

УДК 539.3

Баженов В.А., д-р техн. наук,  
Ворона Ю.В., канд. техн. наук,  
Щербатюк О.М.

## ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ПРУЖНИХ КОМБІНОВАНИХ СИСТЕМ

Викладається та застосовується методика дослідження нестационарних коливань пружних комбінованих систем при сейсмічному впливі. Побудова матриць мас та жорсткості системи, що складається з масивних та тонкостінних елементів, здійснюється в базисі узагальнених координат, в якості яких використовуються власні форми коливань окремих складових та форми деформованого стану системи внаслідок одиничних переміщень точок контакту елементів. Наводиться розв'язок модельної задачі про реакцію системи рама-масив на квазістационарне стохастичне збудження основи.

В даній статті розглядаються нестационарні коливання пружної комбінованої системи при стохастичному впливі. Вважається, що система складається з масивних, пластинчастих та стержневих елементів. Для розв'язання задачі будемо користуватись методом нормальних координат, згідно з алгоритмом якого перш за все потрібно знайти власні частоти і форми всієї комбінованої конструкції. Ці характеристики забезпечують нетривіальний розв'язок системи

$$([K] - \omega^2[M])\{\varphi\} = 0, \quad (1)$$

де  $[M]$  і  $[K]$  - матриці мас і жорсткості комбінованої системи,  $\{\varphi\}$  - вектор форми коливань, яка відповідає власній частоті  $\omega$ .

Для побудови матриць  $[M]$  і  $[K]$  найчастіше застосовується метод скінченних елементів (МСЕ) [1], який є універсальним по відношенню до більшості інженерних задач. Особливо помітно переваги МСЕ проявляються в задачах про напружений стан тонкостінних конструкцій (пластин, оболонок, стержнів та їх комбінацій). В той же час при розрахунку масивних елементів конструкцій з МСЕ досить часто успішно конкурують алгоритми методу потенціалу [2,3], які у випадку пружного деформування дозволяють зменшити розмірність задачі шляхом розділення співвідношень, що пов'язують між собою невідомі на границі об'єкту, та представлень, які визначають переміщення та напруження всередині розрахункової області. Поєднати переваги обох методів допомагає суперелементний підхід, в рамках якого спочатку визначаються власні пари окремих складових, причому у випадку

масивних елементів це завдання виконується за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь (МГІР) [4,5].

Побудову матриць мас та жорсткості для кожного з суперелементів будемо виконувати в декартовій системі координат, яку будемо вважати природним базисом. Поряд з природним створимо допоміжний базис, кожна узагальнена координата якого є або певною формою коливань одного з суперелементів (при цьому інші елементи є нерухомими), або реакцією всієї системи на одиничне переміщення вздовж в'язі між суперелементами (при цьому переміщення вздовж інших в'язей дорівнюють нулю) [6, 7]. В роботі [7] наведена побудова матриць  $[M]$  і  $[K]$  в допоміжному базисі, а також отримана матриця переходу, яка пов'яже між собою величини, що характеризують жорсткість, інерційні та демпфіруючі властивості комбінованої системи в обох базисах. Розв'язок задачі на власні значення (1) дозволяє сформулювати  $N$ -вимірний вектор власних частот з компонентами  $\omega_j$  та матрицю форм коливань  $[\Phi]$  розміром  $N \times N$ , кожен стовпчик якої  $\varphi_j$  є формою коливань всієї конструкції. Через  $N$  тут позначено кількість динамічних ступенів свободи системи.

Необхідно також зупинитись на моделюванні нестационарного навантаження. Будемо тут розглядати навантаження, яке відповідає сейсмічному впливу на конструкцію. Згідно [8] приймемо квазістационарну модель сейсмічного впливу, тобто будемо вважати, що прискорення точок ґрунту можна подати у вигляді добутку деякої функції, що залежить тільки від часу, та функції, яка відповідає стаціонарному випадковому процесу:

$$\ddot{u}_g(t) = A_0 P(t) \zeta(t), \quad (2)$$

де  $A_0$  - деяка додатна константа;  $\zeta(t)$  - центрована стаціонарна випадкова функція часу;  $P(t)$  - квазіобвідна, яку обирають, як правило, у вигляді обмеженої детерміністичної функції, що спочатку зростає до максимуму, а потім асимптотично прямує до нуля при збільшенні  $t$ . В подальшому будемо використовувати квазіогинаючу наступного вигляду:

$$P(t) = \eta(t) t e^{-ct}, \quad (3)$$

де  $\eta(t)$  - одинична функція Хевісайда.

Випадкову функцію часу можна подати у вигляді стохастичного інтегралу Фур'є:

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (4)$$

де спектр  $Q(\omega)$  - центрована узагальнена випадкова функція частоти  $\omega$ , що задовольняє умові стохастичної ортогональності:

$$\langle \overline{Q}(\omega)Q(\omega') \rangle = S_Q(\omega)\delta(\omega - \omega'); \quad (5)$$

$S_Q(\omega)$  - спектральна щільність процесу.

З огляду на співвідношення (2-4), задача про реакцію комбінованої системи на кінематичне збудження основи, яке спричинене землетрусом, зводиться до багаторазового (при різних значеннях параметра  $\omega$ ) розв'язання системи:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = -\ddot{u}_g[M]\{1\}, \quad (6)$$

де  $\{u\}$  і  $\{\ddot{u}\}$  - відповідно вектори відносних переміщень та прискорень точок конструкції.

Чисельне визначення кореляційної функції реакції об'єкту виконується за формулою:

$$\begin{aligned} K_u(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varphi(\omega) \bar{u}_{j\omega}(x, t_1) u_{j\omega}(x, t_2) d\omega \cong \\ &\cong \sum_{l=-L}^L S_\varphi(\omega_l) \bar{u}_{j\omega}(x, t_1) u_{j\omega}(x, t_2) \Delta\omega. \end{aligned} \quad (7)$$

В формулі (7) рискою над символом позначені комплексно спряжені величини.

Оскільки застосовується метод нормальних координат, то кожному складову переміщення можна подати наступним чином [9]:

$$u_{j\omega}(x, t) = \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)}(x) y_m(\omega, t), \quad (8)$$

де  $\varphi_j^{(m)}(x)$  -  $m$ -а форма коливань об'єкту, нормована таким чином, що

$$\int_V \varphi_j^{(m)} \varphi_j^{(n)} dV = \delta_{mn}. \quad (9)$$

Тут через  $V$  позначена область, яку займає об'єкт розрахунку.

Використовуючи (7), (8) та ортогональність форм коливань відносно матриць мас і жорсткості, приходимо до системи незв'язаних диференціальних рівнянь другого порядку відносно нормальних координат

$$y_m(\omega, t) + \Omega_m^2 y_m(\omega, t) = G_m(t), \quad (10)$$

де

$$G_m(t) = -A_0 P(t) e^{i\omega t} \int_V \varphi_j^{(m)} dV.$$

Якщо квазіігинаюча має вигляд (3), а внутрішнє тертя в матеріалі характеризується незалежним від частоти коливань параметром демпфірування  $\xi$ , то кожне з рівнянь системи (10) набуде такого вигляду:

$$y_m(\omega, t) + 2\xi\Omega_m y_m(\omega, t) + \Omega_m^2 y_m(\omega, t) = B_m t e^{(i\omega - c)t} \eta(t), \quad (11)$$

де

$$B_m = A_0 \int_V \varphi_j^{(m)} dV.$$

Оскільки система (11) є системою незалежних (непов'язаних одне з одним) диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами, то розв'язок кожного з цих рівнянь може бути знайдений в замкненій формі [5], після чого за допомогою співвідношення (8) отримуємо кореляційну функцію реакції об'єкту:

$$K_u(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)} y_m(\omega, t_2) \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)} y_m(\omega, t_1) S_\varphi(\omega) \right] d\omega. \quad (12)$$

В свою чергу дисперсію переміщень точок конструкції отримуємо, поклавши в (12)  $t_1 = t_2 = t$ :

$$\sigma_u^2(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)} \bar{y}_m \cdot \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)} y_m \cdot S_\varphi(\omega) d\omega. \quad (13)$$

Сукупність співвідношень (6-13) утворює алгоритмічну основу для розрахунку нестационарних випадкових коливань комбінованих пружних систем.

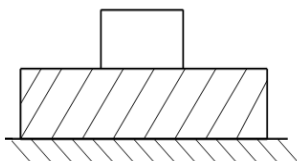


Рис. 1. Модель комбінованої системи

Для демонстрації можливостей розробленого алгоритму була розв'язана задача про коливання рамної конструкції висотою 4 м, прольотом 6 м, перерізом 0.5x0.5 м, що спирається на пружний масив товщиною 6 м, який, в свою чергу лежить на скельній основі (рис.1). Густина матеріалу масиву становить 2000 кг/м<sup>3</sup>, модуль пружності 30000 кПа, а

коефіцієнт Пуассона 0.25. Маса рами зосереджена посередині кожного з елементів, причому маса ригеля 3550 кг, а маса кожної стійки 2500 кг. Модуль пружності матеріалу рами  $3 \times 10^7$  кПа.

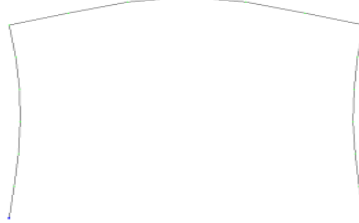
Для рамного елемента власні пари знаходимо за допомогою навчальної версії обчислювального комплексу ЛИРА [10]. Вигляд перших чотирьох форм наведених на рис. 2, причому через  $\Omega^f$  позначені значення власних частот рами.

$$\Omega^f = 38.79 \text{ рад/с}$$



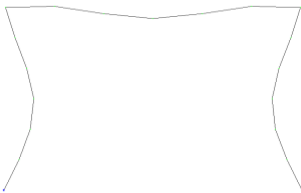
1-а форма коливань

$$\Omega^f = 133.18 \text{ рад/с}$$



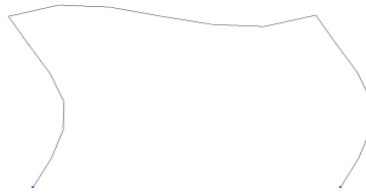
2-а форма коливань.

$$\Omega^f = 267.89 \text{ рад/с}$$



3-я форма коливань.

$$\Omega^f = 317.56 \text{ рад/с}$$



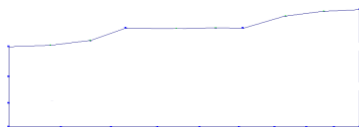
4-а форма коливань.

Рис. 2. Форми власних коливань рамного елемента

Перші вісім форм і частот вільних коливань масивного елемента знайдені за методикою, викладеною в [4, 5]. Чотири з них показані на рис.3, де символом  $\Omega^m$  позначені значення власних частот масиву.

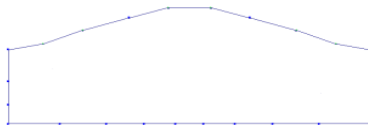
Далі, визначаємо реакцію кожного з елементів на одиничний зсув кожної із спільних точок, тобто знаходимо характерні переміщення, обумовлені в'язями, після чого за методикою, викладеною в [7], будуємо матриці жорсткості і мас всієї комбінованої системи. За наявності матриць жорсткості і мас комбінованої системи визначення власних частот і форм конструкції за відповідним алгоритмом не становить труда.

$$\Omega^m = 23.39 \text{ рад/с}$$



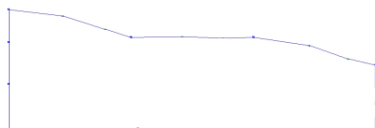
1-а форма коливань

$$\Omega^m = 31.68 \text{ рад/с}$$



2-а форма коливань

$$\Omega^m = 36.64 \text{ рад/с}$$



3-я форма коливань

$$\Omega^m = 38.96 \text{ рад/с}$$

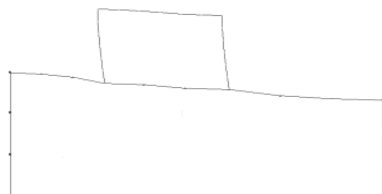


4-а форма коливань

Рисунок 3 – Форми власних коливань масивного елемента

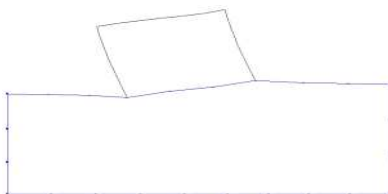
Всього було визначено 16 власних частот і форм коливань комбінованої конструкції, чотири з яких наведені на рис. 4.

$$\Omega = 20.16 \text{ рад/с}$$



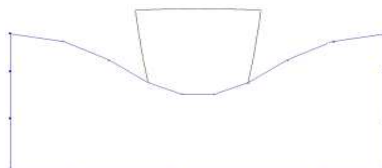
1-а форма коливань

$$\Omega = 25.16 \text{ рад/с}$$



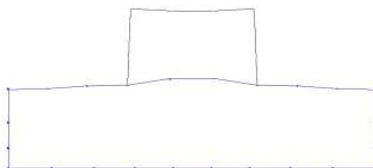
2-а форма коливань

$$\Omega = 30.33 \text{ рад/с}$$



3-я форма коливань

$$\Omega = 32.23 \text{ рад/с}$$



4-а форма коливань

Рис. 4. Форми власних коливань комбінованої системи

На основі результатів модального аналізу було проведено дослідження реакції системи на сейсмічний вплив за двома різними методиками. Розрахунок за першою методикою полягав в безпосередньому інтегруванні рівнянь (11) з правою частиною, яка відповідала кінематичному збудженню у вигляді синтезованої акселерограми, зображеної на рисунку 5,а. Ведучий період зміщення основи  $T_0$  при таких коливаннях приблизно дорівнював 0.4 с. Зміна величини середньоквадратичного відхилення точки, яка розташована посередині ригеля рамного елемента, показана на рисунку 5, б.

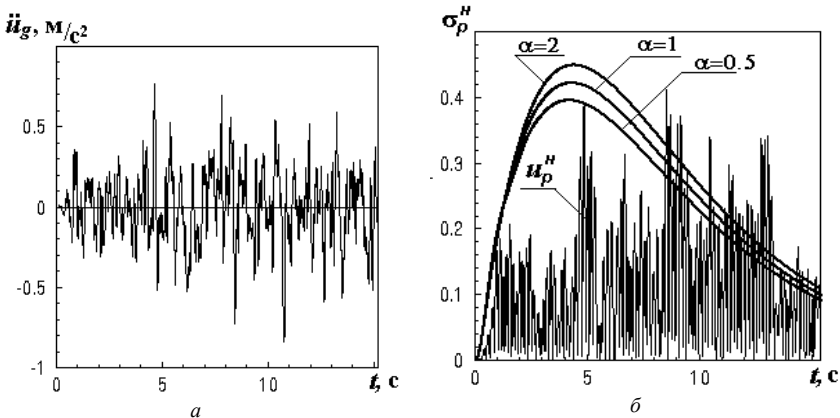


Рис. 5. Нормовані середньоквадратичні переміщення середини ригеля: а – синтезована акселерограма; б – порівняння результатів розрахунку

На цьому ж рисунку наведені графіки зміни відповідної характеристики, отриманої як корінь квадратний із величини  $\sigma_u^2$ , визначеної за формулою (13). При розрахунках вважалося, що стаціонарна складова  $\zeta(t)$  сейсмічного прискорення ґрунту  $\ddot{u}_g(t)$  відповідала процесу з прихованою періодичністю, спектральна щільність якого має вигляд:

$$S_{\varphi}(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{\omega^2 + \theta^2 + \alpha^2}{(\omega^2 - \theta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad (14)$$

де згідно [11] характерна частота процесу  $\theta = \frac{2\pi}{T_0}$ , а параметр кореляції  $\alpha$  приймав значення 0.5, 1 і 2  $\text{с}^{-1}$ . Параметр  $c$  у виразі для

квазіобвідної (3) дорівнював  $\frac{0.1}{T_0}$ , а константа  $A_0$  приймалася такою, щоб максимальне значення  $P(t)$  у виразі (2) дорівнювало найбільшому за абсолютною величиною значенню прискорення на графіку синтезованої акселерограми.

Порівнюючи результати, наведені на рис. 5, можна відмітити, що в даному випадку для оцінки максимального значення переміщення достатньо було взяти лише одну реалізацію нестационарного випадкового процесу у вигляді синтезованої акселерограми. При цьому найбільше за модулем нормоване переміщення середини ригеля  $u_p^H$  дорівнювало 0.412, тоді як нормовані максимуми  $\sigma_u^H$  становили 0.395, 4.213 і 4.49 при значеннях параметра кореляції  $\alpha$  відповідно 0.5, 1 і  $2 \text{ с}^{-1}$ . В той же час спостерігалась значна розбіжність в оцінках моменту досягнення максимального значення. Так величина  $u_p^H$  досягала максимуму в момент часу  $t = 8.55 \text{ с}$ , а  $\sigma_u^H$  - в моменти 4.18 с, 4.29 с та 4.4 с при згаданих значеннях параметра  $\alpha$ .

1. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общей А.С.Сахарова и И.Альтенбаха. К.: Вища школа, 1982. – 479 с.
2. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. – М.: Ф-М, 1963. – 472 с.
3. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
4. Agnantiaris J.P., Polyzos D., Beskos D.E. Three-dimensional structural vibration analysis by the Dual Reciprocity BEM // Computational Mechanics, 1998. – vol. 21. – P. 372-381.
5. Баженов В.А., Дехтярюк С.С., Ворона Ю.В. Методика чисельного дослідження нестационарних коливань пружних об'єктів // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2004. – Вип. 75.– С. 3-12.
6. Харти В.С. Динамический анализ конструкций, основанный на исследовании форм колебаний отдельных элементов // Ракетная техника и космонавтика. – 1965. – № 4. – том 3. – С. 130-138
7. Баженов В.А., Ворона Ю.В., Щербатюк О.М. Побудова дискретних динамічних моделей комбінованих систем об'єктів // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2005. – Вип. 77.– С. 83-90.
8. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
9. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
10. Лантух-Лященко А.И. ЛИРА. Программный комплекс для расчета и проектирования конструкций. – К.М.: Факт, 2001. – 312 с.
11. Лужин О.В. Вероятностные методы расчета сооружений. – М.: МИСИ, 1983. – 122 с.