

УДК 539.3

Ворона Ю.В., канд. техн. наук,
 Герашенко О.В., канд. техн. наук

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ МАСИВІВ З ТРІЩИНАМИ

Пропонується методика дослідження коливань пружних масивних елементів конструкцій, послаблених тріщинами. Отримане граничне інтегральне представлення для напружень, до складу якого входять сингулярний і гіперсингулярний інтегралі. За допомогою інтегрування частинами проведена регуляризація другого з інтегралів, після чого вказане представлення може використовуватись в якості граничного сингулярного інтегрального рівняння. Розв'язана тестова задача про статичне навантаження масиву з круговою тріщиною.

Розглядається задача про усталені гармонічні коливання пружного масиву, послабленого плоскою тріщиною. Комплексні амплітуди переміщень задовольняють систему еліптичних рівнянь

$$(C_1^2 - C_2^2)u_{j,jk} + C_2^2 u_{k,jj} + \omega^2 u_k = -\Phi_k, \quad j,k=1,2,3, \quad (1)$$

де $u_{j,jk}(\vec{x}, t) = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_k}$; $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ - точка всередині масиву; C_1 та

C_2 - швидкості розповсюдження хвиль розширення та викривлення

відповідно; $C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$; $C_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$; ρ - густина

пружного середовища. Тут і в подальшому, якщо не стверджується протилежне, вважається, що за індексом, який повторюється у виразі, здійснюється сумування.

Для описання деформованого стану тіла використовується тензор деформацій $\varepsilon_{jk}(\vec{x})$, пов'язаний із переміщеннями за допомогою співвідношень

$$\varepsilon_{jk}(\vec{x}) = 0.5 \left[\frac{\partial u_j(\vec{x})}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k(\vec{x})}{\partial x_j} \right], \quad j,k=1,2,3. \quad (2)$$

Напруження в тілі виражаються через деформації формулою

$$\sigma_{jk}(\vec{x}) = \lambda \delta_{jk} \varepsilon_{mm}(\vec{x}) + 2\mu \varepsilon_{jk}(\vec{x}), \quad j,k,m=1,2,3. \quad (3)$$

Модуль пружності E та коефіцієнт Пуасона ν пов'язані з коефіцієнтами Ляме наступним чином:

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\lambda + \mu}; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (4)$$

В точках поверхні Γ тіла компоненти вектора напружень $\tau_k(x)$ пов'язані з компонентами тензора напружень за допомогою співвідношень

$$\tau_j(\bar{x}) = \sigma_{jk}(\bar{x})n_k, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad (5)$$

де n_k - компонента вектора зовнішньої нормалі в точці $x \in \Gamma$.

Отже, задача про усталені коливання масивів полягає в відшукуванні вектора $u_j(\bar{x})$, що задовольняє в області Ω систему (1), а також граничні умови:

$$u_j(\bar{y}) = g_j(\bar{y}), \quad \bar{y} \in \Gamma_u; \quad \tau_j(\bar{y}) = h_j(\bar{y}), \quad \bar{y} \in \Gamma_\tau \quad (6)$$

де Γ_u - частина поверхні, на якій задан вектор переміщень; Γ_τ - частина поверхні, на якій задан вектор напружень.

Будемо розв'язувати крайову задачу (1-6) за допомогою методу потенціалу. В довільній точці \bar{x} всередині розрахункової області переміщення мають бути підпорядковані тотожності Соміліани

$$u_k(\bar{x}) = \int_{\Gamma} \tau_j(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_j(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad (7)$$

де функція $U_{ij}(\bar{x}, \bar{y})$ є фундаментальним розв'язком В.Д.Купрадзе рівняння (1). Згідно [1] цей розв'язок має наступний вигляд:

$$U_{ij}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{4\pi\mu} (\delta_{ij} U_0 - r_{,i} r_{,j} U_2), \quad (8)$$

$$\text{де } U_0(r) = \exp(z_2) r^{-1} \left[1 - z_2^{-1} + z_2^{-2} \right] + \beta \exp(z_1) r^{-1} \left[z_1^{-1} - z_1^{-2} \right];$$

$$U_2(r) = \exp(z_2) r^{-1} \left[1 - 3z_2^{-1} + 3z_2^{-2} \right] + \beta \exp(z_1) r^{-1} \left[1 - 3z_1^{-1} + 3z_1^{-2} \right];$$

$$z_k = \frac{i\omega r}{C_k}, \quad k = 1, 2; \quad \beta = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}; \quad r = \sqrt{(x_k - y_k)(x_k - y_k)}; \quad r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j - y_j}{r}.$$

Зазначимо, що при нульовому значенні частоти коливань компонента U_0 перетворюється на $\frac{3-4\nu}{4(1-\nu)r}$, а U_2 - на $\frac{-1}{4(1-\nu)r}$, в результаті чого фундаментальний розв'язок В.Д.Купрадзе перетворюється на розв'язок Кельвіна статичної задачі:

$$U_{ij}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}]. \quad (9)$$

В свою чергу, функція $T_{ij}(\bar{x}, \bar{y})$ є узагальненою похідною фундаментального розв'язку В.Д.Купрадзе:

$$\begin{aligned} T_{jk}(\bar{x}, \bar{y}) &= n_p C_{pkml} U_{jm,l}(\bar{x}, \bar{y}) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[n_k r_{,j} T_1 + (\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + n_j r_{,k}) T_2 + r_{,k} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} T_3 \right], \quad (10) \end{aligned}$$

де n_p - компонента вектора зовнішньої нормалі в точці $y \in \Gamma$, тензор квазіпружних констант $C_{pkml} = \lambda \delta_{pk} \delta_{ml} + \mu (\delta_{pl} \delta_{mk} + \delta_{pm} \delta_{kl})$;

$$\begin{aligned} T_1 &= -2 \exp(z_2) r^{-2} [1 - 3z_2^{-1} + 3z_2^{-2}] + \exp(z_1) r^{-2} [z_1 - 1 - 2\beta(1 - 3z_1^{-1} + 3z_1^{-2})]; \\ T_2 &= \exp(z_2) r^{-2} [z_2 - 3 + 6z_2^{-1} - 6z_2^{-2}] - 2\beta \exp(z_1) r^{-2} [1 - 3z_1^{-1} + 3z_1^{-2}]; \quad (11) \\ T_3 &= -2 \exp(z_2) r^{-2} [z_2 - 6 + 15z_2^{-1} - 15z_2^{-2}] + \\ &\quad + 2\beta \exp(z_1) r^{-2} [z_1 - 6 + 15z_1^{-1} - 15z_1^{-2}]. \end{aligned}$$

При нульовому значенні частоти коливань компонента T_1 перетворюється на $\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)r^2}$, T_2 - на $-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)r^2}$, а T_3 - на $\frac{-3}{2(1-\nu)r^2}$, в результаті чого узагальнена похідна розв'язку В.Д.Купрадзе набуває вигляду:

$$T_{jk}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{kj} + 3r_{,k}r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(n_k r_{,j} - n_j r_{,k}) \right\}. \quad (12)$$

Напруження усередині розрахункової області також підпорядковані інтегральній тотожності:

$$\sigma_{jk}(\vec{x}) = \int_{\Gamma} \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}, \vec{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}, \vec{y}) d\Gamma_y, \quad (13)$$

де

$$D_{jkl}(\vec{x}, \vec{y}) = -C_{jkm} U_{ml,t}(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{4\pi} [\delta_{jk} r_{,l} T_1 + (\delta_{jl} r_{,k} + \delta_{kl} r_{,j}) T_2 + r_{,k} r_{,j} r_{,l} T_3], \quad (14)$$

$$S_{jkl}(\vec{x}, \vec{y}) = -C_{jkm} T_{ml,t}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ (2S_1 (\delta_{jk} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,k} r_{,j} n_l) + S_2 \left[\frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{jl} r_{,k} + \delta_{kl} r_{,j}) + r_{,l} (n_j r_{,k} + n_k r_{,j}) \right] - \right. \\ \left. - \frac{2T_2}{r} (n_j \delta_{lk} + n_k \delta_{jl}) + 2S_3 r_{,j} r_{,k} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial n} + S_4 \delta_{jk} n_l \right\}, \quad (15)$$

$$S_1 = -\exp(z_2) r^{-3} [-2z_2 + 12 - 30z_2^{-1} + 30z_2^{-2}] - \exp(z_1) r^{-3} [z_1^2 - 3z_1 + 3] + \beta \exp(z_1) r^{-3} [2z_1^2 - 8z_1 + 18 - 30z_1^{-1} + 30z_1^{-2}],$$

$$S_2 = \exp(z_2) r^{-3} [z_2^2 - 7z_2 + 27 - 60z_2^{-1} + 60z_2^{-2}] - \beta \exp(z_1) r^{-3} [-4z_1 + 24 - 60z_1^{-1} + 60z_1^{-2}],$$

$$S_3 = \exp(z_2) r^{-3} [2z_2^2 - 20z_2 + 90 - 210z_2^{-1} + 210z_2^{-2}] - \beta \exp(z_1) r^{-3} [2z_1^2 - 20z_1 + 90 - 210z_1^{-1} + 210z_1^{-2}],$$

$$S_4 = \exp(z_2) r^{-3} [4 - 12z_2^{-1} + 12z_2^{-2}] + \exp(z_1) r^{-3} [4z_1^2 + z_2^2 - 4z_1 + 4] - \beta \exp(z_1) r^{-3} [4z_1^2 - 8z_1 + 12 - 12z_1^{-1} + 12z_1^{-2}].$$

При нульовому значенні частоти коливань ядра D_{jkl} , S_{jkl} перетворюються на відповідні ядра статичної задачі:

$$D_{jkl}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \{ (1-2\nu)(\delta_{jl} r_{,k} + \delta_{kl} r_{,j} - \delta_{jk} r_{,l}) + 3r_{,k} r_{,j} r_{,l} \}. \quad (16)$$

$$S_{jkl}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\mu(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)r^3} \left\{ 3 \frac{\partial}{\partial n} r \left[\delta_{jk} r_{,l} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\delta_{jl} r_{,k} + \delta_{kl} r_{,j}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{5\nu}{1-2\nu} r_{,j} r_{,k} r_{,l} \right] + 3 \left[\frac{\nu}{1-2\nu} r_{,l} (n_j r_{,k} + n_k r_{,j}) + r_{,j} r_{,k} n_l \right] + \right. \\ \left. + n_j \delta_{lk} + n_k \delta_{jl} - n_l \delta_{jk} \frac{1-4\nu}{1-2\nu} \right\}. \quad (17)$$

Подання (7), (13) дозволяють знайти параметри напружено-деформованого стану (НДС), якщо відомі значення переміщень та навантажень на границі масиву. Нажаль, з умов задачі відома лише їх частина. Для знаходження невідомих значень зазвичай в рівності (7) здійснюють перехід до граничної точки $x_0 \in \Gamma$. Якщо в околі точки \bar{x}_0 границя є гладкою, а переміщення $u_j(\bar{y})$ можна представити у вигляді

$$u_j(\bar{y}) = u_j(\bar{x}_0) + O(r^\alpha), \quad (18)$$

де α деяке додатне число, менше за одиницю, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \int_{\Gamma} u_k(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \int_{\Gamma} u_k(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - 0.5 u_j(\bar{x}_0). \quad (19)$$

Через \int позначений інтеграл, що розуміється за Коші. Крім того, якщо в околі точки \bar{x}_0 граничні напруження $\tau_j(\bar{y})$ мають обмежені значення, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \int_{\Gamma} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \int_{\Gamma} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y. \quad (20)$$

За допомогою (19) і (20) отримуємо з (7) граничний аналог тотожності Соміліані:

$$0.5 u_k(\bar{x}_0) = \int_{\Gamma} \tau_j(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_j(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad (21)$$

який можна розглядати як сингулярне інтегральне рівняння відносно незаданих граничними умовами переміщень та напружень. Після розв'язку системи граничних інтегральних рівнянь (ГІР) за допомогою

формул Соміліани (7), (13) можуть бути знайдені компоненти НДС в заданих точках всередині та на границі об'єкта розрахунку.

Слід зазначити, що система сингулярних ГІР (21) в задачах про деформування тіл, послаблених тріщинами, має обмежене використання, оскільки в даному випадку система може стати виродженою. Красномовний приклад такої виродженості наведений в роботі [2], де показано, як задача про симетрично навантажену тріщину в нескінченному просторі зводиться до граничного інтегрального рівняння

$$0.5u_k(\bar{x}_0) = - \int_{\Gamma} \Delta u_j(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y,$$

яке внаслідок відсутності в його складі доданка, що містить навантаження, не може бути ідентифіковане з якимось певним напруженим станом. З іншого боку, інтеграл з ядром S_{jkl} в представленні для напружень (13) є гіперсингулярним, оскільки містить в знаменнику величину r^3 , тоді як елемент гладкої поверхні поблизу т. \bar{x}_0 може бути поданий в місцевій циліндричній системі координат у вигляді $d\Gamma = r dr d\theta$. Такі інтеграли в розумінні Коші не існують.

В математичних побудовах і обчисленнях використовують скінченну частину таких інтегралів за Адамаром [3]. В задачах механіки як прикладної науки має бути встановлений фізичний зміст перетворень, які приводять до інтегральних рівнянь, що містять інтеграли в розумінні Адамара, а також створений підхід до їх обчислення. Існує декілька варіантів виділення скінченної частини гіперсингулярних інтегралів [4-6]. Найбільш загальний підхід реалізований в роботі [6] для розв'язання гармонічної задачі та задачі статички. В даній статті запропонований в [6] алгоритм застосовується для дослідження коливань масивних тіл з тріщинами. Для отримання обґрунтованого результату згідно [6] необхідно виконати два кроки. Перший крок полягає у створенні допоміжної розрахункової підобласті Ω_0 , яку отримуємо із заданої за допомогою виключення з останньої малого околу полюсу \bar{x}_0 (рис.1).

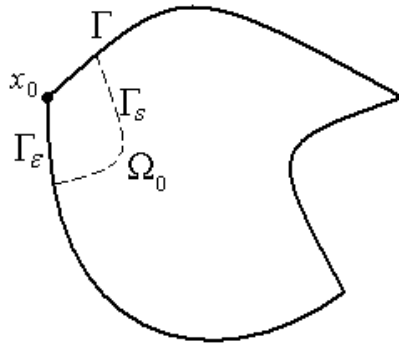


Рис.1. Утворення допоміжної області Ω_0

По відношенню до області Ω_0

точка \bar{x}_0 є зовнішньою, тому формули Соміліани для напружень набуває вигляду

$$\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = 0. \quad (22)$$

Зауважимо, що якою б малою не була підобласть Ω/Ω_0 , полюс \bar{x}_0 лежить поза межами Ω_0 і тому тотожність (22) лишається справедливою. Тому другий крок полягає у граничному переході в рівності (22) при одночасному зменшенні розмірів Γ_ε і Γ_s . Для того, щоб результат граничного переходу був визначеним, необхідно, щоб визначеною була форма підобласті Ω/Ω_0 . Найбільш зручно для подальших перетворень прийняти, що ця підобласть є частиною кулі малого радіусу ε . Тоді можемо записати

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = 0. \quad (23)$$

Для існування границі необхідно зробити припущення, щодо поведінки шуканих функцій в околі точки \bar{x}_0 . Частина поверхні Γ_ε вважається настільки гладкою, що при $\varepsilon \rightarrow 0$ частину поверхні Γ_s можна вважати границею півсфери.

Припустимо, що переміщення $u_j(\bar{y})$ поблизу точки \bar{x}_0 можна представити у вигляді

$$u_j(\bar{y}) = u_j(\bar{x}_0) + \frac{\partial u_j(\bar{x}_0)}{\partial x_m} (y_m - x_{0m}) + O(r^{1+\alpha}). \quad (24)$$

В свою чергу

$$\frac{\partial u_j(\bar{y})}{\partial y_m} = \frac{\partial u_j(\bar{x}_0)}{\partial x_m} + O(r^\alpha).$$

Оскільки напруження є лінійними функціями деформацій, то для них справедливо

$$\sigma_{ij}(\bar{y}) = \sigma_{ij}(\bar{x}_0) + O(r^\alpha). \quad (25)$$

Розглянемо границю першого з інтегралів, що входять до (23):

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \right. \\
 &+ \left. \int_{\Gamma_s} [\sigma_{lm}(\bar{x}_0) n_m(\bar{y}) + O(r^\alpha)] D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \\
 &= \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \tau_k(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \sigma_{lm}(\bar{x}_0) d_{jklm}(\bar{x}_0).
 \end{aligned} \quad (26)$$

Елемент сферичної поверхні Γ_s може бути поданий в місцевій системі координат у вигляді $d\Gamma = \varepsilon^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta$. Крім того на поверхні сферичної порожнини з центром в точці \bar{x}_0 справедливо

$$r_{,j}(0, \bar{y}) = -n_j(\bar{y}); \quad \frac{\partial r}{\partial n} = -1.$$

З урахуванням наведених залежностей пряме інтегрування по границі півкулі дає як для задач статики, так і для задач про усталені коливання масивів один і той самий результат:

$$\begin{aligned}
 d_{jklm}(\bar{x}_0) &= \int_{\Gamma_s} n_m(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \\
 &= \frac{1}{30(1-\nu)} [(1-5\nu)\delta_{jk}\delta_{lm} - (4-5\nu)(\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{kl}\delta_{jm})];
 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\sigma_{lm}(x_0) d_{jklm}(\bar{x}_0) = \frac{1}{30(1-\nu)} [(1-5\nu)\delta_{jk}\sigma_{mm} - 2(4-5\nu)\sigma_{jk}]. \quad (28)$$

Звернемось тепер до визначення границі. другого з інтегралів, що входять до складу (23). Враховуючи (24), запишемо

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \right. \\
 &+ \left. u_l(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_s} S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \frac{\partial u_l(\bar{x}_0)}{\partial x_m} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}.
 \end{aligned} \quad (29)$$

Розглянемо третій доданок з правої частини рівності (29). Знову і для задачі про усталені коливання, і для задачі статики, коли $\omega = 0$, безпосереднє інтегрування по Γ_s дає один і той самий результат:

$$\int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = s_{jklm}(\bar{x}_0), \quad (30)$$

де

$$s_{jklm}(\bar{x}_0) = \frac{\mu}{30(1-\nu)} \left[2(5\nu + 1)\delta_{jk}\delta_{lm} + (7 - 5\nu)(\delta_{kl}\delta_{jm} + \delta_{jl}\delta_{km}) \right]. \quad (31)$$

Беручи до уваги той факт, що

$$\sigma_{lk}(\bar{x}_0) = \mu \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{lk} \frac{\partial u_m(\bar{x}_0)}{\partial x_m} + \left(\frac{\partial u_l(\bar{x}_0)}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k(\bar{x}_0)}{\partial x_l} \right) \right],$$

і крім того

$$\sigma_{mm}(\bar{x}_0) = 2\mu \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial u_m(\bar{x}_0)}{\partial x_m},$$

можна записати

$$\frac{\partial u_l(\bar{x}_0)}{\partial x_m} s_{jklm}(\bar{x}_0) = \frac{\mu}{30(1-\nu)} \left[(1-5\nu)\delta_{jk}\sigma_{mm} + (7-5\nu)\sigma_{kj} \right]. \quad (32)$$

За допомогою (28) і (32) неважко отримати наступну важливу рівність:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \tau_l(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_s} D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \frac{\partial u_j(\bar{x}_0)}{\partial x_m} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \\ = \sigma_{lm}(\bar{x}_0) d_{jklm}(\bar{x}_0) - \frac{\partial u_l(\bar{x}_0)}{\partial x_m} s_{jklm}(\bar{x}_0) = -0.5\sigma_{jk}(\bar{x}_0). \end{aligned} \quad (33)$$

Для визначення другого інтегралу в правій частині виразу (29) скористаємось тим, що $C_{skrq}U_{mr,qs} + \rho\omega^2 U_{mk} = 0$, і крім того

$(n_s \Phi_{,l} - n_l \Phi_{,s}) = e_{tsl} \frac{\partial \Phi}{\partial s_t}$, де e_{ijk} – символ Леві-Чивіта, \bar{s}_t – деякий

одичинний вектор, перпендикулярний до нормалі \bar{n} в точці у поверхні Γ

[7]. По суті $\frac{\partial \Phi}{\partial s_t}$ – це похідна за напрямом дотичної до поверхні в точці у.

З урахуванням вказаних співвідношень, а також рівностей (10), (15) подамо ядро S_{jkl} наступним чином:

$$\begin{aligned}
 S_{ijk}(\bar{x}, \bar{y}) &= -C_{ijml} T_{mk,l}(\bar{x}, \bar{y}) = -C_{ijml} n_s C_{skrq} U_{mr,ql} = \\
 &= -C_{ijml} \left[C_{skrq} (n_s U_{mr,ql} - n_l U_{mr,qs}) - \rho \omega^2 n_l U_{mk} \right] = \\
 &= -C_{ijml} e_{tsl} \frac{\partial}{\partial s_t} (D_{skm}) + \rho \omega^2 F_{ijk},
 \end{aligned} \quad (34)$$

де

$$F_{ijk}(\bar{x}, \bar{y}) = C_{ijml} n_l U_{mk}(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda \delta_{ij} n_l U_{lk} + \mu (n_j U_{ik} + n_i U_{jk}).$$

За теоремою Стокса [7]

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial s_t} d\Gamma = \int_{\Gamma} \Phi dx_t,$$

завдяки чому маємо

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_s} S_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y &= \int_{\Gamma_s} \left\{ C_{ijml} e_{tsl} \frac{\partial}{\partial s_t} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] + \rho \omega^2 F_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) \right\} d\Gamma_y = \\
 &= \int_{L_s} C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_t + \rho \omega^2 \int_{\Gamma_s} F_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y,
 \end{aligned} \quad (35)$$

де L_s – контур півсфери Γ_s , тобто коло радіуса ε з центром в полюсі x_0 .

Оскільки функція $F_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y})$, має поблизу \bar{x}_0 таку саму особливість, як і $U_{ij}(\bar{x}_0, \bar{y})$, то інтеграл за Γ_s в правій частині (35) при зменшенні ε зникає. Для обчислення інтеграл за колом L помітимо, що

$$\int_{L_s} r_{,m} dx_t = \int_{L_s} (y_m - x_{0m}) r dx_t = \varepsilon \int_0^{-2\pi} (y_m - x_{0m}) d\theta = \varepsilon \pi e_{tmq} n_q;$$

$$\int_{L_s} r_{,s} r_{,k} r_{,m} dx_t = \frac{\varepsilon \pi}{4} \left[(\delta_{sk} - n_s n_k) e_{tmq} n_q + (\delta_{sm} - n_s n_m) e_{tkq} n_q + (\delta_{mk} - n_m n_k) e_{tsq} n_q \right].$$

Тоді

$$\delta_{sk} e_{tsl} \int_{L_s} r_{,m} dx_t = \varepsilon \pi (\delta_{km} n_l - \delta_{lm} n_k); \quad \delta_{sm} e_{tsl} \int_{L_s} r_{,k} dx_t = \varepsilon \pi (\delta_{km} n_l - \delta_{lk} n_m);$$

$$\delta_{mk} e_{tsl} \int_L r_{,s} dx_t = \varepsilon \pi \delta_{km} n_l; \quad e_{tsl} \int_L r_{,s} r_{,k} r_{,m} dx_t = \varepsilon \pi (\delta_{km} - n_k n_m).$$

В результаті маємо

$$\int_{L_s} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_t = -\frac{\epsilon}{4} \{ \delta_{km} n_l [3T_2(\epsilon) + T_1(\epsilon) + T_3(\epsilon)] - \delta_{lm} n_k T_1(\epsilon) - \delta_{lk} n_m T_2(\epsilon) - n_l n_k n_m T_3(\epsilon) \},$$

після чого отримуємо вираз

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_s} S_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y &= \int_{L_s} C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_t = \\ &= -\frac{\mu\epsilon}{4} \{ 2n_k \delta_{ij} [(\gamma - 2)T_2(\epsilon) - (\gamma - 1)T_1(\epsilon)] + \\ &+ (n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{kj}) [2T_2(\epsilon) + T(\epsilon)_1 + T_3(\epsilon)] - 2n_i n_j n_k T_3(\epsilon) \} + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (36)$$

де $\gamma = \beta^{-1}$.

Оскільки згідно з (11) величини $T_1(\epsilon)$, $T_2(\epsilon)$ і $T_3(\epsilon)$ містять множник ϵ^{-2} , то границя $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y$ не існує. З іншого боку, вираз (23) є

цілком визначеним, тому природно припустити, що перший інтеграл в (29) після інтегрування дасть серед іншого величину, обернену по відношенню до (36).

Дійсно, згідно із (34) можемо записати

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma-\Gamma_e} u_k(y) S_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) \Gamma_y &= \\ &= \int_{\Gamma-\Gamma_e} u_k(y) \left\{ C_{ijml} e_{tsl} \frac{\partial}{\partial s_t} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] + \rho \omega^2 F_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) \right\} d\Gamma_y = \\ &= \int_{L_s} u_k(y) C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_t - \\ &- \int_{\Gamma-\Gamma_e} \frac{\partial u_k(y)}{\partial s_t} C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] d\Gamma_y + \rho \omega^2 \int_{\Gamma-\Gamma_e} u_k(y) F_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y. \end{aligned} \quad (37)$$

Оскільки на контурі L_s переміщення можуть бути представлені у вигляді (24), то з точністю до малих більш високого порядку

$$\begin{aligned} \int_{L_s} u_k(y) C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_t &= u_k(x_0) \int_{L_s} C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_t + \\ &+ \frac{\partial u_k(x_0)}{\partial s_p} \int_{L_s} (y_p - x_{0p}) C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_t. \end{aligned} \quad (38)$$

В силу того, що

$$\int_{L_s} r_{,l} r_{,k} dx_t = 0; \quad \int_{L_s} r_{,l} r_{,k} r_{,i} r_{,j} dx_t = 0,$$

другий інтеграл в правій частині (38) дорівнює нулю. Перший інтеграл з точністю до множника $u_k(x_0)$ збігається з (36). Якщо звернути увагу на те, що контур L_s тепер обходиться в напрямку, протилежному по відношенню до напрямку обходу в (36), то стає зрозумілим, що ці величини мають різні знаки і в сумі дають нуль. Отже

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + u_l(x_0) \int_{\Gamma_s} S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \\ = \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u_k(\bar{y})}{\partial s_t} C_{ijml} e_{isl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] d\Gamma_y, \end{aligned} \quad (39)$$

де інтеграл в правій частині існує за Коші.

Це доводить існування границі в лівій частині (39), яку тепер можна трактувати як скінченну за Адамаром частину інтегралу $\int_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y$.

В решті решт, беручи до уваги (33) можемо записати граничне інтегральне рівняння для напружень

$$0.5\sigma(\bar{x}_0) = \int_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad (40)$$

де перший інтеграл в правій частині слід розуміти за Коші, а другий – за Адамаром.

Окрім доведення справедливості співвідношення (40) сказане вище має ще й практичне значення, оскільки містить вказівку щодо обчислення скінченної частини інтегралу $\int_{\Delta\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y$ в межах фрагменту

поверхні $\Delta\Gamma$, на якому розташований полюс x_0 (іншими словами, в межах сингулярного граничного елементу). Згідно (35) такий інтеграл можна подати наступним чином:

$$\int_{\Delta\Gamma} u_k(\bar{y}) S_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \int_{L_\Delta} u_k(\bar{y}) C_{ijml} e_{isl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_t -$$

$$- \int_{\Delta\Gamma} \frac{\partial u_k(\bar{y})}{\partial s_l} C_{ijml} e_{isl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] d\Gamma_y + \rho\omega^2 \int_{\Delta\Gamma} u_k(\bar{y}) F_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad (41)$$

де L_{Δ} – контур фрагмента $\Delta\Gamma$.

Зазначимо, що перший з інтегралів в (40) є регулярним, третій має слабку сингулярність, яка зникає при параметризації області інтегрування, а другий – сильну сингулярність, яка однак, не є нездоланною перешкодою [8].

Розглянемо тепер для ілюстрації приклад розв'язання задачі про кругову тріщину в статично навантаженому нескінченному просторі. Верхній берег тріщини позначимо Γ^+ , а нижній Γ^- (рис. 2).

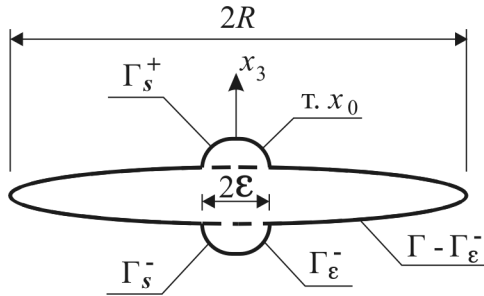


Рис.2. Геометрія кругової тріщини

Завдяки тому, що границя Γ_{ε} тепер є повною сферою, рівняння (40) набуває вигляду:

$$\sigma_{jk}(\bar{x}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}^+ - \Gamma_{\varepsilon}^-} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}^+ - \Gamma_{\varepsilon}^-} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + u_l(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_s^+ + \Gamma_s^-} S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}. \quad (42)$$

Якщо до обох берегів тріщини прикладене в протилежні боки однакове рівномірне розподілене нормальне навантаження q , то маємо так зване ГР в стрічках :

$$\sigma_{jk}(\bar{x}_0) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon^+} \Delta u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \Delta u_l(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_\varepsilon^+} S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}, \quad (43)$$

яке в силу симетрії в місцевій системі координат може бути записане у вигляді:

$$\sigma_{33}(\bar{x}_0) = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon^+} u_3(\bar{y}) S_{333}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + u_3(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_\varepsilon^+} S_{333}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}. \quad (44)$$

Оскільки розв'язується задача статика, то прирівнюючи значення частоти нулю, за допомогою (39) отримуємо

$$\sigma_{33}(\bar{x}_0) = 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial u_3(\bar{y})}{\partial s_t} C_{33ml} e_{tsl} [D_{s3m}(\bar{x}_0, \bar{y})] d\Gamma_y. \quad (45)$$

В місцевій системі координат індекс може приймати значення 1 чи 2, тому

$$\sigma_{33}(\bar{x}_0) = 4(\lambda + \mu) \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial u_3(\bar{y})}{\partial x_1} D_{133}(\bar{x}_0, \bar{y}) + \frac{\partial u_3(\bar{y})}{\partial x_2} D_{233}(\bar{x}_0, \bar{y}) \right] d\Gamma_y. \quad (46)$$

Застосовуючи циліндричні координати (рис. 3), в яких $x_1 = \rho \cos \theta$, $x_2 = \rho \sin \theta$, а також беручи до уваги осьову симетрію задачі, в силу чого

$$\frac{\partial u_3(y)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_3(\rho)}{\partial \rho} \cos \theta, \quad \frac{\partial u_3(y)}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3(\rho)}{\partial \rho} \sin \theta,$$

за допомогою (16) в довільній точці $x_0(b,0)$ отримуємо

$$-q = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \int_{\Gamma} \frac{\partial u_3(\rho)}{\partial \rho} \left[\frac{\rho - b \cos \theta}{r^3} \right] d\Gamma_y. \quad (47)$$

Точний розв'язок задачі має вигляд [9]

$$\frac{\partial u_3(\rho)}{\partial \rho} = -\frac{2(1-\nu)q}{\pi\mu} \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}.$$

Для чисельного розв'язання сингулярного ГІР (47) була застосована колокаційна процедура. Розрахункова область була поділена на чотири кільцеві граничні елементи. Нормовані значення похідної

$\frac{\mu}{2\pi q(1-\nu)} \frac{\partial u_3(\rho)}{\partial \rho}$ в точках колокації наведені в таблиці 1. Як показали розрахунки, якщо не враховувати характер поведінки шуканої функції

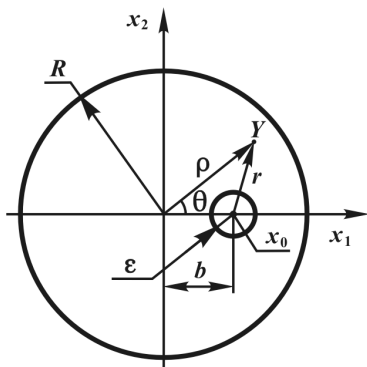


Рис. 3

поблизу краю тріщини, то навіть квадратична апроксимація невідомих дає незадовільні результати. В той же час використання на елементі, розташованому біля краю, функцій форми у вигляді

$$\begin{aligned} \phi_1 &= a_1 + \frac{b_1}{\sqrt{R-\rho}}; \\ \phi_2 &= a_2 + \frac{b_2}{\sqrt{R-\rho}}. \end{aligned} \quad (48)$$

дозволяє отримати досить задовільні результати при кусочно-лінійній апроксимації.

Таблиця 1

$\frac{b}{R}$	Точне значення	Квадратична апроксимація	Лінійна апроксимація
0.0625	-0.006	0.82	-0.005
0.1875	-0.019	0.121	-0.022
0.3125	-0.033	-0.264	-0.30
0.4375	-0.049	-0.264	-0.051
0.5625	-0.069	0.175	-0.066
0.6875	-0.096	0.146	-0.092
0.8125	-0.141	-0.377	-0.146
0.9375	-0.273	-0.428	-0.271

Насамкінець зазначимо, що після того, як в результаті розв'язання задачі стають відомими значення $\frac{\partial u_3(\rho)}{\partial \rho}$ в точках колокації, за допомогою (48) неважко отримати коефіцієнт інтенсивності напружень:

$$K_I = - \lim_{\rho \rightarrow R} \left[\frac{\mu\sqrt{2\pi}}{1-\nu} \frac{\partial u_3(\rho)}{\partial \rho} \sqrt{R-\rho} \right] =$$

$$= \frac{\mu\sqrt{2\pi}}{1-\nu} \left[\frac{\partial u_3^{(N-1)}(\rho)}{\partial \rho} b_1 - \frac{\partial u_3^{(N)}(\rho)}{\partial \rho} b_2 \right]. \quad (49)$$

Якщо точки колокації розташовані на відстані у чверть довжини елемента від його границь, то

$$b_2 = -b_1 = \frac{\sqrt{3\Delta}}{2(\sqrt{3}-1)}.$$

В розглядуваній задачі при $\Delta = 0.25R$ було отримано $K_I = 2.07q\sqrt{R\pi^{-1}}$, тоді як точне значення $K_I = 2q\sqrt{R\pi^{-1}}$. Збільшення кількості кільцевих граничних елементів до 8 дає $K_I = 2.02q\sqrt{R\pi^{-1}}$, що свідчить про збіжність результатів до точних значень.

1. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. – М.: Ф-М, 1963. – 280 с.
2. *Cruse T.A.* Recent advances in boundary element analysis methods // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 62 (1987), pp. 227-244
3. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М: Наука, 1978. – 352 с.
4. *Sladek V., Sladek J.* Regularization of hypersingular integrals in BEM formulations using various kinds of continuous elements // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 17 (1996), pp. 5-18
5. *Кантор Б.Я., Науменко В.В., Стрельникова Е.А.* О возможности выбора контрольных точек на границах элементов при численном решении сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Адамара // Докл. НАН Украины. – 1996. – № 1. – С.20-27
6. *Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolph T.J., Rizzo F.J.* A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations, *ASME J.of Applied Mechanics*, 59 (1992), pp. 604-614
7. *Купрадзе В.Д. и др.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. – М.: Наука, 1976. – 664 с.
8. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. – 524 с.
9. Расчет конструктивных элементов с трещинами / *Н.М.Бородачев, А.Н.Бородачев, В.А.Кольцов и др.*; Под общ. ред. *Н.М.Бородачева*. – М.: Машиностроение, 1992. – 192 с.