

УДК 624.014

к.т.н. Білик А.С.,

vartist@ukr.net, код ORCID / <https://orcid.org/0000-0001-8783-5892>

Цюпин Є. І.,

standartbc@gmail.com, код ORCID / <https://orcid.org/0000-0001-9428-6166>,

Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЗНАЧЕННЯ ВПЛИВУ ПРУЖНОСТІ ВУЗЛА НА РОЗРАХУНКОВУ ДОВЖИНУ СТАЛЕВИХ КОЛОН МАЛОПОВЕРХОВИХ РАМ

Приведено загальне рішення рівняння стійкості стержня пружно закріпленого на нижньому кінці та пружно закріпленого на верхньому кінці при вільному пересуванні. Надано обґрунтування отриманого узагальненого критерію стійкості та наведено рішення тестових задач.

Ключові слова: критична сила, коефіцієнт розрахункової довжини, рівняння стійкості, метод початкових параметрів, стержень, шарнір, пружні опори.

Актуальність теми. Для аналізу колон багатоповерхових і малоповерхових будівель завжди є важливим визначити вплив різних конструктивних схем рам на загальну жорсткість сталевих каркасів, у тому числі з урахуванням конструктивної піддатливості вузлів.

В нормативних документах одним з методологічних підходів з проектування сталевих конструкцій [7] для визначення коефіцієнтів розрахункової довжини рам запропоновано визначати їх ефективну розрахункову довжину через стійкість окремих пружних стрижнів на пружних опорах. Але пружність защемлення коло в рамах і відповідно піддатливість вузлів рам в узагальненому виді залежить від співвідношення жорсткостей ригелів і колон, як з'єднуються у вузлі. Конструктивна піддатливість вузла залежить від типу конструкції самого вузла: болтовий вузол на фланцях, зварний. Тому більш детальні числові дослідження стійкості стрижнів на пружних опорах є необхідними і важливими.

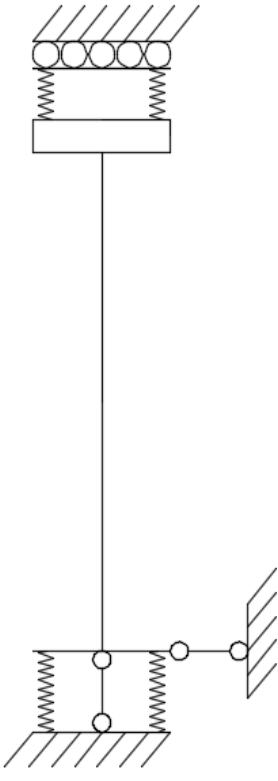
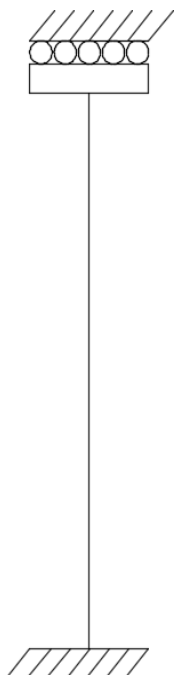
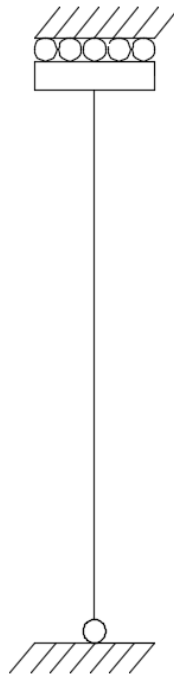
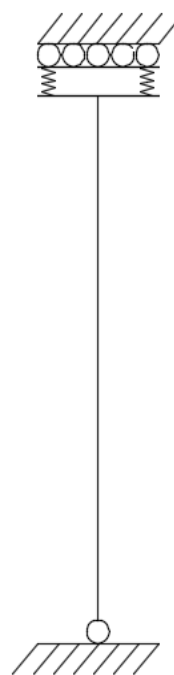

Мета і задача досліджень. Отримати на основі методу початкових параметрів узагальнений критерій стійкості стрижня на пружних опорах при вільному пружному закріпленні верхньої опори. Провести числові дослідження коефіцієнтів розрахункової довжини критерію стійкості закріпленого на нижньому кінці та пружно закріпленого на верхньому кінці. Розробити положення узагальненої методики визначення коефіцієнтів розрахункової довжини мало поверхових будівель.

Методика досліджень будується на аналітичних дослідженнях стержнів методом початкових параметрів [3] і загальних методик визначення стійкості стрижнів [2,6,3,8,12,16,1819].

В узагальненому виді стійкість пружної колони з урахуванням узагальнених умов обпирання описується методом початкових параметрів [3,6,12]. В таблиці представлені загальна розрахункова схема центрально-стиснутого стрижня на пружних опорах і тестові приклади, які впливають із цієї розрахункової схеми при зміні жорсткості пружних опор. Тестові приклади були раніше розглянуті в ряді інших дослідженнях [3,6].

Таблиця

Розрахункові схеми центрально-стиснутих стрижнів

Загальна розрахункова схема	Тест 1	Тест 2	Тест 3	Тест 4
				

Розглянуто пружний стрижень довжиною l , який стиснутий поздовжньою силою N . Прийнята декартова система координат (таблиця, загальна розрахункова схема). Введені позначення для характеристик внутрішніх силових факторів і переміщень: η_z - переміщення перерізу з координатою z , η'_z - позначено кут повороту перерізу, який має поточну з координату z , M_{xz} - згинальний момент в поточному перерізі з координатою z . Початкові

переміщення перерізу з координатою $z=0$, кут повороту перерізу, згинальний момент і поперечна сила позначені з нульовим індексом: $\eta_0; \eta'_0; M_{x0}; Q_0$.

Введено параметр стійкості стрижня у відомому вигляді.

$$\alpha_N^2 = \frac{N}{EI_x} \rightarrow \alpha_N^2 l^2 = \frac{Nl^2}{EI_x} \rightarrow \alpha_N^2 EI_x = N. \quad (1)$$

Диференціальне рівняння має форму запису у описаній системі координат.

$$\eta_z'' + \alpha_N^2 \eta_z = \alpha_N^2 \eta_0 - \frac{M_{x0}}{EI_x} - \frac{Q_0}{EI_x} z. \quad (2)$$

Загальне рішення лінійного неоднорідного диференціального рівняння стійкості пружного стрижня постійного перерізу (2), у формі метода початкових параметрів [3].

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_z = \eta_0 + \frac{\eta'_0}{\alpha_N} \sin(\alpha_N z) - \frac{M_{x0}}{\alpha_N^2 EI_x} [1 - \cos(\alpha_N z)] - \frac{Q_0}{\alpha_N^3 EI_x} [\alpha_N z - \sin(\alpha_N z)] \\ \eta'_z = \eta'_0 \cos(\alpha_N z) - \frac{M_{x0}}{\alpha_N EI_x} \sin(\alpha_N z) - \frac{Q_0}{\alpha_N^2 EI_x} [1 - \cos(\alpha_N z)] \\ \eta''_z = -\alpha_N \eta'_0 \sin(\alpha_N z) - \frac{M_{x0}}{EI_x} \cos(\alpha_N z) - \frac{Q_0}{\alpha_N EI_x} \sin(\alpha_N z) \\ M_{xz} = -EI_x \eta''_z = \alpha_N EI_x \eta'_0 \sin(\alpha_N z) + M_{x0} \cos(\alpha_N z) + \frac{Q_0}{\alpha_N} \sin(\alpha_N z) \end{array} \right. \quad (3)$$

В дослідженнях прийнято моделювання згинального моменту в опорах двома пружними опорами, що дозволяє прив'язатися до пружних характеристик вузла рами в залежності від розмірів поперечного перерізу [3,6] та в подальшому правильно змоделювати піддатливість вузлів.

Розглянуто стійкість пружного стрижня, який має пружне защемлення нижнього опорного перерізу і пружне защемлення на пересувні опори (на вільних катках).

Крайові умови будуть мати запис.

$$\eta_0 = 0 \rightarrow M_{x0} \neq 0 \rightarrow Q_0 = Q_n = 0 \rightarrow M_{xn} \neq 0 \rightarrow \eta_0 \neq 0. \quad (4)$$

Позначенні відстані між пружинами в опорі (b_{r0}) з координатою $z=0$, відстані між пружинами в опорі (b_{rn}) з координатою $z=l$.

Характеристиками пружного защемлення кінців пружного стрижня є характеристики жорсткості пружин для нижнього опорного перерізу (k_{M0}) з координатою $z=0$ і верхнього опорного перерізу (k_{Mn}) з координатою $z=l$. Ці пружини імітують вузол з'єднання ригелів і колон в рамній конструкції, і є індивідуальними параметрами для кожної споруди.

$$M_{xn} = R_M b_{rn} = k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} \eta'_n \quad M_{x0} = R_{M0} b_{r0} = k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2} \eta'_0 . \quad (5.a)$$

Рівняння рівноваги центрально-стиснутого стрижня у загальному вигляді з граничними умовами (4) мають вид.

$$-M_{x0} - M_{xn} + N\eta_n = 0 . \quad (5.6)$$

$$-k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2} \eta'_0 - k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} \eta'_n + N\eta_n = 0 .$$

При введенні позначень (5) маємо рівняння рівноваги в розгорнутому вигляді.

$$\alpha_N^2 = \frac{N}{EI_x} \rightarrow -k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2} \eta'_0 - k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} \eta'_n + \alpha_N^2 EI_x \eta_n = 0 . \quad (5.b)$$

Система рівнянь (6.a) метода початкових параметрів при врахуванні граничних умов і рівняння рівноваги (5) для перерізу з координатою $z=l$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_n = + \frac{\eta'_0}{\alpha_N} \sin(\alpha_N l) + \frac{k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2}}{\alpha_N^2 EI_x} [1 - \cos(\alpha_N l)] \\ \eta'_n = \eta'_0 \cos(\alpha_N l) + \frac{k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2}}{\alpha_N EI_x} \eta'_0 \sin(\alpha_N l) \\ -k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2} \eta'_0 - k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} \eta'_n + N\eta_n = 0 \end{array} \right. . \quad (6,a)$$

Друге рівняння підставляємо в третє (6,a), і приходимо до системи двох трансцендентних рівнянь з тригонометричними функціями.

$$\left\{ \begin{aligned} & \eta_n = + \frac{\eta'_0}{\alpha_N} \sin(\alpha_N l) + \frac{k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2}}{\alpha_N^2 EI_x} [1 - \cos(\alpha_N l)] \\ & \left[k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} \eta'_0 \cos(\alpha_N l) + k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} \frac{k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2}}{\alpha_N EI_x} \eta'_0 \sin(\alpha_N l) \right] = \alpha_N EI_x \eta'_0 \sin(\alpha_N l) + k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2} \eta'_0 \cos(\alpha_N l) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\alpha_N} \sin(\alpha_N l) + \frac{k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2}}{\alpha_N^2 EI_x} [1 - \cos(\alpha_N l)] \right\} \eta'_0 - \eta_n = 0 \\ & \left[-k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2} - k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} \cos(\alpha_N l) - k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} \frac{k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2}}{\alpha_N EI_x} \sin(\alpha_N l) \right] \eta'_0 + \alpha_N^2 EI_x \eta_n = 0 \end{aligned} \right. \quad (7,a)$$

Критерій стійкості отримаємо при рівності нулю головного визначника системи (7,а,б).

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{1}{\alpha_N} \sin(\alpha_N l) + \frac{k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2}}{\alpha_N^2 EI_x} [1 - \cos(\alpha_N l)] & -1 \\ -k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2} - k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} \cos(\alpha_N l) - k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} \frac{k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2}}{\alpha_N EI_x} \sin(\alpha_N l) & \alpha_N^2 EI_x \end{array} \right| = 0. \quad (7,б)$$

$$\alpha_N EI_x \sin(\alpha_N l) - \frac{k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2}}{\alpha_N EI_x} \sin(\alpha_N l) - k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2} \cos(\alpha_N l) - k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} \cos(\alpha_N l) + k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2} - k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2} = 0. \quad (7,в)$$

Остаточно критерій стійкості буде для даного випадку при крайових умовах закріплення (5).

$$\left[\alpha_N EI_x - \frac{k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2}}{\alpha_N EI_x} \right] \sin(\alpha_N l) - \left[k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2} + k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} \right] \cos(\alpha_N l) = 0$$

$$\sin(\alpha_N l) k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2} \left\{ \left[\frac{\alpha_N EI_x}{k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2}} - \frac{1}{\alpha_N EI_x} \right] - \left[\frac{1}{k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2}} + \frac{1}{k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2}} \right] \text{ctg}(\alpha_N l) \right\} = 0. \quad (7, \Gamma)$$

Тест 1 (див. табл.). Для рівняння (7,Г). Стрижень жорстко защемлений внизу $k_{bM0} \rightarrow \infty$ і має жорстке защемлення вверху на пересувних опорах без обмеження горизонтального переміщення ($k_{bMn} \rightarrow \infty$). Критерій стійкості (7,Г) переходить до умов.

$$\sin(\alpha_N l) = 0 \quad (8.а)$$

$$\left\{ \left[\frac{\alpha_N EI_x}{k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2}} - \frac{1}{\alpha_N EI_x} \right] - \left[\frac{1}{k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2}} + \frac{1}{k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2}} \right] \text{ctg}(\alpha_N l) \right\} = 0 \quad (8.б)$$

Умова (8.б) виконується автоматично при $k_{bMn} \rightarrow \infty$, $k_{bM0} \rightarrow \infty$. Тому критерій стійкості є умова (8.а), як а приводить до відомого рішення [2,3].

$$\sin(\alpha_N l) = 0 \rightarrow \alpha_N l = \pi \rightarrow \alpha_N^2 EI_x = N.$$

$$N = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2} \rightarrow \mu_x = 1,0 \quad (8.в)$$

Стійкість стрижня зведена до аналога форми втрати шарнірно опертого стрижня.

Тест 2 (див. табл.). Для рівняння (7,Г). Стояк шарнірно закріплений внизу $k_{bM0} = 0$ і має жорстке защемлення вверху на пересувних опорах без обмеження горизонтального переміщення ($k_{bMn} \rightarrow \infty$). Критерій стійкості (7,Г) приймає вид.

$$\sin(\alpha_N l) k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} \left\{ \left[\frac{k_{M0} \frac{b_{r0}^2}{2}}{\alpha_N EI_x} \right] - \text{ctg}(\alpha_N l) \right\} = 0 \rightarrow \cos(\alpha_N l) = 0. \quad (9.а)$$

$$\alpha_N l = \frac{\pi}{2} \rightarrow N = \frac{\pi^2 EI_x}{4l^2} \rightarrow \mu_x = 2,0. \quad (9.б)$$

Отриманий результат підтверджує, що форма втрати стійкості описаного стрижня аналогічна за параметрами втраті стійкості консольного стрижня.

Тест 3(див. табл.). Пружний стояк шарнірне обпирання внизу і пружне обпирання при вільному пересуванні: $k_{bMn} \neq 0$ $k_{bM0} = 0$. Критерій стійкості (7,Г) буде.

$$\sin(\alpha_N l) k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2} \left\{ \left[\frac{\alpha_N EI_x}{k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2}} \right] - \text{ctg}(\alpha_N l) \right\} = 0 .$$

(10.a)

Форма втрати стійкості при пружних опорах може бути подібна до втрати стійкості для шарнірного стрижня і для консольного стрижня пружних опор [2,3,15].

$$\begin{cases} \sin(\alpha_N l) = 0 \\ \text{ctg}(\alpha_N l) - \frac{\alpha_N EI_x}{k_{bMn}} = 0 . \end{cases} \quad (10.6)$$

Тест 4 (див. табл.). При жорсткому защемленні колони внизу консоль на пружних опорах вверх, жорстке внизу, крайові є формалізованими: $k_{bMn} \neq 0$
 $k_{bM0} \rightarrow \infty$.

$$\sin(\alpha_N l) \left\{ \left[-\frac{k_{Mn} \frac{b_{rn}^2}{2}}{\alpha_N EI_x} \right] - \text{ctg}(\alpha_N l) \right\} = 0 . \quad (11.a)$$

Форма втрати стійкості при пружних опорах може бути подібна до втрати стійкості для шарнірного стрижня і для консольного стрижня пружних опор [2,3,15].

$$\begin{cases} \sin(\alpha_N l) = 0 \\ \text{ctg}(\alpha_N l) - \frac{\alpha_N EI_x}{k_{bMn}} = 0 . \end{cases} \quad (11.6)$$

Висновки. Отримані результати на основі методу початкових параметрів узагальненого критерію стійкості стрижня на пружних опорах при вільному пружному закріпленні верхньої опори. Отримані аналітичні залежності підтверджуються тестовими прикладами отриманими іншими авторами, що вказує на достовірність отриманих результатів. Аналітичні залежності отримані в розгорнутому вигляді, виявлено взаємозв'язок переходу зміни жорсткості пружних опор при переході від одних умов закріплення до інших. Це є

важливим висновком так, як вказує на складність кожного рішення і необхідність вирішення умов невизначеності при максимальних і мінімальних жорсткостях пружних опор, що є певною новизною досліджень. Теоретичний апарат узагальнений для досліджень стійкості колон сталевих каркасів малоповерхових будівель.

Література:

1. Баженов В.А. Будівельна механіка і теорія споруд. Нариси з історії / В.А. Баженов, Ю.В. Ворона, А.В. Перельмутер. – К.: Каравела, 2016. – 428 с.
2. Биргер И.А., Павновко Я.Г., Прочность, устойчивость, колебания/И.А.Биргер, Я.Г.Павновко/ - Справочник - Том 3. —М.: Машиностроение,1968. —568 с.
3. Киселев В.А. Строительная механика: Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений 3-е изд., испр, и доп. — М.: Стройиздат, 1980. — 616 с.
4. Bilyk S., 2006. The peculiarities of buckling and strength analysis of frame elements of I-shaped cross-section with variable web height. Progress in Steel, Composite and Aluminium Structures. Proceeding of the XI international conference on metal structures (ICMS-2006), Pzeszow, Poland, 21-23 June, 144-145.
5. Bilyk S., 2016. Determination of critical load of elastic steel column based on experimental data/ S.Bilyk // Underwater technologies. Industrial and civil engineering. 2016. Vol. 04, 89-96
6. Білик С. І. Рациональні сталеві каркаси малоенергоємних будівель із двотаврів змінного перерізу : дис. доктора. техн. наук : 05.23.01 /С.І. Білик – Київ, 2008. – 460 с.
7. ДБН В.2.6-198:2014 Сталеві конструкції. Норми проектування.
8. Снитко Н.К. Расчет сжато-изогнутых стержней. Проект и стандарт, 1938, № I, с.28-31.
9. Білик С.І. Залишкові напруження в сталевих холодно-гнутих швелерах / Білик С.І., Білик А.С., Усенко М.В., Куземко В.В., Нужний В.В. // Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. науч. трудов. Вып.№61. - Дн-вск., ПГАСА, 2011.-С.43-49.
10. Білик С.І. Білик А.С. Коефіцієнт стійкості центрально-стиснутих сталевих елементів з урахуванням початкових деформацій та геометричних недосконалостей / Білик С.І., Білик А.С.// Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. науч. трудов. Вып.№82. - Дн-вск., ПГАСА, 2015.-С.32-37.
11. Білик С.І. Білик А.С., Усенко М.В., Золотопольський О.Є. Стійкість холодногнутих швелерів з урахуванням пластичних властивостей мало вуглецевих сталей //Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського. Вип.7. – К.: Вид-во «Сталь», 2011. – С.26-35.
12. Бутенко Ю.И. (ред.) Строительная механика. Руководство к практическим занятиям. – Ю.И. Бутенко К.:Вища школа, 1984 . –328 с.
13. Білик С.І. Порівняння о місцевої стійкості стінок двотаврових балок за ДБН В.2.6-198-2014 і Єврокодом 3 (ДСТУ-Н Б EN 1993-1-1:2010) при пружній роботі сталі/ С.І. Білик, Л.І.Лавриненко, Н. Альтайе // Будівельні конструкції. Теорія і практика. Зб. наук. пр. Вип. 1. – Київ. МОН України, КНУБ, 2017. – С. 36–47.
14. Білик С.І. Теоретичне порівняння фактора стійкості і коефіцієнта поздовжнього згину центрально-стиснутих сталевих колон з урахуванням початкових деформацій та вигинів//Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В. М. Шимановського. Вип. 15. – К. : Вид-во «Сталь», 2015. – С. 48-61.
15. Писаренко Г.С. «Справочник по сопротивлению материалу/ Г.С.Писаренко, А.П. Яковлев, Матвеев В.В. К.:Дельта, 2008 . – 816 с.
16. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. (2009). Theory of elastic stability, Dover Publications.

17. Пелешко І.Д. Визначення розрахункової довжини стрижня з пружним закріпленням кінців / І.Д. Пелешко, В.М. Іванейко // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Теорія і практика будівництва. - 2013. - № 755. - С. 291-297.
18. Bilyk S., Tonkacheiev V. / Determining sloped load limits inside von mises' truss with elastic support/Journal Materiali in tehnologije / Materials and Technology/. Volume 52, N0.2, Mar.-Apr. 2018.pp. 105-110.doi:10.17222/mit.2016.083
19. Wang C. M. , EXACT SOLUTIONS FOR BUCKLING OF STRUCTURAL MEMBERS/ C. M. Wang, C. Y. Wang, J. N. Reddy / – CRC Press, Boca Raton, Florida, 2005/– 224 с./ ISBN 0-8493-2222-7 www.crcpress.com 2005.

к.т.н. Билык А.С., Цюпин Е. И.,
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЛИЯНИЯ УПРУГОСТИ УЗЛА НА РАСЧЕТНУЮ ДЛИНУ СТАЛЬНЫХ КОЛОНН МАЛОЭТАЖНЫХ РАМ

В статье приведены общее решение уравнения устойчивости стержня упруго закрепленного на нижнем конце и упруго закрепленного на верхнем конце при свободном передвижении. Предоставлено обоснование полученного обобщенного критерия устойчивости и приведено решение тестовых задач.

Ключевые слова: критическая сила, коэффициент расчетной длины, уравнение устойчивости, метод начальных параметров, стержень, шарнир, упругие опоры.

c.t.s. Bilyk A. S., Tsyupyn E.I.,
Kyiv National University of Construction and Architecture

DETERMINATION OF THE INJURY INFLUENCE ON THE CUTTING LENGTH OF THE STEEL CYLINDER OF THE SMALL-SURFACE RAIN

The general solution of the stability equation for a rod elastically fixed at the lower end and resiliently fastened at the upper end with free movement is given in the article. The justification of the obtained generalized stability criterion is given and the solution of test problems is given.

Key words: critical force, coefficient of design length, stability equation, initial parameters method, rod, hinge, elastic supports.