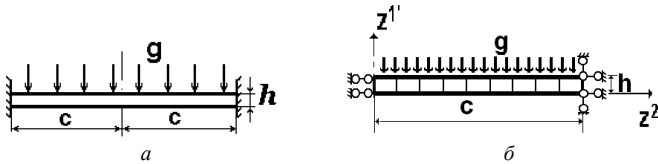


Рис. 9. Пластина защемлена по контуру: розрахункова схема, дискретна модель МСЕ

Геометричні і механічні параметри пластини є наступними: $a=0.2$ м, $h=0.01$ м, модуль пружності $E = 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$. В якості еталонного розв'язку використано результат, отриманий в роботі [10], що показаний на (рис. 10) суцільною лінією в вигляді залежності безрозмірного прогину в центрі пластини від безрозмірного параметра навантаження. Результати розв'язку, отриманого на основі МСЕ, із використанням зображеної на (рис. 9,б) дискретної моделі, майже повністю збігаються із еталонним розв'язком (рис. 10).

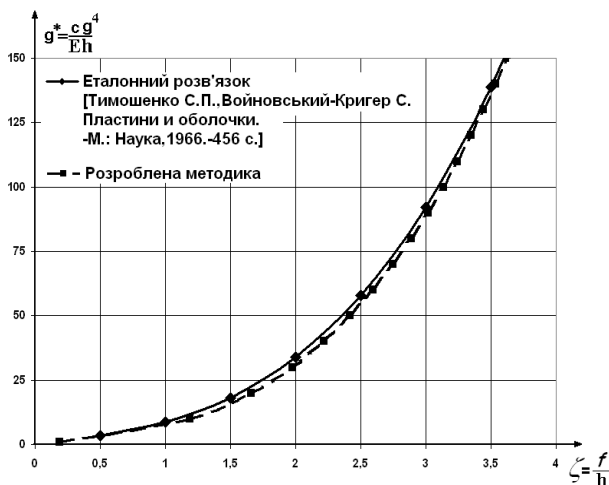


Рис. 10. Залежність безрозмірного прогину в центрі пластини від безрозмірного параметра навантаження

5. Геометрично нелінійне деформування при наявності деформацій пластичності і повзучості.

Для доведення достовірності розв'язку задач при скінчених переміщеннях і великих пластичних деформаціях для тіл обертавання, проведено дослідження пружнопластичного деформування суцільного циліндра між двома плоскими шерохватими плитами. Висота циліндра $H=0,8$ см, $R_0=0,95$ см, початковий радіус $R_0=1,1906$ см. Механічні характеристики матеріалу: модуль пружності $E=7 \cdot 10^4$ МПа коефіцієнт Пуассона $\nu=0$.

Розрахункова схема об'єкта зображена на (рис. 11.) Сітка СЕ на меридіанній переріз циліндра нанесена рівномірно вдовж осі z^1 і z^2 .

Результати розрахунку показані у вигляді епіур радіального зміщення в

залежності від нормованого переміщення верхньої плити $z^* = \frac{H - z^1}{h}$

(рис. 11.). Результати, показані на графіку суцільною лінією приведені в роботі [14], отримані по виведеній методиці показані пунктиром. Як видно, спостерігається хороша збіжність результатів.

З метою перевірки методики розв'язання задачі повзучості в геометрично нелінійній постановці було розглянуто задачу про осаджування з постійною швидкістю $V_0=0,167$ см/с циліндра висотою $H=25$ мм, діаметром $R_0=12.5$ мм до величини відносного стиснення 30% (рис. 11.).

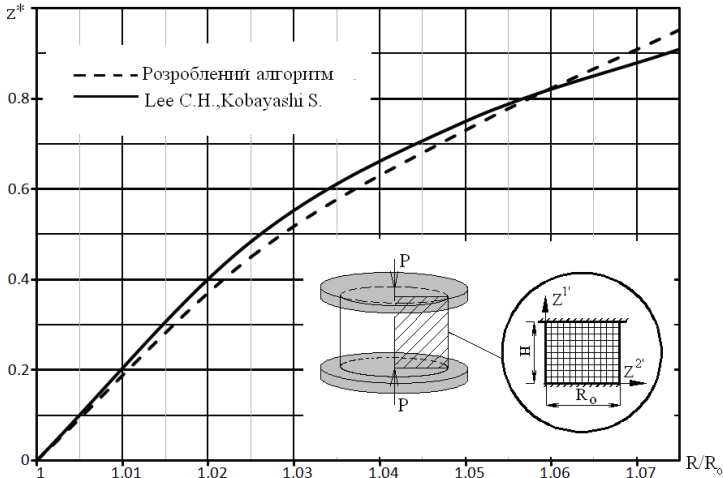


Рис. 11. Циліндр між двома плоскими плитами, дискретна модель, результати розрахунку

Механічні характеристики матеріалу прийняті у відповідності з графіком кривих деформаційного спрочнення сплаву Д16 при температурі 450°C . На границі контакту інструмент – заготовка є повне прилипання. В якості еталону прийняті результати експериментального дослідження, приведені в роботах [5;7;8].

В табл.3 показані результати, які відображають залежність величини відносного обтиснення до деформуючого зусилля. Можна відмітити добру збіжність результатів, отримані різними методами.

Таблиця 3

Відносне обтиснення %	5	10	15	20	25	30
P , МН [експ.]	0,023	0,025	0,026	0,027	0,028	0,03
P , МН (1)-(5)	0,024	0,026	0,027	0,028	0,029	0,031
Похибка	4.3%	4%	3,8%	3,7%	3,5%	3,3%

Висновки.

В статті представлений кроковий блочно-ітераційний алгоритм моделювання еволюційного процесу фізично і геометрично нелінійного

деформування, що ґрунтується на ітераційній процедурі Ньютона-Канторовича. Розглянуті модифікації алгоритму, згідно до яких розв'язання задачі проводиться або із обчисленою на кожному кроці матрицею жорсткості, компоненти якої враховують корекцію тензора пружних констант відповідно до властивостей пластичності і повзучості матеріалу, або із матрицею жорсткості, обчисленою за вихідними величинами тензора пружних констант та початковими наближеннями переміщень, на кожному кроці. Застосування зазначених модифікацій алгоритму має майже однакову ефективність і дозволяє зменшити обчислювальні витрати для розв'язання задач на основі МСЕ приблизно в два-три рази. Описані алгоритми розв'язання задач континуального руйнування дозволяють досліджувати процес зростання зон континуального руйнування з урахуванням пластичності, повзучості і накопичення ушкодження матеріалу. Вірогідність отримуваних на основі розроблених алгоритмів результатів підтверджується їх збіжністю при послідовному збільшенні параметрів дискретних моделей, а також незначним відхиленням від отриманих іншими авторами експериментальних і чисельних результатів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бойл Дж., Спенс Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. – М.: Мир, 1976. – 360 с.
2. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
3. *Локощенко А.М., Шестериков С.А.* Модель длительной прочности с немонотонной зависимостью деформации при разрушении от напряжения // Прикл. механика и техн. физика. – 1982. – № 1. – С. 160–163.
4. *Мазур В.Н., Кокоулин Э.М.* Оценка и прогнозирование ресурса ответственных элементов конструкций путем решения трехмерных краевых задач термовязкопластичности с учетом повреждаемости материала в процессе длительного термоциклического нагружения // Оценка и обоснование продления ресурса элементов конструкций: Тез. докл. межд. конф. / Отв. ред. В.Т.Трошенко: в 2 т. – К.: Нац.АН Украины. Ин-т пробл. прочности, 2000. – Т. 2. – С. 393–394.
5. *Малинин Н.Н., Романов К.И.* Решения задач горячего формоизменения методом конечных элементов. // Изв. вузов. Машиностроение. – 1985. – № 8. – С. 127–131.
6. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций.– М., Наука, 1966. – 732 с.
7. *Романов К.И.* Исследование методом конечных элементов горячей осесимметричной осадки. – Машиноведение, 1978. – № 5. – С. 79–86.
8. *Романов К.И.* Экспериментальное исследование горячей осадки // Изв. вузов. Машиностроение. – 1977. – № 6. – С. 147–1151.
9. *Соколовский В.Н.* Теория пластичности. – М.: Высш. шк., 1969.– 214 с.
10. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966.–456 с.
11. *Уилкинс М.Л.* Расчет упруго-пластических течений. – В кн.: Вычислительные методы в гидротехнике. – М.: Мир, 1967. – С. 212–263.

12. Шевченко Ю.Н., Мазур В.Н. Решение плоских и осесимметричных задач термовязкопластичности с учетом повреждаемости материала при ползучести // Прикл. механика. – 1986. – № 8. – С. 3–14.
13. Закономерности ползучести и длительной прочности. Справочник / Под ред. С.А. Шестерикова – М.: Машиностроение, 1983. –101 с.
14. Ли/Lee С.Н./ ,Кобаяси /Kobayashi S./ Анализ осесимметричной осадки и поперечной осадки в условиях плоской деформации сплошных цилиндрических заготовок методом конечных элементов // АМЕ, сер. В,1971. – N 2. – С. 73-84
15. Lemaitre J. Coupled Elasto-Plasticity and Damage Constitutive Equations. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1985. – № 51. – P. 31–49.

Отримано 11.05.09

Проведена разработка и исследование эффективности шагово-итерационного алгоритма решения геометрически нелинейных задач пластичности и ползучести двумерных тел. Исследована эффективность применения начальных приближений и коррекции тензора упругих констант соответственно свойствам пластичности и ползучести материала.

The elaboration and efficiency testing of step-iterative algorithm for gemetrically nonlinear plasticity and creep problems of two-mentioned bodies was made. The efficiency of initial approximation and correction of elasticity constant tensor according to plasticity and creep property of material has been investigated.