УДК 624 .042

Колесник І.А., д-р техн. наук,
Іванова А.П., канд. техн. наук,
Сушкіна Ю.И., магістр

КОЛИВАННЯ РАМНИХ КОНСТРУКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ РОЗСІЮВАННЯ ЕНЕРГІЇ

Рамні конструкції почали застосовуватися лише з початку минулого сторіччя, у зв'язку із широким поширенням залізобетону, для якого рама – найбільш оптимальна конструктивна форма (рис. 1) у порівнянні з металевими і дерев'яними рамами. Історично розвиток залізобетонних конструкцій (і рамних зокрема) відбувався послідовно, від простих форм до більш складних [1].

Рамні конструкції знаходяться під дією різних впливів, у тому числі і коливальних. Виникає необхідність підвищеної уваги до проблеми коливань і більш повного обліку факторів, що супроводжують реальні умови експлуатації рам. До числа таких факторів відноситься розсіювання енергії коливальної системи за рахунок різних джерел, що існують в усіх без винятку коливальних системах. З цієї причини вільні коливання конструкції виявляються затухаючими. Основні види втрат енергії при механічних коливаннях:

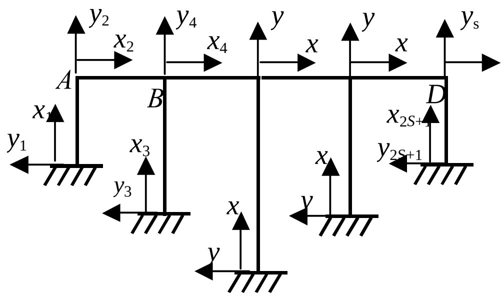

Рис. 1

- втрати енергії в матеріалі гістерезисного типу;
- конструкційне розсіювання енергії;
- аеродинамічні втрати енергії.

Внесок у демпфірування коливань у зазначених видах втрат енергії буде залежати від типу коливань системи і від середовища, у якому ці коливання відбуваються.

Г.С. Писаренко [4] запропонував загальний метод розрахунку коливань механічних систем з урахуванням будь-якого виду розсіювання енергії, базуючись на раніше розробленій нелінійній теорії гістерезисних втрат у матеріалі при коливальному процесі (рис. 2).

Розсіювання енергії виявляється в зменшенні амплітудного значення потенціальної енергії в кожному одиничному обсязі матеріалу "пружини" за цикл коливань. Цю частину загубленої енергії пропонується характеризувати площею умовної петлі гистерезиса, контур якої описується нелінійними залежностями між напругами σ і деформаціями ε, подібно тому, як було прийнято при описі петель гистерезиса, що характеризують недосконалу пружність матеріалу [5].

Аналітичний опис петлі гистерезиса, запропонований Г.С.Писаренко, має вид:

$$\sigma = E\left[\xi \pm \frac{3}{8}\partial_z\left(\xi_0 \mp 2\xi - \frac{\xi^2}{\xi_0}\right)\right]. \tag{1}$$

Тут

$$\partial_z = \partial(\xi_0) + \partial(\xi) + \partial(R) + \partial(C) + \ldots, \tag{2}$$

де ξ_0 - начальна амплітуда, яка залежить від відносних деформацій; $\partial(\xi_0)$ - декремент, що залежить від амплітуди коливань; $\partial(\xi)$ – декремент, що залежить від скорості деформацій; $\partial(R)$ – декремент, що залежить від сухого тертя; $\partial(C)$ декремент, що залежить від жортскості системи і т.д.

Такий підхід передбачає знання декрементів, як функції тих чи інших факторів, отриманих з експериментів.

Вільні коливання рамних конструкцій (з урахуванням розсіювання енергії в системі) будуть визначатися для кожного стержня диференціальним рівнянням

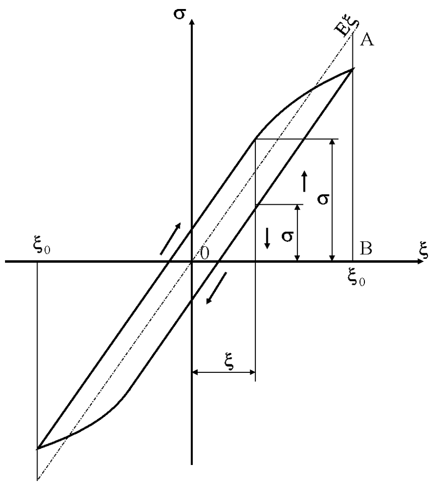

Рис. 2

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\overset{\Leftrightarrow}{\Phi}\cdot\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\right] = 0\,, \tag{3}$$

де EI – жорсткість стержня рами при згині; $y(x,t)$ – прогин у будь-який момент часу t у перетині стержня на відстані x від початку координат; m –

маса одиниці довжини стержня; ℓ – довжина стержня; $\varepsilon \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\overset{\Leftrightarrow}{\Phi}\cdot\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\right]$ функціонал, що враховує розсіювання енергії в системі, присутність у ньому ε у виді множника вказує на слабкий вплив збурювання, внесеного в рівняння (3) у порівнянні з незбуреним рівнянням (при ε =0).

Уведемо наступні позначення:

$$\alpha^2 = \frac{m}{EI}\,, \tag{4}$$

$$\overset{\Leftrightarrow}{\Phi}''\left(y''\right) = -\frac{1}{EI}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}\left[\overset{\Leftrightarrow}{\Phi}\cdot\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\right], \tag{5}$$

тоді рівняння (3) буде мати вигляд:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \alpha^2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \varepsilon\overset{\Leftrightarrow}{\Phi}''\cdot(y'')\ . \tag{6}$$

Якщо збурювання відсутнє (ξ=0), тоді коливання будуть гармонійними з постійною амплітудою і рівномірно обертовим кутом, який залежить тільки від початкових умов:

$$\frac{du}{dt} = 0\ ;\ \ \frac{d\theta}{dt} = \varphi \quad (\theta = \varphi\cdot t + \psi)\,. \tag{7}$$

Нелінійне збурювання (ξ≠0) обумовлює залежність миттєвої частоти $\dfrac{d\theta}{dt}$ від амплітуди і викликає появу обертонів у рішенні рівняння (6), а також зменшення амплітуди коливань у результаті розсіювання енергії. Рішення рівняння (6) представимо у виді ряду:

$$y(x,t) = u\cdot X(x)\cdot\cos\theta + \varepsilon\cdot u_1(u,x,\theta) + \varepsilon^2\cdot u_2(u,x,\theta) + \ldots.\,, \tag{8}$$

у котрому $X(x)\cdot\cos\theta$ – рішення незбуреного рівняння (6); $X(x)$ - фундаментальна функція задачі; $u_1(u,x,\theta)$, $u_2(u,x,\theta)$ – періодичні функції кута θ з періодом 2π.

Виходячи з теорії нелінійної механіки, амплітуду u і фазу θ, що є функціями часу t, можна визначити з диференціальних рівнянь

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon \cdot A_1(u) + \varepsilon^2 A_2(u) + \ldots, \tag{9}$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \varphi + \varepsilon \cdot B_1(u) + \varepsilon^2 B_2(u) + \ldots,$$

де φ – власна частота коливань стержня без урахування затухання.

Задача буде складатися у визначенні наступних функцій:

$$u_1(u, x.\theta)\,,\, u_2(u, x, \theta)\,,\, A_1(u)\,,\, A_2(u)\,,\, B_1(u)\,,\, B_2(u)\,, \tag{10}$$

при яких вираз (8) з урахуванням рівнянь (9) буде рішенням рівняння (6).

Для встановлення однозначності функцій (10), що є коефіцієнтами при ступенях малого параметра ε, відповідно до теорії побудови асимптотичних розв'язків [5] повинні бути накладені наступні обмеження – відсутність у них перших гармонік

$$\int_0^{2\cdot\pi} u_1(u, x, \theta) \cdot \cos\theta \cdot d\theta = 0\,, \quad \int_0^{2\cdot\pi} u_2(u, x, \theta) \cdot \cos\theta \cdot d\theta = 0\,, \tag{11}$$
$$\int_0^{2\cdot\pi} u_1(u, x, \theta) \cdot \sin\theta \cdot d\theta = 0\,, \quad \int_0^{2\cdot\pi} u_2(u, x, \theta) \cdot \sin\theta \cdot d\theta = 0\,.$$

Це означає, що величина u у виразі (8) дорівнює амплітуді першої гармоніки коливань.

Попередньо визначивши четверту похідну $y^{IV}(x,t)$ виразу (8), з урахуванням (9), ліву частину рівняння (3) чи (7) можна представити у вигляді

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u \cdot \left[\frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \alpha^2 \cdot \varphi^2 \cdot X(x)\right] \cdot \cos\theta + \varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \times$$
$$\times \left[-2\varphi \cdot A_1(u) X(x) \cdot \sin\theta - 2\varphi \cdot u B_1(u) X(x) \cdot \cos\theta + \varphi^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4}\right] +$$
$$+ \varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \left\{\left[A_1(u) \cdot \frac{dA_1(u)}{du} - u B_1^{22}(u) - 2\varphi \cdot u B_2(u)\right] X(x) \cdot \cos\theta - \right.$$

$$-\left[2\varphi\cdot A_2(u)+2A_1(u)B_1(u)+A_1(u)\frac{dB_1(u)}{du}\cdot u\right]X(x)\cdot\sin\theta+$$
$$+2\varphi\cdot A_1(u)\cdot\frac{\partial^2 u_1}{\partial u\partial\theta}+2\phi\cdot B_1(u)\frac{d^2u_1}{d\theta^2}+\varphi^2\cdot\frac{\partial^2 u_2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4}\Bigg\}+\varepsilon^2... \tag{12}$$

Праву частину рівняння (6) розкладемо в ряд по ступенях малого параметра ε

$$\varepsilon\cdot\overset{\Leftrightarrow}{\Phi}{}''(y'')=\varepsilon\cdot\overset{\Leftrightarrow}{\Phi}{}''\left[uX''(x)\cdot\cos\theta\right]+\varepsilon^2\cdot\overset{\Leftrightarrow}{\Phi}{}''\left[uX''(\mathrm{x})\cdot\cos\theta\right]\cdot u_1+\varepsilon^2... \tag{13}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових ступенях ε у правих частинах виразів (12) і (13) до членів m-го порядку включно.

Приймаючи $m=2$, одержимо наступну систему рівнянь

$$\frac{d^4X(x)}{dx^4}-p^2X(x)=0\,, \tag{14}$$

$$\alpha^2\left[-2\varphi\cdot X(x)\cdot A_1(u)\sin\theta-2\varphi\cdot uX(x)B_1(u)\cos\theta\right]+$$
$$+\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4}+p^2\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2}=\overset{\Leftrightarrow}{\Phi}\cdot\left[uX''(\mathrm{x})\cos\theta\right]\,, \tag{15}$$

$$\alpha^2\left\{\left[A_1(u)\frac{dA_1(u)}{du}-uB_1^2(u)-2\varphi\cdot B_2(u)\right]X(x)\cos\theta-\right.$$
$$-\left[2\varphi\cdot A_2(u)+2A_1(u)B_1(u)+A_1(u)\frac{dB_1(u)}{du}\right]\times$$
$$\left.\times X(x)\sin\theta+2\varphi\cdot A_1(u)\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta\cdot\partial u}+2\varphi\cdot B_1(u)\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2}\right\}+ \tag{16}$$
$$+\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4}+p^2\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial\theta^2}=\overset{\Leftrightarrow}{\Phi}{}''\left[uX''(x)\cos\theta\right]\cdot u_1,$$

де

$$p^2=\alpha^2\cdot\varphi^2=k_1^4\,. \tag{17}$$

Вирази (14) – (16) є тими вихідними рівняннями, на підставі яких можуть бути отримані рішення поставленої задачі в нульовому, першому і другому наближеннях.

Загальне рішення рівняння (14), що збігає з рівнянням (3) при $\varepsilon = 0$ з точністю до постійного множника, можна записати [2]:

$$X_{ni} = A_{ni} \cdot S(k_{ni}\ x) + B_{ni} \cdot T(k_{ni}\ x) + C_{ni} \cdot U(k_{ni}\ x) + D_{ni} \cdot V(k_{ni}\ x), \qquad (18)$$

де $A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$ - довільні постійні; $S(k_{ni}\ x), T(k_{ni}\ x), U(k_{ni}\ x), V(k_{ni}\ x)$ - функції Крилова [3]; i - номер стержня; n - тон коливань.

Довільні постійні, які входять у формули для фундаментальних функцій на різних ділянках рами, шляхом використання граничних умов і умов сполучення виражаються через одну з невизначеностей, що залишилися. Таким чином, фундаментальна функція визначається з точністю до постійного множника. За допомогою однієї з граничних умов і умов сполучення, не використовуваних при побудові системи фундаментальних функцій, складається рівняння частот, з якого визначаються корені k_n:

$$k_{ni}^4 = \frac{\varphi_n^2}{b_i^2}, \quad \left(b_i = \sqrt{\frac{EI_i}{m_i}} \right). \qquad (19)$$

Для симетричної однопрольотної рами (рис. 3), досліджуваної в цій роботі, система фундаментальних функцій має різний вид для симетричних і кососиметричних форм коливань. Будемо вважати, що стійки рами і її ригель мають постійну по довжині й однакову жорсткість $(I_1 = I_2 = I_3 = I)$ та погонну масу $(m_1 = m_2 = m_3 = m)$.

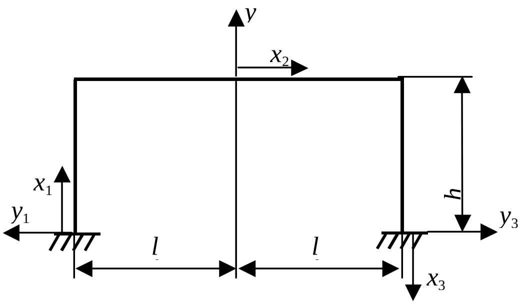

Рис. 3

Тоді, позначаючи $\alpha_n = k_n \cdot \ell$, $(k_{n1} = k_{n2} = k_{n3} = k_n)$ і використовуючи безрозмірну координату

$$\xi = \frac{x}{\ell}, \qquad (20)$$

одержимо вираз для фундаментальних функцій:

а) для симетричних форм коливань $(n = 2,4,6...)$

$$X=\begin{cases} X_{n1}=U(\alpha_n\,\xi)-\mathrm{A_n}V(\alpha_n\,\xi), & [0\le\xi\le1],\\ \mathrm{X_{n2}}=B_n\left[U(\alpha_n\,\xi)-\mathrm{C_n}S(\alpha_n\,\xi)\right], & [-1\le\xi\le1],\\ X_{n3}=X_{n1}, & [-1\le\xi\le0], \end{cases} \tag{21}$$

де

$$A_n=\frac{U(\alpha_n)}{V(\alpha_n)},\; B_n=-\frac{S(\alpha_n)\cdot D(\alpha_n)}{A(\alpha_n)\cdot V(\alpha_n)},\; C_n=\frac{U(\alpha_n)}{S(\alpha_n)}; \tag{22}$$

б) для кососиметричних форм коливань $(n=1,3,5,...)$

$$X_n=\begin{cases} X_{n1}=U(\alpha_n\,\xi)-\mathrm{D_n}\cdot V(\alpha_n\,\xi), & [0\le\xi\le1],\\ \mathrm{X_{n2}}=E_n\left[T(\alpha_n\,\xi)-\mathrm{F_n}\cdot V(\alpha_n\,\xi)\right], & [-1\le\xi\le1],\\ \mathrm{X_{n3}}=-X_{n1}, & [-1\le\xi\le0], \end{cases} \tag{23}$$

де

$$\begin{aligned} D_n&=\frac{S_n(\alpha_n)\cdot B(\alpha_n)+T(\alpha_n)\cdot S_1(\alpha_n)}{T(\alpha_n)\cdot B(\alpha_n)+U(\alpha_n)\cdot S_1(\alpha_n)},\\ E_n&=-\frac{V(\alpha_n)\cdot S_1(\alpha_n)}{2\left[T(\alpha_n)\cdot B(\alpha_n)+U(\alpha_n)\cdot S_1(\alpha_n)\right]},\\ F_n&=\frac{T(\alpha_n)}{V(\alpha_n)},\\ S_1&=2sh(\alpha_\mathrm{n})\cdot\sin(\alpha_\mathrm{n}). \end{aligned} \tag{24}$$

Частоти і форми вільних коливань П–образної рами:
а) для симетричних форм коливань

$$\frac{B(\alpha_n)}{D(\alpha_n)}=\frac{C(\alpha_n)}{A(\alpha_n)}, \tag{25}$$

б) для кососиметричних форм коливань

$$\frac{\alpha_n\cdot B(\alpha_n)-S(\alpha_n)}{\alpha_n\cdot D(\alpha_n)+A(\alpha_n)}=\frac{S_1(\alpha_n)}{B(\alpha_n)}. \tag{26}$$

З приведених трансцендентних рівнянь (25) і (26) визначаються корені α_n, зв'язані з частотами вільних коливань залежністю:

$$\varphi_n=\frac{\alpha_n^2}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{m}}. \tag{27}$$

Перші шість коренів рівнянь (25) і (26) мають наступні значення:
а) для симетричних форм коливань: $\alpha_1 = 1{,}51369$; $\alpha_3 = 3{,}39480$; $\alpha_5 = 4{,}59523$;
б) для кососиметричних форм коливань: $\alpha_2 = 2{,}02932$; $\alpha_4 = 4{,}19725$; $\alpha_6 = 5{,}23906$.

Рішення рівняння (6) у нульовому наближенні згідно (8), можна представити у вигляді

$$y = u \cdot X(x) \cdot \cos\theta\,. \qquad (28)$$

Для обліку розсіювання енергії в системі, варто розглядати рівняння (15), представивши його в такий спосіб:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + p^2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} = \overset{\Leftrightarrow}{\Phi}\,''\left[uX\,''(x)\cdot\cos\theta\right] + \\ + \alpha^2\left[2\varphi \cdot A_1(u)\cdot X(x)\cdot\sin\theta + 2\varphi\cdot u\cdot B_1(u)\cdot X(x)\cdot\cos\theta\right].\end{gathered} \qquad (29)$$

Для визначення $A_1(u)$ і $B_1(u)$ помножимо рівняння (29) спочатку на $X(x)\cdot\sin\theta$, потім на $X(x)\cdot\cos\theta$, отриманий після цього вираз проінтегруємо по довжині першого стержня конструкції від 0 до h і по циклу від 0 до 2π; проінтегруємо від $-\ell$ до ℓ для другого стержня по циклу від 0 до 2π; проінтегруємо від 0 до h для третього стержня по циклу від 0 до 2π, після відповідних перетворень одержимо:

$$A_1(u) = -\frac{\int\limits_0^h \int\limits_0^{2\pi} \overset{\Leftrightarrow}{\Phi}\cdot\left[u\cdot X\,''(x)\cdot\cos\theta\right]\cdot X(x)\sin\theta\cdot dx\cdot d\theta}{2\pi\cdot\alpha^2\varphi\int\limits_0^h X^2(x)\cdot dx}; \qquad (30)$$

$$B_1(u) = -\frac{\int\limits_0^h \int\limits_0^{2\pi} \overset{\Leftrightarrow}{\Phi}\cdot\left[u\cdot X\,''(\mathrm{x})\cdot\cos\theta\right]\cdot X(x)\cos\theta\cdot dx\cdot d\theta}{2\pi\cdot\alpha^2\varphi\cdot u\int\limits_0^h X^2(x)\cdot dx}. \qquad (31)$$

Для другого і третього стержнів рами A_1 і B_1 визначаються аналогічно.

Функції $U_1(u,x,\theta)$ можна визначити, розв'язуючи рівняння (23) за методикою Г.С. Писаренка [3]. Тому що найбільш цікавим представляється перше наближення, то для визначення прогину (з достатнім ступенем точності) можна обмежитися використанням тільки формули (28). Згідно формули (8) ступінь точності буде така, як у наступному виразі:

$$y = u \cdot X(x) \cdot \cos\theta + \varepsilon \cdot U_1(u, x, \theta)\,. \tag{32}$$

Тому, для розв'язання задачі в першому наближенні немає необхідності визначати функцію $U_1(u, x, \theta)$.

Визначивши A_1 і B_1 за формулами (30) - (31) і використовуючи вираз (32), одержимо амплітуду і фазу коливань для першого стержня рами

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\int\limits_0^h \int\limits_0^{2\pi} \varepsilon \cdot \overset{\Leftrightarrow}{\Phi} \cdot \left[u \cdot X''(x) \cdot \cos\theta\right] \cdot X(x) \sin\theta \cdot dx \cdot d\theta}{2\pi \cdot \alpha^2 \varphi \int\limits_0^h X^2(x) \cdot dx}; \tag{33}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \varphi - \frac{\int\limits_0^h \int\limits_0^{2\pi} \varepsilon \cdot \overset{\Leftrightarrow}{\Phi} \cdot \left[u \cdot X''(x) \cdot \cos\theta\right] \cdot X(x) \cos\theta \cdot dx \cdot d\theta}{2\pi \cdot \alpha^2 \varphi \cdot u \int\limits_0^h X^2(x) \cdot dx}. \tag{34}$$

Аналогічно знайдемо вирази для другого і третього стержнів рами.

Для того, щоб представити диференціальні рівняння (33) і (34) у явному виді, необхідно записати функціонал $\Phi''\left[u \cdot X(x) \cdot \cos\theta\right]$ у розгорнутому виді. Для цього використовуємо нелінійні залежності (1) між нормальними напругами і відносною деформацією.

Тоді для першого стержня рами шириною b_1 і висотою h_1, після відповідних перетворень одержимо:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\int\limits_0^h \frac{d^2}{dx^2} \cdot \left[\partial_z \cdot u \cdot X''(x)\right] \cdot X(x) \cdot dx}{2\pi \cdot \alpha^2 \varphi \cdot \int\limits_0^h X^2(x) \cdot dx}; \tag{35}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \varphi + \frac{3}{8} \cdot \frac{\int_0^h \frac{d^2}{dx^2} \cdot \left[\partial_z \cdot u \cdot X''(x)\right] \cdot X(x) \cdot dx}{\alpha^2 \cdot u \cdot \varphi \cdot \int_0^h X^2(x) \cdot dx}. \tag{36}$$

Знаючи вирази для функції прогину $X(x)$, а також вираз для декремента ∂_z, додатки якого є функціями прогину, і вирішуючи диференціальне рівняння (33), можна одержати $u = f_1^I(t)$ і $\theta = f_2^I(t)$. Аналогічно знаходять $u = f_1^{II}(t)$ і $\theta = f_2^{II}(t)$ для другого стержня рами й $u = f_1^{III}(t)$ і $\theta = f_2^{III}(t)$ для третього стержня.

У подальшому будуть наведені результати наступних досліджень:
– вимушених коливань та їх впливу на частоти вільних коливань стержнів рами;
– випадків резонансу.

1. *Жемочкин Б.Н.* Расчет рам. – М.:СИ, 1965 . – 400 с.
2. *Колесник И.*А., *Иванова А.П.* Коливання рамних конструкцій під дією рухомих навантажень // Опір матеріалів та теорія споруд. – 2002. – Вип.. 71. – С. 153 – 166.
3. *Крылов А.*Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. –М. –Л.: Гостехтеориздат. – 1950. – 368 с.
4. *Писаренко Г.С.* Обобщенная нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях. – К.: Наукова думка, 1985. – 240 с.
5. *Писаренко Г.С.* Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале. – К.: Изд – во АН УССР, 1955. – 237 с.

Матеріал надійшов до редакції 24.09.04.