

УДК 539.3

## САМОУПРОЧНЯЮЩИЕСЯ КОНСТРУКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

П.В. Алявдин<sup>1</sup>

д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой строительных конструкций

<sup>1</sup> *Зеленогурский университет, Зелена Гура, Польша*

Рассматривается определение, анализ и способы создания несущих систем, которые обладают повышенной прочностью, жесткостью и безопасностью, и поэтому называются самоупрочняющимися конструктивными системами. Предложены математические модели оптимизации таких конструкций, как дискретных механических систем, под действием постоянной, монотонно возрастающей или повторно-переменной нагрузки или кинематических воздействий. Использована двухуровневая постановка задачи оптимизации. Предельные параметры переменных воздействий находятся на первом уровне оптимизации. На втором уровне максимизируются параметры постоянной равновесной нагрузки, пригруза и/или минимизируется стоимость системы. Предложена матричная форма записи формул для равновесной нагрузки на изменяемые системы. Представлены примеры использования предлагаемых методов и способов создания самоупрочняющихся конструктивных систем.

**Ключевые слова:** самоупрочняющиеся конструктивные системы, предельный анализ, двухуровневая оптимизация, равновесная нагрузка

### 1. Введение

Эффект самоупрочнения конструкций, вследствие изменения их геометрии под нагрузкой, был известен давно, однако и в настоящее время его использование и оптимизация вызывает интерес [14, 17, 22, 23, 26].

Самоупрочняющейся конструктивной системой (СУКС) будем называть такую систему, которая в состоянии предельного равновесия (превратившись в механизм или будучи изначально изменяемой) способна за счет изменения своей геометрии воспринимать дополнительную нагрузку или другие внешние воздействия. Отказ или разрушение систем СУКС происходит постепенно, при увеличении перемещений и не сопровождается динамическими эффектами типа прощелкивания.

К числу самоупрочняющихся систем относятся работающие преимущественно на растяжение висячие и вантовые конструкции, а также системы типа tensegrity [9, 11, 18, 21], у которых длинные элементы растянуты, а короткие элементы - сжаты. К этим системам (по определению) относятся также некоторые изначально геометрически изменяемые [6] или вырожденные (мгновенно-изменяемые или мгновенно-жесткие) системы [24]. Различные комбинации названных конструкций со стержневыми или пластинчато-оболочечными элементами усиления могут обладать свойствами исходных систем [8]. Однако, как было показано ранее [1, 15], существуют и другие самоупрочняющиеся конструктивные системы, для множества (класса) которых автором [2] были предложены критерии су-

ществования (устойчивости состояния пластического течения/разрушения), эвристический способ формирования (создания), а также проведены численные исследования таких систем [12, 13]. Заметим, что системы СУКС ранее были названы в работах автора [1, 2] «геометрически» упрочняющимися; здесь это название уточнено. Оптимизация и управление поведением подобных несущих конструкций рассматривались в работах [10, 14].

В данной работе принимается, что состояние предельного равновесия может быть обусловлено только появлением пластических деформаций (или пластических шарниров при изгибе), однако данный подход применим и к хрупкому разрушению элементов. Предлагается новый алгоритмический критерий существования, развивается постановка двухуровневых задач оптимизации и приводятся примеры расчетов систем СУКС. Отмечаются особенности использования различных программных комплексов для использования в расчетах. Рассматриваются эвристические способы создания или синтеза самоупрочняющихся систем. Отмечается, что добавление элементов усиления к изменяемым системам СУКС может обеспечить их повышенную безотказность (живучесть) по сравнению с исходными системами.

## 2. Определение самоупрочняющихся конструктивных систем

### 2.1. Соотношения состояния систем

Запишем определяющие соотношения состояния (билинейно упрочняющейся) упругопластической конструкции как дискретной (например, конечноэлементной) системы, воспринимающей повторно-переменные нагрузки  $F, d$  при больших перемещениях. При этом нагрузка  $F$  состоит из постоянной  $F_c$  (собственный вес, пригруз) и переменной  $F_v$ , составляющих. Если функции текучести, упрочнения и пластического потенциала имеют билинейный характер, получим

$$\begin{aligned} q &= \gamma(u), \quad A_n(u)S = F, \quad F = F_c + F_v, \quad q = e + p + d, \quad e = DS, \\ p &= V\lambda, \quad \phi = N^T S - H\lambda - K \leq 0, \quad \dot{\phi} = N^T \dot{S} - H\dot{\lambda}, \\ \lambda &\geq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \phi^T \dot{\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь использованы следующие обозначения [2]:

$u, F \in R^n$  – векторы, объединяющие подвекторы  $u_j, F_j$  обобщенных перемещений и внешних сил в  $j$ -х свободных узлах,

$$u := u(N) = (u_j, j \in J_F), \quad F := F(N) = (F_j, j \in J_F);$$

$n$  – число степеней свободы системы;  $N$  – их множество,  $|N| := n$ ;  $J_F$  – множество свободных узлов;  $q, e, p, d, S \in R^m$  – векторы, объединяющие подвекторы  $q_h, \dots, S_h$  соответственно суммарных, упругих и пластических обобщенных деформаций; дисторсий, обобщенных усилий  $h$ -х элементов,  $h \in H_e; H_e, |H_e|$  – множество и число конечных элементов;

$$q := q(M) = (q_h, h \in H_e), \dots, S := S(N) = (S_h, h \in H_e);$$

$m$  – размерность векторов;  $M$  – множество компонент векторов,  $|M| := m$ ;  $\lambda, \varphi, \psi, \xi, K \in R^y$  – векторы пластических множителей, соответствующих им функций текучести, пластических потенциалов, функций упрочнения и констант текучести для всего множества  $Y$  режимов течения,  $|Y| := y$  – число режимов течения;

$$\lambda := \lambda(Y) = (\lambda_h, h \in H_e), \dots, K := K(Y) = (K_h, h \in H_e);$$

$N := N(M, Y) = \text{diag} N_h$  – диагональная блочная  $m \times y$ -матрица;  $N_h$  – матрица  $h$ -го конечного элемента;  $V := V(M, Y) = \text{diag} V_h$  – аналогичная диагональная блочная  $m \times y$ -матрица, состоящая из матриц  $V_h$   $h$ -х конечных элементов. Как и для элементов из материала, подчиняющегося ассоциированному закону течения,  $\varphi = \psi$ ,  $N = V$ . Если функции текучести и пластические потенциалы линейны относительно  $S$ , матрицы  $N$  и  $V$  будут включать внешние нормальные векторы к соответствующим плоскостям  $\varphi$  и  $\psi$ ;  $H := H(Y, Y) = \text{diag} H_h$  – диагональная блочная  $y \times y$ -матрица упрочнения, образованная из матриц  $H_h(r^h, r^h)$  упрочнения  $h$ -х элементов.

Как и для элементов из материала, подчиняющегося ассоциированному закону течения,  $\varphi = \psi$ ,  $N = V$ . Столбцы матрицы  $V$  и  $N$  служат соответственно градиентами (субградиентом) функций текучести  $\varphi$  и пластических потенциалов  $\psi$  (объединенных функций  $\varphi_0$  и  $\psi_0$ ).

Вектор скоростей пластических деформаций  $\dot{p}$ ,  $\dot{p} \in R^m$ , выразится через матрицу  $V$  и вектор скоростей пластических скалярных множителей  $\dot{\lambda}$  в виде произведения  $\dot{p} = \partial \varphi \dot{\lambda} = V \dot{\lambda}$ .

Соотношения (1) определяют состояние упрочняющейся упругопластической конструкции при больших перемещениях, воспринимающей квазистатические, произвольным образом изменяющиеся во времени нагрузки и воздействия  $F, d \in \Omega_{F,d}$ ,

$$F \in \Omega_{\dot{F}}(F_j, j \in J), \quad d \in \Omega_{\dot{d}}(d_j, j \in J), \quad \Omega_{F,d} = \Omega_f \cup \Omega_d. \quad (2)$$

Здесь область изменения нагрузок и воздействий  $\Omega_{F,d}$  объединяет области  $\Omega_F$  и  $\Omega_d$ , которые определяются соответственно векторами отдельных нагружений  $F_j$  и воздействий  $d_j, j \in J$ ,  $J$  – множество послед-

них. Описание и построение указанных областей приводится в главе 2 работы [2]. Необходимо отметить, что она функция текучести  $\varphi$  существенно зависит от характеристик циклов нагружения,  $\varphi := \varphi(\Omega_F, d)$ .

Для практических расчетов конструкций в качестве условий текучести обычно принимаются, с необходимыми предположениями, условия прочности элементов в соответствии с действующими нормами проектирования.

## 2.2. Устойчивость состояния разрушения систем

Из анализа представленных выше соотношений следует критерий общей устойчивости состояния геометрически нелинейных упрочняющихся упругопластических систем с ассоциированным законом течения, работающих при повторно-переменном нагружении, имеет вид [2]

$$u^T G(u, S)u - u^T A(u)CA(u)^T u - 2u^T A(u)CN\lambda + \lambda^T B\lambda > 0. \quad (3)$$

где  $G(u, S) := G(N, N)$  - симметричная матрица порядка  $n$ , аналогичная геометрической матрице жесткости  $G(S_0)$  в линеаризованном уравнении (1)<sub>2</sub>,  $AS + G(S_0)u = F$ ;

$$B = H + N^T CN. \quad (4)$$

Вместо больших перемещений в уравнениях (1)<sub>1,2</sub> можно рассматривать только геометрические эффекты второго порядка:

$$q = A^T u, \quad (5)$$

$$AS = G(S_0)u = F, \quad (6)$$

Тогда условие (3) примет следующий вид [25],

$$\lambda_t^T M \lambda_t > 0, \quad (7)$$

где  $M = M(Y, Y)$  - квадратная матрица порядка  $y$ ,

$$M = H - N^T ZV, \quad (8)$$

в общем случае несимметричная,  $M \neq M^T$ , также как и входящая в нее матрица  $H$ ,  $H \neq H^T$ ;  $Z = Z(M, M)$  -  $m \times m$  - матрица влияния Грина, преобразующая векторы дисторсий в векторы усилий:

$$Z = CA^T T^{-1} AC - C, \quad (9)$$

$$T = ACA^T + G, \quad (10)$$

$D = D(M, M) = \text{diag} D_h$ ,  $C \equiv C(M, M) = \text{diag} C_h$  - блочные диагональные матрицы упругости (податливости и жесткости) порядка  $m$ ,  $\text{rank} D = m$ ,  $\text{rank} C = m$ , симметричные и неособенные,  $\det D \neq 0$ ,  $\det C \neq 0$ ;  $D = C^{-1}$ .

Для проверки несимметричной матрицы  $M = [m_{ij}]$  на положительную определенность рассматривается ее симметричная часть  $M_s = 0,5(M + M^T)$ .

Если нижняя грань собственных значений  $M_s$  положительна, то положительная определенность матрицы  $M$  гарантирована.

Известны различные аналитические критерии и алгоритмические процедуры проверки симметричных матриц  $M$  на положительную определенность. Так, в соответствии с критерием Сильвестра все ведущие главные определители (миноры)  $\det M_k$  матрицы  $M$  должны быть положительными,

$$\det M_k = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{k1} & \dots & m_{kk} \end{bmatrix} > 0, \quad k \in K_a, \quad (11)$$

где  $K_a$  – множество ведущих главных определителей,  $|K_a| = n_a$ ;  $n_a$  – порядок матрицы  $M$ . Условия (11) являются необходимыми и достаточными.

Механический смысл данного критерия состоит в том, что все возможные механизмы разрушения такой конструкции будут находиться в состоянии устойчивого пластического деформирования.

Для однократного нагружения возможен также критерий неотрицательной «касательной» жесткости конструкции в предельном состоянии [1].

Приведенные выше критерии определяют множество или класс самоупрочняющихся систем, обладающих повышенной прочностью, жесткостью и безотказностью.

### 3. Первый уровень оптимизации систем: Предельный анализ

Рассмотрим сначала постановку задачи о предельных нагрузках на геометрически нелинейные системы из упрочняющегося материала. Она отличается от соответствующих постановок [16, 19] для геометрически линейных систем из идеально упругопластического материала наличием критерия устойчивости типа (3). Кроме того, к условиям состояния системы необходимо присоединить еще ограничения на перемещения

$$u^- \leq u_t \leq u^+, \quad (12)$$

и (или) на пластические деформации

$$p^- \leq p_t \leq p^+, \quad (13)$$

где  $u^-, u^+ \in R^n$ ,  $p^-, p^+ \in R^m$ , – соответственно векторы заданных предельных перемещений свободных узлов и предельных пластических деформаций элементов системы. Аналогичным образом ограничиваются скорости соответствующих значений.

Задача определения оптимальных пределов повторно-переменной нагрузки заключается в максимизации некоторой линейной функции векторов отдельных  $j$ -х нагружений  $F_j$ ,  $d_j$ ,  $j \in J$ , которые определяют разме-

ры областей  $\Omega_F$  и  $\Omega_d$  изменения повторно-переменной нагрузки и воздействий,

$$\sum_{j \in J} (T_{F_j}^T F_j + T_{d_j}^T d_j) \rightarrow \max \quad (14)$$

при условиях (1)-(3), (12), (13).

Здесь  $T_{F_j}$ ,  $T_{d_j}$  – векторы весовых коэффициентов, соответствующие векторам отдельных  $j$ -х нагружений  $F_j$ ,  $d_j$ ,  $j \in J$ ,  $J$  – их множество. Заметим, что путем изменения дислокаций  $d_j$ ,  $j \in J$ , можно оптимизировать состояние предварительного напряжения конструкции.

#### 4. Второй уровень оптимизации: Стоимость и/или постоянная нагрузка

Численный анализ показывает, что собственный вес и пригруз оказывают положительное влияние на поведение рассматриваемых систем.

Постоянная нагрузка на конструкции присутствует всегда, иногда к ней добавляют еще дополнительный пригруз, обеспечивающий стабилизацию системы. В любом случае, рекомендуется принимать такую постоянную нагрузку и пригруз, которые оказываются „равновесными“ для основной механизм отказа системы. Способы вычисления „равновесной“ нагрузки приведены ниже.

Отметим, что задача оптимизации несущей способности произвольных жесткопластических систем при однократном нагружении, с учетом постоянной нагрузки, рассматривалась в работе [19].

В то же время постоянная нагрузка увеличивает стоимость  $C$  системы. Поэтому на втором уровне оптимизации можно минимизировать стоимость системы  $C$  и/или максимизировать величину равновесной постоянной нагрузки и пригруза  $F_c$  на системы СУКС,

$$C(K, l, F_c) \rightarrow \min, \quad (15)$$

$$T_c^T G_c \rightarrow \max, \quad (16)$$

где  $l$  – вектор длин элементов.

Критерии (15) и (16) здесь учитываются одновременно, с учетом соответствующих масштабирующих множителей. Решение подобной векторной (или многокритериальной) задачи оптимизации было проанализировано в ряде работ, например, [1]. Эти критерии можно учитывать на втором уровне оптимизации также независимо, один за другим.

Проблема двухуровневой оптимизации в настоящее время интенсивно развивается, методы ее решения представлены в работах [5, 7, 20].

## 5. Равновесные и неравновесные нагрузки на самоупрочняющиеся системы

Определение равновесной нагрузки известно в теории геометрически изменяемых и висячих и вантовых конструкций [24]; это нагрузка, которая не вызывает каких-либо перемещений в конструкциях при отсутствии деформаций элементов конструкции. Аналогичное понятие нагрузки использовалось для определения оптимальной формы арок (кривых давления), работающих на чистое сжатие (без изгиба). Соответственно неравновесная нагрузка равна разности произвольной и равновесной нагрузок.

Здесь, в отличие от известных подходов [24], предлагаются матричные формулы для вычисления равновесной нагрузки.

В уравнениях равновесия

$$AS = F \quad (17)$$

принимая некоторый  $m$ -подвектор  $F_0$   $n$ -вектора равновесной нагрузки  $F$  заданным, тогда уравнения (17) можно записать в виде двух уравнений следующим образом

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где  $A_0, A_1$  – соответственно  $m \times m$ - и  $s \times m$ -подматрицы матрицы  $A$ , причем подматрица  $A_0$  – неособенная.

Из первого уравнения находим вектор усилий  $S$  от равновесной нагрузки

$$S = A_0^{-1} F_0, \quad (19)$$

его подстановка во второе уравнение дает подвектор  $F_1$  вектора равновесной нагрузки  $F$ ,

$$F_1 = A_1 S = d_{01} F_0, \quad (20)$$

где  $d_{01}$  -  $s \times m$ -матрица,

$$d_{01} = A_1 A_0^{-1}. \quad (21)$$

Тогда окончательно вектор равновесной нагрузки  $F$  примет вид,

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ d_{01} F_0 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} E \\ d_{01} \end{bmatrix} F_0. \quad (22)$$

## 6. Способы создания самоупрочняющихся систем [2]

Наиболее простые способы создания таких систем заключаются в отыскании допустимого (не обязательно оптимального) проекта конструкции, удовлетворяющей условию устойчивости состояния пластического течения. Ниже предлагаются некоторые аналитические и эвристические способы решения последней задачи.

*Аналитические способы* основаны на непосредственном исследовании условия устойчивости (3) или (11) пластического течения конструкции в предельном состоянии. Система может быть как геометрически изменяемой, так и мгновенно-изменяемой или мгновенно-жесткой (вырожденной). В первом случае вектор усилий зависит только от нагрузки, а во втором - еще и от состояния предварительного напряжения. Само условие устойчивости может проверяться алгоритмически, с использованием имеющихся программных комплексов.

*Эвристические способы* основаны на образовании таких шарнирно-стержневых систем, одно-, двух- или трехмерных конструкций, механизм разрушения которых содержит обобщенные пластические шарниры или соответствующие конечные элементы в состоянии текучести/разрушения. Главная же особенность предлагаемых здесь способов заключается в ограничении множества преобразований структуры конструкции путем введения условия устойчивости анализируемых механизмов разрушения. Кроме того, вводится ограничение на виды механизмов разрушения („группы отказов”) конструкции.

*Наиболее простым эвристическим способом* создания самоупрочняющихся конструкций служит следующий прием. С этой целью какая-либо связь или шарнир исходной самоупрочняющейся или геометрически неизменяемой конструкции развивается путем образования нового звена с малыми размерами таким образом, чтобы, во-первых, число степеней свободы увеличивалось более чем на единицу; во-вторых, чтобы при действии заданных нагрузок в связях нового звена возникали преимущественно растягивающие напряжения; в-третьих, чтобы новое звено не попало ни в одну из групп отказа системы при образовании любых механизмов разрушения.

*Способ* формирования „скелета-позвоночника” несущей конструкции в виде особых (мгновенно-изменяемых или мгновенно-жестких) систем, висячих и вантовых систем, а также tensegrity-систем, с последующим возможным усилением конструкции дополнительными элементами-связями.

## **7. Примеры использования предложенных способов**

7.1. Преобразование перекрестной балочной конструкции, подкрепленной шпренгелем (рис. 1.a), путем повторного развития центрального шарнира в две четырехзвенные цепи (рис. 1.b). Предельное равновесие такой системы после образования в узлах конструкции пластических шарниров будет устойчивым.

7.2. Преобразование перекрестной балочной конструкции, подкрепленной шпренгелем (рис. 1.a), путем повторного развития центрального



шарнира в две четырехзвенные цепи (рис. 1.б). Предельное равновесие такой системы после образования в узлах конструкции пластических шарниров будет устойчивым.

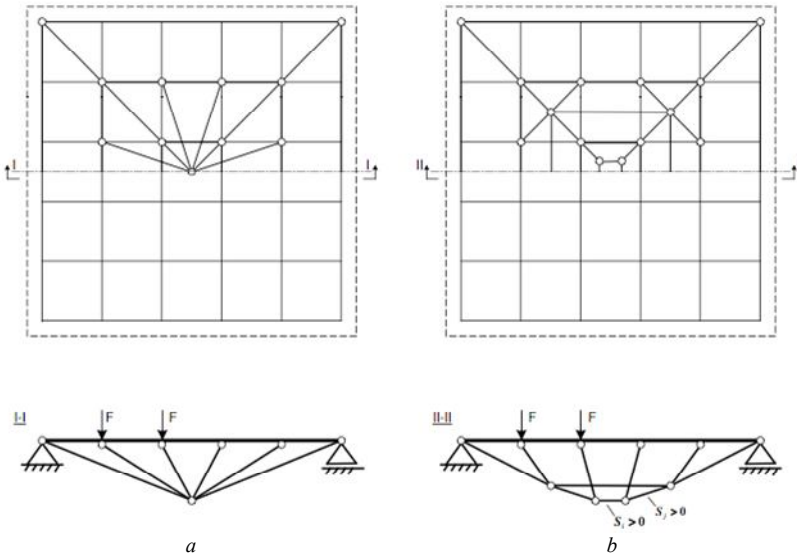


Рис. 1. Преобразование перекрестной балочной конструкции, подкрепленной шпренгелем

7.3. Автором предложен новый тип фундамента под колонну [3], армирование которого в виде двух концентрических колец и радиально расположенных между ними радиальных стержней изменяет схему работы фундаментной плиты, создавая эффект обоймы, что повышает несущую способность конструкции. Эта конструкция реализована в г. Харькове, в депо „Сортировочная”.

7.4. Эффект самоупрочнения реализуется также в предложенной авторами [4] плите ленточного фундамента.

## 8. Численный анализ самоупрочняющихся систем [13]

Были выполнены расчеты двух видов упругопластических стержневых систем, шпренгельных балок и виадука, в геометрически и физически нелинейной постановке. Решение находилось на основе метода конечных элементов (МКЭ) с использованием модуля нелинейного расчета Nlgeom программы ABAQUS/Standard, а также по программе Wolfram Mathematica.

### Анализ шпренгельных балок

Рассмотрены шпренгельные балки, шарнирно опертые на концах (рис. 2). Сосредоточенные силы прикладываются в узлах балки. Поперечное сечение балок  $0,3 \times 0,5$  м, их длина  $L = 12$  м; высота шпренгеля  $h = 2$  м. Параметры материала балки и шпренгеля следующие. Для балки модуль упругости  $E_c = 30$  ГПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,2$ ; предел текучести  $\sigma_0 = 10$  МПа; для элементов шпренгеля 1-2, 2-4 и 4-6 принята жесткость  $EA_1 = 126$  МН, а для остальных элементов, 2-3 и 4-5, принята жесткость  $EA_2 = 12\ 600$  МН.

Модели материала системы: идеально упругопластические балки и идеально упругие элементы шпренгеля.

В расчетах по МКЭ балки моделировались с использованием двумерного балочного элемента с двумя узлами (B21), для шпренгеля использовался двумерный ферменный элемент с двумя узлами (T2D2).

Были рассчитаны четыре варианта шпренгельных балок, для  $b = 2$  и  $3$  м (рис. 2а), а также  $b = 4$  и  $5$  м (рис. 2б,с), для следующих видов нагружения:

(1) без пригруза/постоянной нагрузки: узел 3 нагружен только переменной силой, возрастающей от нуля до  $F_3 = 500$  кН, тогда как сила  $F_5 = 0$  кН;

(2) с пригрузом/„равновесной” нагрузкой (от собственного веса) в виде постоянных сил  $F_3 = F_5 = 100$  кН и с переменной силой  $F_3$ , возрастающей от  $100$  кН до  $500$  кН.

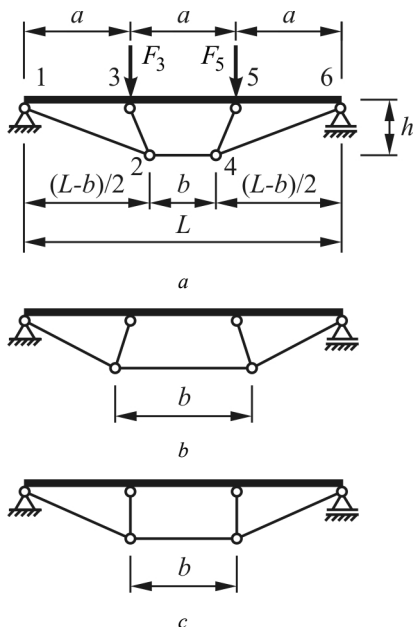


Рис. 2. Схема и нагрузка шпренгельной балки: (а)  $b < L/3$ ; (б)  $b = L/3$ ; (в)  $b > L/3$

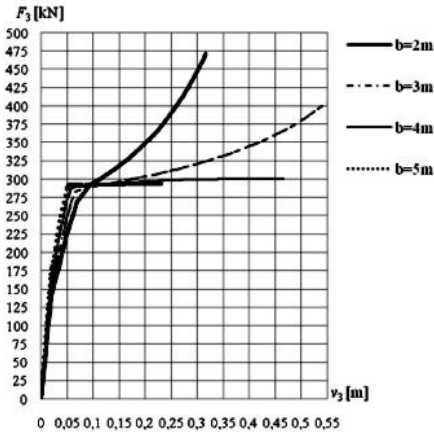


Рис. 3. Зависимость нагрузка-перемещение  $F_3$ - $v_3$  для системы без пригруза ( $F_3 = F_5 = 0$ )

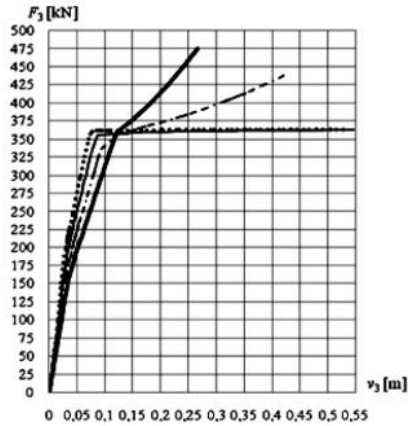


Рис. 4. Зависимость нагрузка-перемещение  $F_3$ - $v_3$  для системы с пригрузом ( $F_3 = F_5 = 100$  кН)

Целью численных исследований была оценка несущей способности балок с различными шпренгельными системами (рис. 2а,б,с) без пригруза ( $F_3 = F_5 = 0$  кН) и с пригрузом ( $F_3 = F_5 = 100$  кН), а также анализ закритического поведения таких стержневых систем. Результаты этих исследований показаны на рис. 3 и 4.

Несущая способность  $F^0$  конструкции без пригруза узлов 3 и 5 ( $F_3 = F_5 = 0$  кН) для всех шпренгельных систем равнялась 290 кН (рис. 3).

Эффект самоупрочнения (возрастание на рис. 3 ветви кривой  $F_3$ - $v_3$ ) наблюдался только для шпренгелей с наклонными внизу к центру стойками ( $b = 2$  и 3 м). В случаях же  $b = 4$  и 5 м, когда достигался предел несущей способности  $F^0$ , у конструкции появлялись большие перемещения и затем она разрушалась. Отметим, что в случае  $b = 5$  м, как показано ниже, на Рис. 3 должна еще образовываться ниспадающая ветвь кривой  $F_3$ - $v_3$ , которую из прямого расчета по программе ABAQUS получить не удается.

Следовательно, для наклонных внизу к центру стоек шпренгеля состояние предельного равновесия системы будет устойчивым, для наклонных от центра стоек - неустойчивым, а для вертикальных стоек - безразличным.

Для системы с пригрузом ( $F_3 = F_5 = 100$  кН) на рисунке 4 показана зависимость между нагрузкой  $F_3$  и вертикальным перемещением  $v_3$ . В этом случае предельная несущая способность  $F^0$  конструкции составляла 360 кН. А увеличение несущей способности (эффект пригруза), например, для систем с  $b < L/3$ . С системами без учета постоянной нагрузки составляет примерно 20% (рис. 4).

Характер разрушения шпренгельных балок следующий. При увеличении нагрузки  $F_3$  в балочном элементе вначале возникает первый пластический шарнир слева от узла 3, а затем второй пластический шарнир возникает справа от узла 5, и система превращается в кинематический механизм (рис. 5).

На рисунке 5 показана также зависимость перемещения  $v_3$  от нагрузки  $F_3$  для двух видов нагружения системы при  $b = 2$  м. Точки (1) и (2) показывают, где для этих видов нагружения появились пластические шарниры. Так, для системы без пригруза точкам (1) и (2) соответствуют силы  $F_3 = 206$  кН и 290 кН. Для системы с пригрузом первый пластический шарнир (1) появился при  $F_3 = 234$  кН, а второй пластический шарнир (2) для  $F_3 = 360$  кН. Зависимости  $F_3-v_3$  и за точками (2) монотонно возрастают и приближаются к некоторому пределу.

Таким образом, пригруз (в виде собственного веса или „равновесной” предварительной нагрузки) данной системы обеспечивает увеличение несущей способности, которое может быть выражено как

$$(F^{**} - F^*) / F^0, \quad (23)$$

где  $F^0$  - предельная несущая способность при  $F_3 = F_5 = 0$ ,  $F^{**}$  и  $F^*$  - силы в узле 3 в системе с и без предварительной загрузки для заданного перемещения  $v_3$ . В этом примере  $F^0 = 290$  кН и  $v_3 = 20$  см,  $F^{**} - F^* = 65$  кН. Постоянная „равновесная” нагрузка (собственный вес) системы обеспечила увеличение ее несущей способности системы около 22%. В этом заключается одно из преимуществ таких самоупрочняющихся систем.

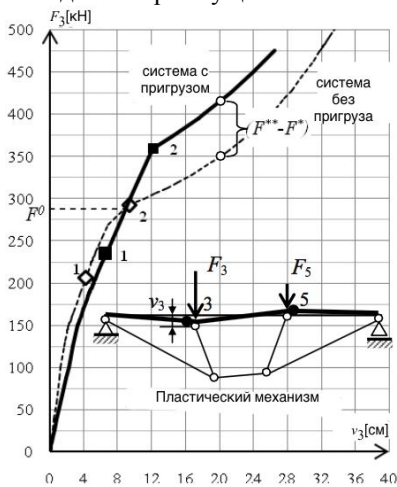


Рис. 5. Зависимость нагрузка-перемещение  $F_3-v_3$  для системы при  $b = 2$  м

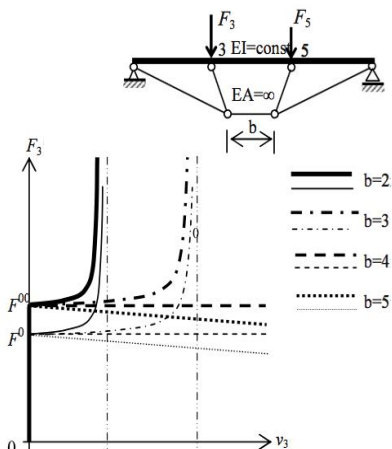


Рис. 6. Зависимость нагрузка-перемещение  $F_3-v_3$  для системы с пригрузом ( $F_3 = F_5 > 0$ ) - утолщенные линии и без пригруза ( $F_3 = F_5 = 0$ ) - тонкие линии

Вывявленные особенности были подтверждены также аналитическими расчетами [1] с использованием системы Wolfram Mathematica. При этом для элементов шпренгеля стержневой системы была принята идеальная жесткость,  $EA \rightarrow \infty$ . Результаты расчетов показаны на рисунке 6, откуда следует, что несущая способность  $F^0$  конструкции без пригруза узлов 3 и 5 для всех систем меньше несущей способности  $F^{00}$  конструкции с пригрузом. Кроме того, как показано на Рис. 6, для случая  $b = 5$  м в предельном состоянии на кривой  $F_3.v_3$  появляется ниспадающая ветвь. А для идеально жестких самоупрочняющихся систем существует еще предельное перемещение  $v_3$ , при котором сила  $F_3$  неограниченно возрастает.

### Анализ системы виадук

Другой пример объекта подобного типа может быть виадук WD-22 (рис. 7) на развязке движения „Puzycse” на скоростной дороге S3 в Польше [27]. Несущая конструкция этого виадука состоит из железобетонной балки, усиленной стальной аркой с наклонными подвесками [28].

Численные расчеты несущей системы виадука были выполнены на основе метода конечных элементов (МКЭ), используя программу ABAQUS/Standard, в геометрически и физически нелинейной постановке. На рисунке 8 показана упрощенная схема и нагрузка на виадук WD-22. Пролет арки составляет  $L = 54$  м, высота  $H = 11$  м. Конструкция шарнирно оперта на концах и загружена силами  $F_1 = 600$  кН и  $F_2 = 100$  кН в узлах 1, 2.

Рисунок 9 представляет зависимость между переменной силой  $F_1$  и вертикальным перемещением  $v_1$  1-го узла при постоянной силе  $F_2$  на конструкции. В системах этого типа влияние собственного веса или „равновесной” предварительной нагрузки обуславливает увеличение несущей способности. Для рассмотренного примера увеличение несущей способности было равно 15%.



Рис. 7. Вид виадука WD-22 [28]

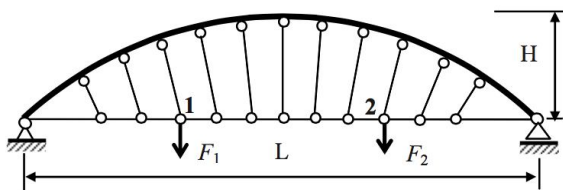


Рис. 8. Упрощенная схема и нагрузка на виадук

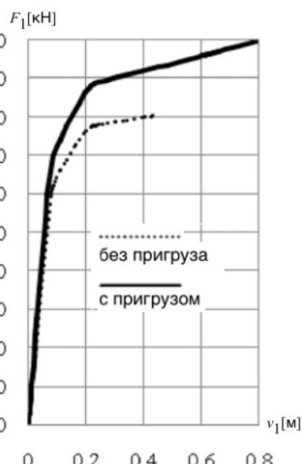
Полученные численные и аналитические результаты показывают, что учет геометрической нелинейности и постоянной нагрузки или пригруза важен для проектирования систем подобного типа.

### Выводы

В данной работе предложен новый алгоритмический критерий существования и постановка двухуровневых задач оптимизации самоупрочняющихся конструктивных систем, обладающих повышенной прочностью, жесткостью и безотказностью. Приведена матричная форма записи формул для равновесной нагрузки на изменяемые системы. Представлены эвристические способы создания самоупрочняющихся систем.

Выявлены особенности использования различных программных комплексов для использования в расчетах самоупрочняющихся систем.

Численные и аналитические расчеты показали, что учет постоянной „равновесной” нагрузки (собственного веса или пригруза) обеспечивает увеличение несущей способности самоупрочняющихся систем порядка 20%. Это оказывается еще одним из преимуществ таких конструктивных систем.

Рис. 9. Зависимость нагрузка-перемещение  $F_1-v_1$  для виадука

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алявдин П.В. Анализ несущей способности и оптимальное проектирование упругопластических конструкций // Белорусск. политехн. ин-т. – Минск: 1990. – Деп. в ВНИИНТПИ 14.10. 1990, № 10856. - 436 с.
2. Алявдин П.В. Предельный анализ конструкций при повторных нагружениях. - Минск: «Технопринт», 2005. - 284 с.

3. *Алявдин П.В.* А.с. 753993 СССР, МКИ Е 02 З 27/02. Плита ленточного фундамента / П.В.Алявдин (СССР). - № 2718013/29-33; Заяв. 26.01.79; Опубл. 07.08.80, Бюл. № 29. - 4 с.
4. *Алявдин П.В.* А.с. 1015050 СССР, МКИ Е 02 З 27/42. Фундамент под колонну / П.В.Алявдин, А.Е.Кончиц (СССР). - № 3298221/29-33; Заявл. 01.06.81; Опубл. 30.04.83, Бюл. № 16. - 3 с.
5. *Демьянов В.Ф., Факкиной Ф.* Задачи двухуровневой оптимизации и штрафные функции. - Известия вузов. Математика. - 2003. - № 12 (499). - С. 49–61.
6. *Илленко К.Н.* О комбинированных и кинематически изменяемых стержневых системах с подвижными опорами. - Строительная механика и расчет сооружений. - 1972. - № 5. - С.26-30.
7. *Мальшев А.В., Стрекаловский А.С.* О взаимосвязи некоторых задач двухуровневой и нелинейной оптимизации. - Известия вузов. Математика. - 2011. - № 4. - С. 99–103.
8. *Москале Н.С.* Конструкции висячих покрытий. - М.: Стройиздат, 1980. - 331 с.
9. *Осташевский А.Я.* Синтез самонапряженных систем с дискретным сжатием // Расчет и исследование конструкций с помощью ЭЦВМ: Сб. трудов ЛенЗНИИЭП. - Л. - Стройиздат. - 1971. - С. 11-20.
10. *Перельмутер А.В.* Управление поведением несущих конструкций. - К.: УФИМБ (Украинско-финский институт менеджмента и бизнеса), 1998. - 146 с.
11. *Райнус Г.Э.* Построение предварительно напряженных шарнирно-стержневых систем заданной структуры // Расчет и исследование конструкций с помощью ЭЦВМ: Сб. трудов ЛенЗНИИЭП. - Л. - Стройиздат. - 1971. - С. 3-10.
12. *Aliawdin P., Silicka E.* Limit analysis and failure of load-carrying systems. Selected papers of the 9th Int. Conf. on Modern Building Materials, Structures and Techniques, 16–18 May, 2007, Vilnius, Lithuania. III. – Vilnius. - P. 881-886.
13. *Aliawdin P., Urbańska K.* Limit analysis of geometrically hardening rod systems using bilevel programming. - Procedia Engineering. - 2013. - Vol. 57. - P. 89-98.
14. *Alawdin P., Urbańska K.* Limit analysis of geometrically hardening composite steel-concrete systems - Civil and Environmental Engineering Reports. - 2015, No. 16 (1). P. 5-23.
15. *Alyavdin P.* Optimization problem for a new class of effective carrying structures. - Proc. of the Second World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-2). 26-30 May, 1997, Zakopane, Poland. - Vol. 2. - P. 905-910.
16. *Atkociūnas J.* Optimal shakedown design of elastic-plastic structures. Vilnius: Technika, 2011.- 300p.
17. *Bochenek B., Kruźelecki J.* Optimization of stability of structures. Modern problems. Krakow: Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, 2007. - 573 p. (in Polish).
18. *Burkhardt R.W.Jr.* A practical guide to tensegrity design, 2nd ed., Version 2.30. - 2008. - 212 p. [http://www.angelfire.com/ma4/bob\\_wb/tenseg.pdf](http://www.angelfire.com/ma4/bob_wb/tenseg.pdf).
19. *Čyras A., Borkowski A., Karkauskas R.* Theory and methods of optimization of rigid-plastic systems. Vilnius: Technika. - 2004. - 354 p.
20. *Dempe S.* Foundations of bilevel programming, Kluwer Academic Publishers, 2002. - P. 312.
21. *Fuller R.B.* Tensile-integrity structures. Patent USA No 3.063.521.
22. *Król M., Kruźelecki J., Trybula D.* Optimal stabilization of the post-buckling path for cylindrical shells under external pressure. - Engineering Optimizations. - 2009. - Vol. 41. - No. 1. - P. 59-72.
23. *Kruźelecki J., Trybula D.* Optimal axial tension and internal pressure stabilizing post-buckling path for cylindrical shells under torsion. - Journal of theoretical and applied mechanics. - Warsaw. 2010. - Vol. 48. - No. 3. P. 645-658.
24. *Kuznetsov E.N.* Underconstrained structural systems: Mechanical Engineering Series. - No. XIII. - Springer Verlag, 1991. - P. 312.
25. *Maier G.* A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order geometric effects. - Foundations in plasticity, Vol. 1, A. Sawczuk (Ed.). Noordhoff. - P. 417-433.
26. *Olivier V., Bin Z.* Membrane action of composite structures in case of fire. ECCS, 2013. - 247 p.

27. *Solowczuk A. (Ed.)*. Express road S3 on the itinerary Szczecin-Gorzów Wlkp. Szczecin: Publishing house Comgraph Anna Jadczyk, 2010. - P. 254. (in Polish).
28. *Solowczuk A., Matecki K.* Selected road structures over the S3 express road, Engineering and Construction. - No. 5. - 2011. P. 284-287. (in Polish).

*Alawdin P.W.*

### **SELF-HARDENING LOAD-CARRYING SYSTEMS**

The paper considers definition, analysis and creating load-carrying systems that have uprated strength, rigidity and safety, and therefore are called self-hardening load-carrying systems. The optimization mathematic models of structures as discrete mechanical systems withstanding dead load, monotonic or low cyclic static and kinematic actions are proposed. A bilevel optimization problem statement is used. The limit parameters of variable load actions are found on the first level of optimization. On the second level the power of the equilibrium constant load with preloading is maximized and/or system cost is minimized. A matrix form of the formulas for the equilibrium load on geometrically variable system is suggested. The examples of using the proposed methods are presented and creating of self-hardening system are taken into account.

**Keywords:** self-hardening load-carrying systems, limit analysis, bilevel optimization, equilibrium load

УДК 539.3

*Алявдин П.В.* Самоупрочняющиеся конструктивные системы // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 2015. – Вып. 94. – С. 186 – 201.

*Рассматривается определение, анализ и способы создания самоупрочняющихся несущих конструктивных систем.*

Табл. 0. Илл. 9. Библиогр. 28 назв.