

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

# ФІЗИКА

## В БУДІВНИЦТВІ

*Рекомендовано науково-методичною радою  
Київського національного університету будівництва і архітектури  
як навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей  
напряму підготовки 6.060101 «Будівництво»*

Київ 2011

УДК: 53(075)  
ББК 22.3я7  
Ф50

Рецензенти: *М.І. Шут*, доктор фізико-математичних наук, член кореспондент НАПН України, професор, завідувач кафедри загальної та прикладної фізики НПУ ім. М.П. Драгоманова  
*В.В. Гайдайчук*, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки КНУБА

*Автори-укладачі*: В.І. Клапченко, І.О. Азнаурян, Н.Б. Бурдейна, В.Б. Долгошей, С.М. Пономаренко

*Рекомендовано науково-методичною радою Київського національного університету будівництва і архітектури, протокол № 1 від 19 жовтня 2010 року.*

**Фізика** в будівництві: навчальний посібник / В.І. Клапченко, І.О. Азнаурян, Ф50 Н.Б. Бурдейна, В.Б. Долгошей, С.М. Пономаренко. – К.: КНУБА, 2011. – 252 с.

Розглянуто основні питання загального курсу фізики з розділів «Механіка», «Молекулярна фізика» та «Електрика і магнетизм». Особливу увагу приділено темам, які мають прикладне значення в професійній підготовці спеціалістів будівельної сфери.

Покликаний стати для студентів надійним провідником від загальних фізичних знань до практичних завдань будівництва, починаючи зі стадії засвоєння загальноосвітніх, загальнотехнічних та спеціальних дисциплін.

Призначений для студентів вищих будівельних навчальних закладів всіх спеціальностей та форм навчання. Може бути корисний викладачам, які працюють в будівельних вузах.

УДК: 53(075)  
ББК 22.3я7

© В.І. Клапченко, І.О. Азнаурян,  
Н.Б. Бурдейна, В.Б. Долгошей,  
С.М. Пономаренко, 2011  
© КНУБА, 2011

## ЗМІСТ

Вступ.....	5
Розділ 1. МЕХАНІКА.....	8
<i>1.1. ЕЛЕМЕНТИ КІНЕМАТИКИ</i> .....	8
1.1.1. Переміщення, шлях, швидкість, прискорення .....	11
1.1.2. Рух точки по колу, кутова швидкість і кутове прискорення .....	17
1.1.3. Зв'язок кутових та лінійних величин .....	18
1.1.4. Плоскопаралельний рух .....	20
<i>1.2. ДИНАМІКА ТОЧКИ ТА СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК</i> .....	22
1.2.1. Закони Ньютона .....	23
1.2.2. Принцип відносності Галілея.....	27
1.2.3. Закон динаміки системи матеріальних точок.....	28
1.2.4. Закон збереження імпульсу.....	30
1.2.5. Центр мас (інерції) системи матеріальних точок. Теорема про рух центра мас.....	31
1.2.6. Рух тіл змінної маси.....	34
1.2.7. Сили інерції. Рух у неінерціальних системах відліку.....	35
<i>1.3. ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ</i> .....	38
1.3.1. Момент сили та момент імпульсу .....	38
1.3.2. Рівняння моментів.....	40
1.3.3. Рівняння моменту імпульсу для обертання навколо нерухомої осі. Момент інерції .....	41
1.3.4. Приклади, що ілюструють закон збереження моменту імпульсу .....	43
1.3.5. Момент інерції. Теорема Гюйгенса-Штейнера .....	44
1.3.6. Вільні осі обертання. Уявлення про гіроскопи .....	48
1.3.7. Умови рівноваги твердого тіла. ....	51
<i>1.4. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ЕНЕРГІЇ</i> .....	53
1.4.1. Енергія, робота та потужність .....	53
1.4.2. Кінетична енергія поступального та обертального рухів .....	55
1.4.3. Консервативні сили. Потенціальна енергія .....	58
1.4.4. Енергія пружнодеформованого тіла.....	60
1.4.5. Потенціальна енергія матеріальної точки у гравітаційному полі та в однорідному полі тяжіння .....	61
1.4.6. Закон збереження енергії в механіці .....	62
1.4.7. Пружний та непружний удари тіл та частинок.....	63
<i>1.5. ВСЕСВІТНЄ ТЯЖІННЯ</i> .....	66
<i>1.6. ЕЛЕМЕНТИ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ</i> .....	69
1.6.1. Деформація розтягу (стиску) .....	71
1.6.2. Деформація зсуву .....	74
1.6.3. Деформація кручення .....	75
1.6.4. Деформація згину.....	76
1.6.5. Енергія пружної деформації.....	79
1.6.6. Аеро- та гідродинаміка.....	80
1.6.7. Сили в'язкого тертя .....	83
1.6.8. Види течії в'язкої рідини.....	84
1.6.9. Рух твердих тіл у рідинах та газах.....	86
Запитання для самоперевірки.....	88
Розділ 2. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА .....	91
<i>2.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ</i> .....	91
2.1.1. Статистичний та термодинамічний методи дослідження.....	91
2.1.2. Атомно-молекулярна теорія будови речовини .....	92

2.2. СТАТИСТИЧНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ ІДЕАЛЬНОГО ГАЗУ.....	102
2.2.1. Розподіл молекул ідеального газу за швидкостями теплового руху (розподіл Максвелла) .....	102
2.2.2. Барометрична формула. Розподіл Больцмана .....	105
2.3. ПЕРШЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМІКИ .....	107
2.3.1. Внутрішня енергія термодинамічної системи.....	107
2.3.2. Робота та теплота. Перше начало термодинаміки.....	110
2.3.3. Поняття теплоємності. Теплоємність ідеального газу .....	112
2.3.4. Застосування першого начала термодинаміки до основних термодинамічних процесів .....	116
2.4. ДРУГЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМІКИ .....	124
2.4.1. Оборотні та необоротні процеси .....	126
2.4.2. Цикл Карно .....	127
2.4.3. Ентропія .....	130
2.4.4. Третє начало термодинаміки. Теорема Нернста.....	136
2.5. РЕАЛЬНІ ТЕРМОДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ .....	137
2.5.1. Сили взаємодії між молекулами. Агрегатні стани речовини .....	137
2.5.2. Реальні гази. Рівняння Ван дер Ваальса .....	139
2.5.3. Водяна пара в атмосфері. Вологість .....	144
2.5.4. Особливості будови та теплового руху у твердих тілах та рідинах .....	146
2.6. ПОВЕРХНЕВІ ЯВИЩА.....	157
2.6.1. Поверхневий натяг.....	157
2.6.2. Явище змочування. Крайовий кут.....	159
2.6.3. Тиск Лапласа. Капілярні явища.....	160
2.7. ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ, ЇХНІ ОСОБЛИВОСТІ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ.....	162
2.7.1. Фазові діаграми.....	163
2.7.2. Рівняння Клапейрона - Клаузіуса.....	164
2.7.3. Критична та потрійна точки .....	167
2.7.4. Кристалічні модифікації .....	168
2.8. ТЕЛОПЕРЕДАЧА .....	170
2.8.1. Теплопровідність .....	170
Запитання для самоперевірки .....	175
Розділ 3. ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ .....	177
3.1. ЕЛЕКТРОСТАТИКА.....	177
3.1.1. Електричний заряд. Закон збереження електричного заряду.....	179
3.1.3. Закон Кулона .....	180
3.1.4. Електричне поле. Напруженість електростатичного поля, принцип суперпозиції електростатичних полів .....	181
3.1.5. Теорема Гаусса для електростатичних полів та її застосування .....	183
3.1.6. Потенціал електростатичного поля, екіпотенціальні поверхні.....	186
3.1.7. Теорема про циркуляцію вектора напруженості електричного поля .....	188
3.1.8. Зв'язок між напруженістю і потенціалом електростатичного поля .....	189
3.1.9. Електричний диполь .....	190
3.1.10. Поляризація діелектриків.....	192
3.1.11. Провідники в електростатичному полі .....	196
3.1.12. Електроємність провідника і конденсатора .....	198
3.1.13. Енергія електричного поля .....	199
3.2. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ.....	201
3.2.1. Електричний струм та його характеристики.....	201
3.2.2. Сторонні сили. Електрорушійна сила і напруга .....	202
3.2.3. Опір провідників .....	204

3.2.4. Закони Ома.....	206
3.2.5. Правила Кірхгофа .....	207
3.2.6. Робота і потужність електричного струму. Закон Джоуля – Ленца.....	209
3.3. <i>МАГНІТОСТАТИКА</i> .....	211
3.3.1. Магнітне поле. Вектор індукції магнітного поля. Силові лінії магнітного поля.....	211
3.3.2. Закон Ампера.....	213
3.3.3. Закон Біо – Савара – Лапласа. Магнітне поле прямого та колового провідників зі струмом. Взаємодія струмів .....	214
3.3.4. Закон повного струму, магнітне поле соленоїду. Вихровий характер магнітного поля.....	218
3.3.5. Контур зі струмом у магнітному полі .....	222
3.3.6. Робота під час переміщення провідника і контуру зі струмом у магнітному полі .....	224
3.3.7. Сила Лоренца. Рух заряджених частинок у магнітному полі .....	227
3.3.8. Магнітне поле в речовині. Характеристики намагніченого стану. Магнетики. Феромагнетики та їхнє застосування .....	230
3.3.8. Явище електромагнітної індукції. Правило Ленца .....	233
3.3.9. Самоіндукція. Індуктивність. Перехідні процеси в електричних колах з індуктивністю .....	239
3.3.10. Взаємоіндукція. Трансформатори .....	241
3.3.11. Енергія магнітного поля струму. Енергія і густина енергії магнітного поля .....	244
3.3.12. Система рівнянь Максвелла в інтегральній і диференціальній формах .....	245
Запитання для самоперевірки.....	249
Література .....	251

## ВСТУП

Навчальний посібник «Фізика в будівництві» містить три навчальні модулі: механіку, молекулярну фізику, електрику і магнетизм, відповідно до нині чинної робочої програми з дисципліни.

Метою посібника є не тільки формування необхідної інформаційної бази для засвоєння основних понять, законів і рівнянь, що описують фізичні явища і процеси в навколишньому світі. Посібник покликаний підвищити мотивацію студентів – майбутніх будівельників до засвоєння знань з фізики.

Активізацією пізнавальної діяльності та підвищенням мотивації студентів до вивчення окремих дисциплін педагогічна наука опікується давно. Проте в сучасних умовах дотримання багатьох рекомендацій стає проблематичним. Зокрема, майже немає можливості зацікавити студентів фізичним експериментом, розв'язанням цікавих задач чи вирішенням проблемних ситуацій у фізиці. Важко також знайти достатньо часу для викладу надзвичайно цікавої та повчальної історії фізики чи відомостей про персоналії – творців фізичної науки.

Тому для підвищення мотивації до засвоєння фізичних знань студентами-будівельниками автори обрали такий підхід: посібник для них повинен стати аргументованим довідником та провідником від загальних фізичних законів до практичних завдань у будівництві. Тим більше, що на сучасному етапі в багатогранній будівельній сфері знання з фізики знаходять якнайширше застосування.

Насамперед хочемо привернути увагу студентів до того, що в будівельній сфері знання з фізики мають багатоцільове застосування. По перше, фізика у майбутніх інженерів-будівельників формує фундамент для засвоєння дисциплін загально-інженерного та спеціального циклів, таких як «Теоретична механіка», «Гідравліка», «Гідрогазодинаміка», «Електротехніка», «Електротехніка та електромеханіка», «Опір матеріалів», «Фізико-хімічні методи досліджень», «Будівельна механіка», «Технічна термодинаміка», «Будівельне матеріалознавство», «Теплогазопостачання і вентиляція», «Водопостачання», «Машини та обладнання технологічних процесів», «Фізична та колоїдна хімія», «Прикладна механіка та основи конструювання», «Метрологія, технологічні вимірювання і прилади», «Матеріалознавство та

електротехнічні матеріали» тощо, які ґрунтуються на законах класичної фізики та є звичними у підготовці інженерів чи технологів.

Слід зазначити, що у виробничу сферу невпинно впроваджуються процеси автоматизації та сучасні комп'ютерні технології. Знання з квантової фізики потрібні для засвоєння низки дисциплін, а саме: «Електроніка», «Схемотехніка ЕОМ», «Електроніка та мікросхемна техніка», «Мікропроцесорна техніка, мікроконтролери», «Теорія автоматичного керування», «Технічні засоби автоматизації», «Ідентифікація і моделювання об'єктів», «Автоматизація технологічних процесів», «Автоматизовані гідро-, пневмо- та електроприводи», «Основи збору, передачі та обробки інформації», «Автоматизовані системи діагностики та контролю», «Автоматизовані електромеханічні комплекси і системи».

Крім того, у споріднених з будівельною справою спеціальностях, таких як інженерна геодезія, землепорядкування та кадастр, застосовують найсучасніші засоби вимірювання, передавання та оброблення інформації, зокрема й космічні технології. Без знань з фізики важко засвоїти й обов'язкові для інженера спеціальні дисципліни, як-от: «Основи охорони праці», «Безпека життєдіяльності», «Метеорологія» тощо.

У посібнику вміщено відповідні посилання та наведено приклади застосування знань з фізики, що має додатково стимулювати студентів до вивчення відповідних розділів дисципліни.

Знання з фізики лежать в основі фізичних методів дослідження та контролю за параметрами як у виробництві та сертифікації матеріалів, так і в процесі їхньої експлуатації, стосовно цього в посібнику також є відповідні посилання та приклади. Загалом весь цикл будівельного виробництва може бути сферою прямого застосування фізичних законів.

# Розділ 1. МЕХАНІКА

## 1.1. ЕЛЕМЕНТИ КІНЕМАТИКИ

Найпростішою *формою руху матерії є механічних рух*, що полягає в переміщенні тіл чи їхніх частин відносно інших у просторі із плином часу.

*Механіка* – це розділ фізики, що вивчає закономірності механічного руху і взаємодії тіл. При цьому під механічною дією розуміють таку взаємодію з боку інших тіл, яка призводить до зміни стану механічного руху тіла або до його деформації.

Розвиток механіки як науки починається з III ст. до н. е., коли древньогрецький вчений Архімед (287 – 212 до н. е.) сформулював закон рівноваги важеля і закони рівноваги плаваючих тіл. Основні закони механіки були встановлені італійським фізиком і астрономом Г. Галілеєм (1564 – 1642) й остаточно сформульовані англійським ученим І. Ньютоном (1643 – 1727), тому механіку макроскопічних тіл, що рухаються з малими швидкостями (порівняно зі швидкістю світла у вакуумі  $3 \cdot 10^8$  м/с), називають *класичною*, або *ньютонівською*, *механікою*. У *релятивістській механіці* досліджується рух тіл із швидкістю, що наближається до швидкості світла. Вона ґрунтується на спеціальній теорії відносності А. Ейнштейна. Механіку мікросвіту – атомів, молекул, електронів тощо – вивчає *квантова фізика*.

Механіка складається з трьох розділів: *кінематика* вивчає рух тіл поза причинами, що цей рух зумовлюють; *динаміка* досліджує закони руху тіл і причини, які зумовлюють чи змінюють цей рух; *статику* вивчає закони рівноваги системи тіл. Якщо відомі закони руху тіл, то з них можна вивести і закони рівноваги, тому закони статички окремо від законів динаміки у фізиці не розглядаються.

У механіці для опису руху тіл залежно від умов задач застосовують різноманітні *фізичні моделі*. Найпростішою з них є *матеріальна точка* – тіло, що характеризується масою, розмірами якого в даній задачі можна знехтувати. Поняття матеріальної точки – абстрактне, але його введення полегшує розв'язання практичних задач. Наприклад, вивчаючи рух планет по орбітах навколо Сонця, можна вважати їх матеріальними точками.

Довільне макроскопічне тіло або систему тіл можна уявно поділити на малі частини, що взаємодіють між собою, кожна з яких

розглядається як матеріальна точка. Тоді вивчення руху довільної системи тіл зводиться до вивчення *системи матеріальних точок*. У механіці спочатку досліджують рух однієї матеріальної точки, а потім переходять до вивчення руху системи матеріальних точок.

Під впливом тіл одне на одного вони можуть деформуватися, тобто змінювати свою форму і розміри, тому в механіці вводиться ще одна модель – абсолютно тверде тіло. *Абсолютно твердим тілом* називається тіло, яке ні за яких умов не деформується, а відстань між двома його точками залишається постійною.

Рухаючись у просторі, тверде тіло має певні ступені свободи.

Кількість ступенів свободи ( $i$ ) – це число незалежних величин, які потрібно задати для того, щоб однозначно визначити положення тіла в просторі. У різних ситуаціях кількість ступенів свободи твердого тіла може бути різною. Якщо диск, не обертаючись, може ковзати уздовж нерухомої осі (рис. 1.1, *a*), то в

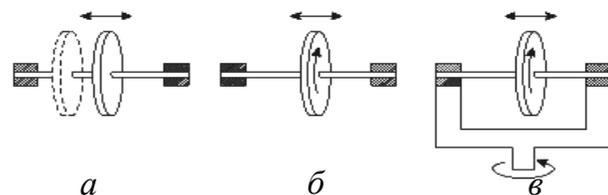


Рис. 1.1

даній системі відліку він, очевидно, характеризується лише одним ступенем свободи – положення диска однозначно визначається, скажімо, координатою  $x$  його центра, що відраховується уздовж осі.

Але якщо диск, окрім того, може й обертатися (рис. 1.1, *б*), він набуває ще одного ступеня свободи – до координати  $x$  додається кут повороту диска навколо осі. Якщо вісь з диском затиснута в рамці, яка може повертатися навколо вертикальної осі (рис. 1.1, *в*), то число ступенів свободи дорівнює трьом – до координати  $x$  додаються ще два кути повороту рамки.

Найпростіша механічна система – матеріальна точка – в тривимірному просторі має три ступені свободи, тому що її стан повністю описується трьома просторовими координатами. Прикладом тіла із трьома ступенями

свободи може бути молекула одноатомного газу (рис.1.2, *a*) (He, Ne, Ar). Система з двох матеріальних точок, жорстко пов'язаних між собою, може додатково

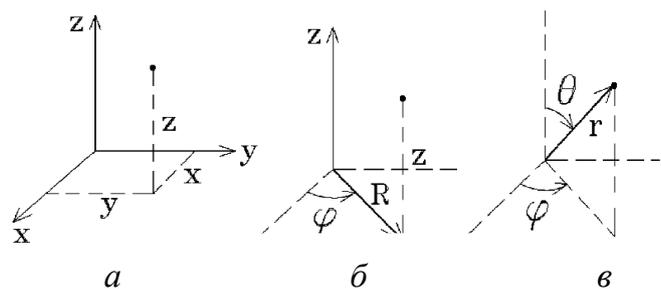


Рис. 1.2

обертатися навколо двох взаємно ортогональних осей. Отже, до трьох ступенів свободи, що характеризують координати центра мас, потрібно додати ще два ступені свободи, що характеризують обертання (рис. 1.2, б). Таким чином, двохатомні молекули газів ( $O_2$ ,  $H_2$ ,  $N_2$ ) мають кількість ступенів свободи  $i = 5$ . Три- і багатоатомні молекули газів мають кількість ступенів свободи  $i = 6$  (рис.1.2, в).

Абсолютно тверде тіло також має шість ступенів свободи, тому що для повного опису положення такого тіла досить задати три координати центра мас і три кути, що описують орієнтацію. Реальні тіла описуються великою кількістю ступенів свободи (відповідно до кількості частинок, з яких складається тіло). Однак у більшості ситуацій виявляється, що важливими є лише кілька «колективних» ступенів свободи, що характеризують рух центра мас тіла, його обертання, деформацію, макроскопічні коливання. Інші – мікроскопічні – ступені свободи не помітні окремо, а сприймаються відразу всі разом, як, наприклад, температура і тиск.

Незважаючи на те, що тіло може рухатися як завгодно складно, будь-який його рух можна представити як комбінацію поступального і обертального рухів. *Поступальний рух* – це рух, за якого будь-яка пряма, жорстко пов'язана із рухомим тілом, залишається паралельною своєму початковому положенню. *Обертальний рух* – це рух, за якого всі точки тіла рухаються по колах, центри яких лежать на одній і тій самій прямій – осі обертання.

Рух тіл відбувається у просторі і часі. Тому для опису руху матеріальної точки треба знати, в яких місцях простору ця точка знаходилась і в які моменти вона проходила те чи інше положення. Положення матеріальної точки визначається відносно якого-небудь

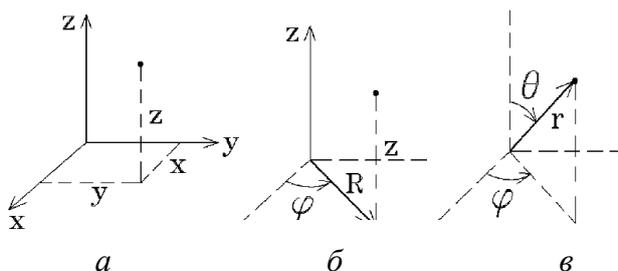


Рис. 1.3

іншого, довільно обраного тіла, що називається *тілом відліку*. Звичайно із тілом відліку пов'язують деяку систему координат: декартову (рис.1.3, а), циліндричну (рис.1.3, б), сферичну (рис.1.3, в).

Сукупність просторової системи координат, пов'язаної з тілом відліку, і синхронізованих годинників називається *системою відліку*. Найчастіше використовується

декартова система координат, тому надалі для опису руху ми будемо послуговуватися саме нею.

### 1.1.1. Переміщення, шлях, швидкість, прискорення

Розглянемо різні способи визначення положення точки.

#### Векторний спосіб опису руху

Для розв'язання деяких задач цей спосіб є найбільш раціональним. За цим способом положення точки у просторі визначається радіус-вектором  $\vec{r}$ , проведеним від початку координат до точки (рис. 1.4, а):

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Залежність радіус-вектора точки від часу називається *кінематичним рівнянням руху*. Лінія, яку описує кінець радіус-вектора разом із матеріальною точкою у просторі, називається *траєкторією руху*. Залежно від форми траєкторії розрізняють *прямолінійний* та *криволінійний* рух. Зауважимо, що форма траєкторії руху точки істотно залежить від вибору системи відліку. Наприклад, у системі відліку, пов'язаній із Сонцем, траєкторії руху планет мають форму еліпсів; у системі відліку, пов'язаній із Землею, їхні траєкторії ускладнюються і нагадують петлеподібні рухи. Точка пропелера рухомого літака із погляду пілота перебуває в коловому русі; в системі відліку, пов'язаній із Землею, її траєкторія має гвинтоподібну форму. До вибору системи відліку треба підходити, зважаючи на простоту і зручність опису в ній руху матеріальної точки. Сумарна довжина елементів траєкторії, пройдена точкою за певний проміжок часу, називається *шляхом*  $\Delta S$ .

Рух точки за час  $\Delta t$  визначається *вектором переміщення*  $\Delta \vec{r}$  (рис. 1.4, а) Цей вектор чисельно дорівнює довжині відрізка прямої, що сполучає початкове і кінцеве положення точки через час  $\Delta t$  і визначається як  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . У разі кількох послідовних переміщень

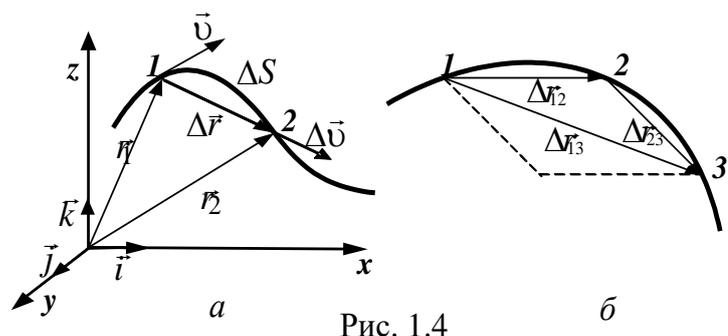


Рис. 1.4

точки сумарний вектор переміщення знаходять за правилом додавання векторів (рис. 1.4, б).

Такі величини, як переміщення, швидкість, прискорення, сила та інші, що задаються числовим значенням і напрямом та додаються за правилом паралелограма, називаються *векторними*. Величини, для визначення яких досить тільки числового значення, називаються *скалярними* (скалярами). Такими, наприклад, є час, шлях, маса.

Найважливіша кінематична характеристика руху – *швидкість*.

На практиці в описах руху часто задовольняються *середньою швидкістю*, що дорівнює шляху, пройденому за одиницю часу, тобто:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Середня швидкість не дає вичерпної інформації про рух тіла, а тому для точного опису руху вводиться поняття миттєвої швидкості. *Миттєвою швидкістю* називається векторна величина, що визначається так:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, [1 \text{ м / с}]. \quad (1.1)$$

Оскільки рух тіла можна уявити як сукупність його миттєвого перебування в послідовних точках траєкторії, миттєва швидкість характеризує швидкість тіла в кожний момент часу або в кожній точці його траєкторії. Таким чином, миттєва швидкість – це *похідна від радіус-вектора по часу*.

Одиницею вимірювання швидкості в СІ є метр за секунду (м/с); на практиці широко користуються кілометром за годину (км/год), у морській справі - вузлом (1 вузол = 1 морська миля/год = 1,853 км/год), у реактивній авіації числом  $M$  ( $1 M \approx 1200$  км/год).

Із визначення випливає, що швидкість  $\vec{v}$  завжди спрямована по дотичній до траєкторії (рис.1.4, а). У міру зменшення  $\Delta t$  шлях  $\Delta s$  все більше буде наближатися до  $|d\vec{r}|$ , тому модуль миттєвої швидкості:

$$v = |\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt},$$

де  $s$  – шлях, пройдений вздовж траєкторії. Отже, модуль миттєвої швидкості дорівнює *першій похідній шляху за часом*.

У змінному русі швидкість може змінюватися і за значенням, і за напрямом. Повну зміну швидкості за час  $\Delta t$  знаходять за векторною різницею (рис. 1.4, а):

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Для оцінювання зміни швидкості в часі введено фізичну величину, що називається *прискоренням*. У певний момент часу або в заданій точці траєкторії прискорення є межею відношення вектора зміни швидкості  $\Delta \vec{v}$  до відповідного проміжку часу  $\Delta t$ :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \quad [1 \text{ м/с}^2]. \quad (1.2)$$

Таким чином, прискорення є першою похідною від швидкості тіла за часом, або друга похідна від радіус-вектора за часом. Про напрямок вектора  $\vec{a}$  і його величину мова піде далі.

Отже, знаючи кінематичне рівняння руху, можна простим диференціюванням за часом знайти швидкість і прискорення в будь-який момент часу (так звана пряма задача кінематики). Навпаки, знаючи прискорення точки, а також початкові умови, тобто положення  $\vec{r}_0$  і швидкість  $\vec{v}_0$  в початковий момент часу  $t_0 = 0$ , можна знайти траєкторію руху точки  $\vec{r}(t)$  (обернена задача кінематики). Дійсно, із формул (1.1) і (1.2) випливає, що  $d\vec{v} = \vec{a}dt$  і  $d\vec{r} = \vec{v}dt$ , тоді:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}dt; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}dt.$$

### *Координатний спосіб опису руху*

Якщо з тілом відліку жорстко пов'язати яку-небудь координатну систему (наприклад, декартову), то положення точки в будь-який момент часу визначається трьома її координатами:  $x, y, z$ .

Проектуючи радіус-вектор на координатні осі, отримаємо три залежності координат точки від часу

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t), \quad (1.3)$$

які є кінематичними рівняннями руху в координатній формі. За цими функціями для будь-якого моменту часу можна обчислити координати точки і знайти її положення. Рівняння (1.3) по суті є рівнянням траєкторії у параметричній формі. Щоб знайти *рівняння траєкторії* у

явному вигляді, треба у системі (1.3) вилучити час (тобто знайти зв'язок між координатами в довільний момент часу).

Між *векторним та координатним способами* опису руху точки є безпосередній зв'язок, а саме: числові значення проекцій радіус-вектора рухомої точки на координатні осі системи з тим самим початком відліку дорівнюють координатам точки, тобто:

$$r_x = x = f_1(t), r_y = y = f_2(t), r_z = z = f_3(t).$$

Іншими словами, радіус-вектор можна задати через координати точки (рис. 1.5), тобто:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

де  $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$  – *орти* (одичні вектори, спрямовані вздовж відповідних координатних осей). Звідси випливає *принцип незалежності рухів*:

довільний рух точки можна розглядати як суму незалежних рухів по координатних осях  $x, y, z$ ;

– траєкторією руху точки є *годограф* радіус-вектора (крива, яку описує кінець вектора на рис. 1.5, а). Рівняння (1.3) є рівнянням *годографа*;

– вектор переміщення виражається через відповідні зміни координат рухомої точки, тобто:

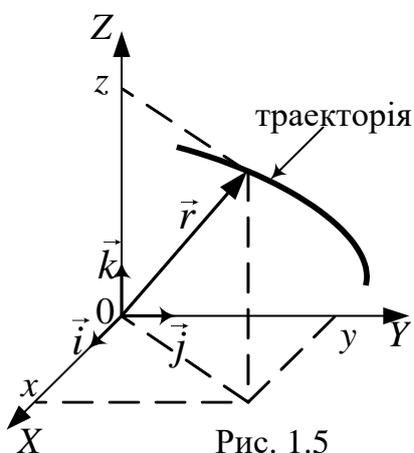
$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}.$$

Як було зазначено, за  $\Delta t \rightarrow 0$  вектор переміщення  $\Delta\vec{r}$  збігається з відповідним елементом траєкторії  $\Delta S$ , проте для довільного проміжку часу модуль кінцевого вектора переміщення і довжина пройденого шляху величини взагалі різні. Наприклад, модуль переміщення Землі відносно Сонця як системи відліку через півроку дорівнює діаметру орбіти, а через рік – нулю, тоді як пройдений шлях відповідно дорівнюватиме половині довжини й довжині орбіти.

Вектори швидкості та прискорення можуть бути вираженими у проекціях на координатні осі:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}; \quad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

де проекції швидкості і прискорення точки на координатні осі:



$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt};$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

а модулі векторів знаходять за формулою:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad \text{та} \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Елементарний пройдений шлях за заданого руху у координатах:

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{або} \quad dS = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

Звідси увесь шлях знайдемо способом інтегрування:

$$S = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt + C,$$

де константа  $C$  визначається за початковими умовами.

Таким чином, у кінематиці розв'язують задачі двох типів: на знаходження прискорення, коли відомо функції  $x = f_1(t)$ ;  $y = f_2(t)$ ;  $z = f_3(t)$  або  $v = f(t)$ , і на визначення цих функцій, коли відомі прискорення.

Задачі першого типу розв'язують методом диференціювання, другого – методом інтегрування. Наприклад, для рівномірно прискореного руху, що відбувається в напрямі осі  $Ox$ , ( $a_x = \text{const}$ ) з

виразу  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  маємо формулу:

$$dv_x = a_x dt,$$

з якої інтегруванням знаходимо відомі вирази для швидкості та координати:

$$v_x(t) = \int a_x dt = a_x t + C_1; \quad x = \int (C_1 + a_x t) dt = C_1 t + \frac{a_x t^2}{2} + C_2,$$

де  $C_1$  та  $C_2$  – сталі інтегрування. Вони визначаються з початкових умов, а саме: за  $t = 0$  маємо  $C_1 = v_0$  та  $C_2 = x_0$ . Тоді рівняння швидкості та координати матиме вигляд:

$$v_x(t) = \int a_x dt = v_0 + a_x t; \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Отже, для розв'язання кінематичних задач, окрім прискорення, мають бути задані початкові умови, тобто координати початкового положення точки  $(x_0, y_0, z_0)$  і початкова швидкість її руху  $\vec{v}_0 (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ .

У таких випадках криволінійного руху швидкість може змінюватись не тільки за величиною, а й за напрямком (рис. 1.6), тобто:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t}.$$

Тоді перший доданок називається *тангенціальним прискоренням*, яке характеризує зміну швидкості за величиною (рис. 1.7):

$$a_\tau = \frac{d|\vec{v}|}{dt},$$

а другий доданок – *нормальним прискоренням*, яке характеризує зміну швидкості за напрямком (рис. 1.7) і визначається за формулою:

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

де  $R$  – радіус кривизни траєкторії (рис. 1.7).

На рис. 1.6 відображено прискорений рух, а на рис. 1.7 – сповільнений.

Повне прискорення  $\vec{a}$  є векторною сумою тангенціального і нормального прискорень (рис. 1.7), а його модуль визначається за теоремою Піфагора:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n}; \text{ модуль } a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

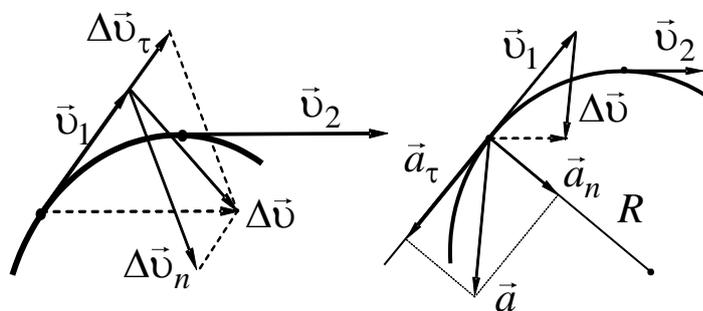


Рис. 1.6

Рис. 1.7

який рушає з місця –  $1...2 \text{ м/с}^2$ . Кутова швидкість ротора турбогенератора становить  $314 \text{ рад./с}$ , на відстані  $0,5 \text{ м}$  від осі обертання прискорення точок сягає  $\sim 5 \cdot 10^4 \text{ м/с}^2$ ; точки обода колеса велосипеда мають нормальне прискорення  $\sim 20 \text{ м/с}^2$ .

рухається по колу з нормальним прискоренням  $10^{16} \text{ м/с}^2$ ; лінійне прискорення реактивних снарядів сягає  $\sim 30 \text{ м/с}^2$ ; прискорення хокейного м'яча –  $\sim 10 \text{ м/с}^2$ ; прискорення автомобіля,

Тангенціальне і нормальне прискорення можуть бути використані для класифікації різних рухів, наприклад: 1)  $a_\tau = \text{const}$  – рівнозмінний рух; 2)  $a_\tau = 0$ ,  $a_n \neq 0$  – рівномірний криволінійний рух; 3)  $a_\tau = 0$ ,  $a_n = \text{const}$  – рівномірний рух по колу тощо.

### 1.1.2. Рух точки по колу, кутова швидкість і кутове прискорення

Поширеним різновидом криволінійного руху є рух точки по колу, коли вектор швидкості весь час змінює свій напрям ( $a_n \neq 0$ ) і може змінюватися також за модулем.

Звертаємо увагу на те, що коли обертається кілька жорстко зв'язаних точок, наприклад  $A$  і  $B$  (рис. 1.8), то вони мають різні лінійні швидкості, але всі точки за проміжок часу  $\Delta t$  зміщуються на той самий кут  $\Delta\phi$ . Тому в цілому їхній рух визначають вектором кутового зміщення  $\Delta\vec{\phi}$  (аналогічним вектору переміщення  $\Delta\vec{r}$  у поступальному русі тіла).

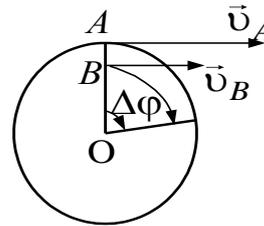


Рис. 1.8

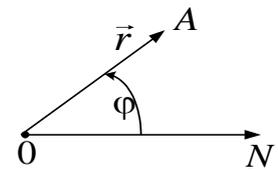


Рис. 1.9

Проте, на відміну від векторів переміщення, швидкості, прискорення й інших істинних (полярних) векторів, напрями яких очевидні, напрям вектора кутового переміщення пов'язується із напрямком обертання, а отже, такий вектор є *аксіальним, або псевдовектором*.

Для опису обертального руху (руху по колу) застосовується *полярна система координат*, яка складається з полюса (т.  $O$ ) та полярної осі (промінь  $ON$ ), а положення матеріальної точки (т.  $A$ ) визначається радіус-вектором  $\vec{r}$  та кутом  $\phi$  між полярною віссю та радіус-вектором (рис. 1.9).

Вектор кутового переміщення  $\Delta\vec{\phi}$  є вектором, модуль якого дорівнює куту повороту  $\phi$  радіус-вектора  $\vec{r}$ , спрямований він по осі обертання в бік, що визначається *правилом правого свердлика*. За цим правилом напрям вектора кутового переміщення має збігатися з поступальним рухом гвинта, якщо його головку повертати в напрямі

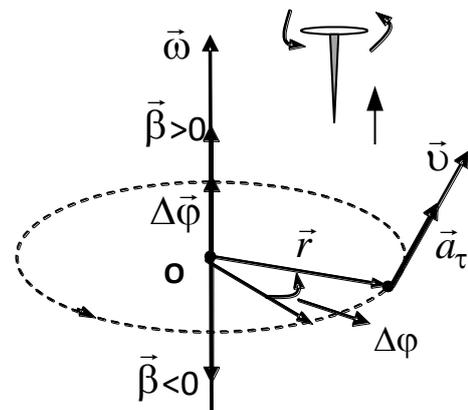


Рис. 1.10

обертання тіла (рис. 1.10).

Ще одне зауваження. Для того щоб кутові зміщення можна було задати векторами, треба, щоб вони додавалися за правилом паралелограма. Ця умова справджується лише для елементарних кутових зміщень.

Основними кінематичними величинами, що характеризують обертальний рух точки, є її кутова швидкість і кутове прискорення.

*Кутова швидкість* – векторна фізична величина  $\vec{\omega}$ , що дорівнює першій похідній кута повороту  $\Delta\vec{\phi}$  радіус-вектора  $\vec{r}$  точки за часом:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\phi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}, [1 \text{ рад} / \text{с}].$$

*Кутове прискорення* є векторною фізичною величиною  $\vec{\beta}$ , що дорівнює першій похідній кутової швидкості за часом:

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, [1 \text{ рад} / \text{с}^2].$$

Вектори кутової швидкості  $\vec{\omega}$  та кутового прискорення  $\vec{\beta}$  є також *аксіальними*, тобто спрямованими вздовж осі, їхній напрям визначається за правилом правого гвинта. Зазначимо, що напрям кутового прискорення збігається з напрямом кутової швидкості  $\vec{\omega}$  (рис. 1.10), якщо модуль кутової швидкості зростає з часом. Кутове прискорення спрямоване у протилежному напрямку до вектора кутової швидкості  $\vec{\omega}$ , якщо модуль кутової швидкості зменшується з часом.

### 1.1.3. Зв'язок кутових та лінійних величин

Для пояснення обертальних рухів зчеплених зубчастих коліс різних технічних механізмів, а також розрахунку ланцюгових та пасових передач (рис. 1.11) потрібно знати зв'язок між кутовими швидкостями ведучих і ведених зубчастих коліс або шківів ( $\omega_1$  і  $\omega_2$ ) та лінійною швидкістю точок контактних поверхонь зубчастих коліс або шківів ( $v$ ). Для цього розглянемо рис. 1.12 та виразимо кутову швидкість через лінійну.

Нехай матеріальна точка пройшла за час  $\Delta t$  по колу з радіусом  $R$  шлях  $\Delta s$ , а радіус-вектор повернувся на кут  $\Delta\phi$ . Якщо довжина шляху  $\Delta s = R \cdot \Delta\phi$ , лінійна швидкість

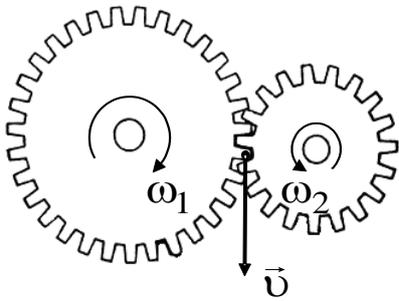
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \cdot \Delta\phi}{\Delta t} \quad \text{або} \quad v = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}, \text{ то}$$

$$v = \omega \cdot R.$$

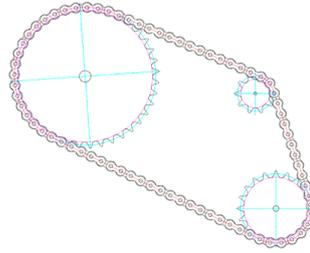
Співвідношення цих векторів виражається векторним добутком:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}].$$

Отже, лінійна швидкість – це вектор, модуль якого дорівнює  $\omega \cdot r \cdot \sin \alpha$  (де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{\omega}$  та  $\vec{r}$ ), спрямованих перпендикулярно до  $\vec{\omega}$  та  $\vec{r}$  у той бік, в який поступально переміщується гвинт, коли його головка робить найкоротший поворот



Зубчаста передача



Ланцюгова передача

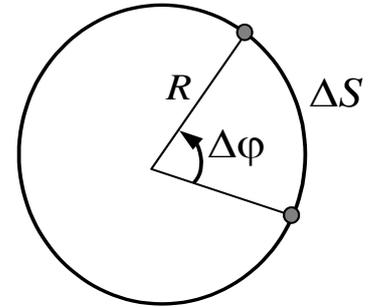


Рис. 1.12

Рис. 1.11

від  $\vec{\omega}$  до  $\vec{r}$  (рис. 1.10).

Продиференціюємо останню формулу за часом. Це дає:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right] + \left[ \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right],$$

або

$$\vec{a} = [\vec{\beta} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times \vec{v}]. \quad (1.6)$$

Перший доданок напрямлений по дотичній до траєкторії і є не чим іншим, як *тангенціальним прискоренням*:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\beta} \times \vec{r}].$$

За модулем тангенціальне прискорення можна було б пов'язати із кутовим прискоренням:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega \cdot r)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_\tau = \beta \cdot r.$$

Другий доданок у формулі (1.6) є *нормальним прискоренням*, яке напрямлене вздовж радіуса до центра обертання:

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times \vec{v}] = [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]].$$

За модулем нормальне прискорення можна записати як

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r}, \quad a_n = \omega^2 r.$$

Повне прискорення:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = r\sqrt{\beta^2 + \omega^4}.$$

Для руху по колу вводять поняття періоду та частоти обертання.

*Період* є часом, за який матеріальна точка здійснює один повний оберт, тобто радіус-вектор точки повертається на кут  $2\pi$ . Тоді у випадку рівномірного руху:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

*Частота* є кількістю повних обертів  $N$ , що здійснює матеріальна точка за одиницю часу:

$$v = \frac{N}{t}.$$

За один оберт:  $v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi v.$

Для рівноприскореного ( $\beta = \text{const}$ ) обертального руху можна записати формули визначення кутової швидкості та рівняння руху:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\beta} \cdot t; \quad \vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\beta} \cdot t^2}{2}.$$

#### 1.1.4. Плоскопаралельний рух

Плоскопаралельний рух – це такий рух твердого тіла, за якого траєкторії усіх його точок лежать в паралельних площинах.

Якщо в тілі провести деяку пряму  $O_1O_2$ , перпендикулярну до цих площин (рис. 1.13), то усі точки цієї прямої будуть рухатися по однакових траєкторіях з однаковою швидкістю та прискоренням; сама пряма буде, звичайно, зберігати свою орієнтацію в просторі. Таким чином, за плоскопаралельного руху твердого тіла достатньо розглянути рух одного з перерізів тіла.

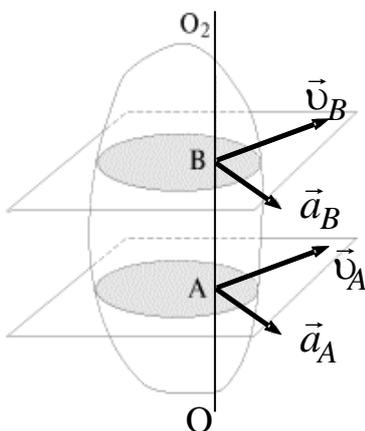


Рис. 1.13

Проаналізуємо класичний приклад плоского руху – кочення циліндра по площині

без ковзання. Розглядаючи один із перерізів циліндра з площиною, перпендикулярною його осі, ми прийдемо до відомої задачі про кочення колеса (рис. 1.14). Центр колеса рухається прямолінійно, траєкторії інших точок являють собою криві, що називаються *циклоїдами*.

За відсутності ковзання миттєва швидкість найнижчої точки колеса (точки М) дорівнює нулеві. Це дає змогу розглядати кочення колеса як суперпозицію двох рухів: поступального зі швидкістю осі  $v_0$  та обертального з кутовою швидкістю  $\omega = \frac{v_0}{R}$ , де  $R$  – радіус колеса. Більш

детальний аналіз свідчить, що швидкість будь-якої точки на рухомому колесі відносно нерухомої лабораторної системи відліку (наприклад, землі) можна представити як

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{R}], \quad (1.7)$$

де  $\vec{R}$  – радіус-вектор, проведений від центру О до точки, рух якої досліджується.

Із наведеної формули (1.7) можна дійти висновку, що в будь-який момент часу має бути така точка М, швидкість якої в лабораторній системі дорівнює нулю:  $\vec{v}_M = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{R}] = 0$ . Для цієї точки  $\vec{v}_0 = -[\vec{\omega} \times \vec{R}]$  (або за модулем  $v_M = v_0 - \omega R = 0$ ). Така точка М називається *миттєвим центром швидкостей*.

Зазначимо, що ця точка не обов'язково має належати тілу, тобто може бути й поза ним. Таким чином, плоский рух твердого тіла в певний момент часу можна представити як чисте обертання навколо осі, що проходить через точку М – така

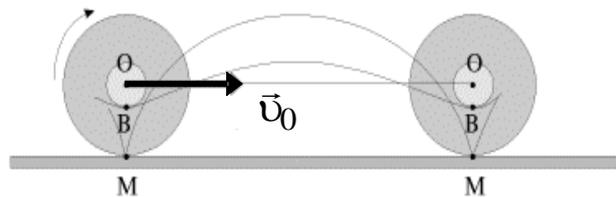


Рис. 1.14

вісь зазвичай називається *миттєвою віссю обертання*. Наприклад, для колеса, що котиться по площині без ковзання (рис. 1.14), миттєва вісь обертання проходить через точку М дотику колеса з площиною. Суттєвим є те, що в різні моменти часу миттєва вісь обертання проходить через різні точки твердого тіла і через різні точки лабораторної системи, не втрачаючи своєї орієнтації у просторі.

Правило знаходження миттєвого центру швидкостей (миттєвої осі обертання): *миттєвий центр швидкостей знаходиться на перетині перпендикулярів до швидкостей усіх точок тіла за його плоского руху.*

На рисунку 1.15 показано положення миттєвого центру швидкостей для циліндра, затисненого між двома паралельними рейками, які рухаються в один і той самий бік з різними швидкостями  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$ .

Знаючи кутову швидкість  $\omega$  і положення миттєвої осі обертання, можна легко визначити швидкість будь-якої точки тіла за його плоского руху. Наприклад, у випадку рухомого колеса, яке має швидкість  $v_0$ , (рис. 1.14) швидкість точки В буде:

$$v_B = \omega \cdot MB = \frac{v_0}{R} \cdot MB.$$

Рисунок 1.16 ілюструє розподіл швидкостей на вертикальному діаметрі колеса залізничного вагона. Миттєва вісь обертання проходить

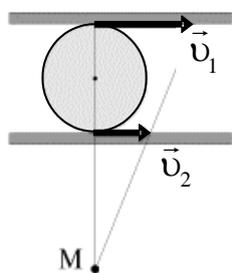


Рис. 1.15

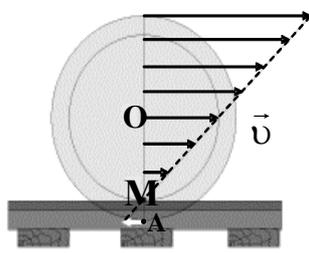


Рис. 1.16

через точку М дотику колеса з рейкою. Як видно, лінійна швидкість точки на краю реборди (т. А) спрямована в бік, протилежний руху вагона.

Таким чином, миттєвий центр швидкостей є миттєвим центром обертання, через який в певний момент часу проходить миттєва вісь обертання, а відстані від миттєвого центру швидкостей до точок плоскої фігури є миттєвими радіусами обертання в даний момент часу.

## 1.2. ДИНАМІКА ТОЧКИ ТА СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК

Якщо кінематика дає описовий рух тіл, відповідаючи на запитання, по якій траєкторії рухається тіло, то динаміка вивчає інший бік питання: чому рух відбувається саме так? Динаміка досліджує рух тіл з огляду на причини (взаємодію між тілами), які зумовлюють той чи інший характер руху.

В основу класичної (ньютонівської) механіки покладено три закони динаміки, сформульовані Ньютоном в 1687 р. у праці “Математичні начала натуральної філософії”. Закони Ньютона (як і всі

інші фізичні закони) були відкриті завдяки узагальненню великої кількості дослідних фактів.

### 1.2.1. Закони Ньютона

**Перший закон Ньютона** формулюється так: *усяке тіло перебуває в стані спокою чи рівномірного прямолінійного руху, якщо на нього не діють інші тіла.* Перший закон Ньютона справедливий не в усіх системах відліку. Система відліку, в якій справджується перший закон Ньютона, називається *інерціальною*. Тому цей закон інколи називають *законом інерції*. Система відліку, в якій перший закон Ньютона не справджується, називається *неінерціальною*. Інерціальних систем може бути багато. Будь-яка система відліку, що рухається відносно деякої інерціальної системи прямолінійно і рівномірно, є також *інерціальною*.

Таким чином, перший закон Ньютона *постулює існування інерціальних систем відліку*. Вочевидь, що інерціальна система є, власне, фізичною абстракцією (моделлю). Наприклад, система відліку, пов'язана із Землею, – *геоцентрична система відліку* – разом з планетою обертається навколо осі та рухається навколо Сонця по криволінійній траєкторії (еліпсу), отже, зазнає деякого прискорення відносно Сонця і не є інерційною. Однак прискорення такої системи надзвичайно мале (приблизно на три-чотири порядки менше за прискорення вільного падіння на поверхні Землі  $9,8 \text{ м/с}^2$ ), тому в більшості випадків ним можна знехтувати і вважати таку систему практично інерціальною.

Більш точною можна вважати інерціальною систему відліку, пов'язану із Сонцем – *геліоцентричну*. Початок координат такої системи – у центрі Сонця, а її осі спрямовані на далекі зірки. Тому питання про практичний вибір інерціальної системи відліку завжди пов'язаний із заданим ступенем точності і визначається умовами задачі.

Властивість матеріальних тіл зберігати стан спокою чи рівномірного й прямолінійного руху називається *інерцією*. Усяке тіло чинить опір за спроби зрушити його або змінити напрям чи швидкість його руху. Цю властивість називають *інертністю*. Мірою інертності тіла є його *маса*. Ньютон визначив масу як кількість речовини, що міститься в тілі. Це визначення не можна вважати вичерпним. Маса характеризує не лише інерцію матеріального тіла, але і його гравітаційні властивості:

сила притягання між двома тілами пропорційна їхнім масам. Маса визначає повний запас енергії матеріального тіла.

У класичній механіці маса тіла не залежить від вибору системи відліку, положення тіла в просторі, швидкості, дії на тіло інших тіл тощо. Маса є величиною адитивною, тобто маса тіла дорівнює сумі мас всіх його частин. Однак властивість адитивності втрачається за швидкостей, близьких до швидкості світла у вакуумі, тобто в релятивістській механіці.

### *Другий закон Ньютона*

Узагальнюючи результати дослідження Галілеєм падіння важких тіл, астрономічні закони руху планет Кеплера, дані власних досліджень, Ньютон сформулював другий основний закон динаміки, що кількісно пов'язав зміну руху матеріального тіла із силами, що її викликають. Зупинимося на аналізі цього важливого поняття.

*Силою* називають кількісну міру взаємодії тіл. Сила – це векторна величина, що характеризується напрямком, модулем. Результат дії сили залежить від точки її прикладання. Одиницею вимірювання сили в Міжнародній системі одиниць (СІ) є *ньютон*.

У природі є велика кількість сил, кожна з яких описується окремим силовим законом. Водночас усі сили в природі базуються на *чотирьох типах фундаментальних взаємодій*.

*Гравітаційними* називаються сили, що діють між усіма тілами і призводять до взаємного притягання тіл. Закон гравітаційного (всесвітнього) притягання буде розглянутий далі. Гравітаційна взаємодія є найслабкішою, і в мікросвіті сили притягання не відіграють практично ніякої ролі. Їхнє значення зростає відповідно до маси тіл, що взаємодіють. Ці сили здатні формувати стійкі утворення із сукупності тіл, наприклад, Сонячну систему, зоряні скупчення тощо.

*Слабка* взаємодія відбувається між елементарними частинками і має малий радіус дії. На відміну від гравітаційної взаємодії, слабка взаємодія зумовлює нестабільність багатьох мікроскопічних частинок, викликаючи їхній розпад, і характерна лише для певного кола квантових процесів. У макроскопічній механіці ця взаємодія не має жодного значення.

*Електромагнітна* взаємодія здійснюється між тілами, в складі яких є електрично заряджені частинки. Електромагнітна взаємодія зумовлює наявність стабільних атомів, зв'язує атоми в молекули, є

причиною взаємодії частинок газів, рідин, твердих тіл і відіграє основну роль у всіх фізико-хімічних і біологічних процесах. Електромагнітна і слабка взаємодія, власне кажучи, є проявом єдиної електрослабкої взаємодії.

*Сильна* взаємодія, яка є найбільш потужною, проявляється, зокрема, між протонами й нейтронами в атомному ядрі, між кварками в адронах. Однак ці види взаємодії проявляються за надзвичайно малих відстаней. Сили, що вивчаються в класичній механіці, можна поділити на два класи:

1) сили, що виникають за безпосереднього дотику тіл – *контактні* сили. До них належать сили пружності, сили тертя й опору середовища тощо;

2) сили, зумовлені наявністю *полів* – поля тяжіння, гравітаційного поля, електромагнітного полів тощо.

Формулювання другого закону Ньютона (в диференціальній формі) таке: *швидкість зміни імпульсу точки в інерційній системі відліку дорівнює результуючій силі, яка діє на точку:*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (1.8)$$

Другий закон не є визначенням сили; він лише вказує на зв'язок між кінематичними і динамічними величинами, даючи змогу знайти траєкторію точки, якщо відомі сили, які на неї діють. Тому його називають *рівнянням руху* точки.

Величина

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (1.9)$$

називається *імпульсом* (кількістю руху) *тіла*. Оскільки в класичній механіці маса тіла є постійною, то застосування (1.9) у рівнянні (1.8) приводить до формули:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}. \quad (1.10)$$

Таким чином, другий закон Ньютона (в інтегральній формі) формулюється так: *прискорення, надане тілу, пропорційне силі і обернено пропорційне масі тіла:*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (1.11)$$

Із рівняння (1.10) можна визначити одиницю вимірювання сили – ньютон – в системі СІ. Ньютон дорівнює силі, під дією якої тіло масою 1 кг дістає прискорення 1 м/с<sup>2</sup>: 1 Н = 1 кг·1 м/с<sup>2</sup>.

Оскільки швидкість є першою похідною від радіус-вектора за часом, то рівняння (1.10) може мати такий вигляд:  $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ .

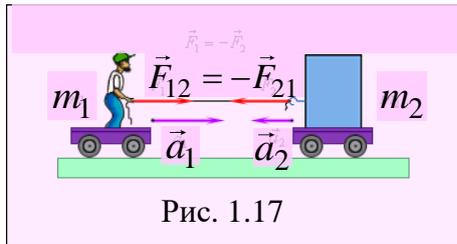
Векторне рівняння (1.10) та рівняння (1.11) можна замінити еквівалентною системою скалярних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} = F_x & & m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x \\ m \frac{dv_y}{dt} = F_y & \text{ та } & m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y \\ m \frac{dv_z}{dt} = F_z & & m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z \end{aligned} \quad (1.12)$$

Отже, основною задачею динаміки матеріальної точки є розв'язання диференціального рівняння (1.8) або системи рівнянь (1.12).

### **Третій закон Ньютона**

Будь-яка дія одного тіла на інше має характер *взаємодії*: якщо тіло 1 діє на тіло 2 із силою  $F_{21}$ , то і тіло 2 теж діє на тіло 1 із силою  $F_{12}$ .



Згідно з третім законом Ньютона *сили взаємодії двох тіл рівні за величиною, протилежні за напрямком і спрямовані вздовж однієї прямої, що з'єднує тіла* (рис. 1.17), тобто  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ .

Особливістю заданих сил є те, що обидві сили прикладені до різних тіл та мають однакову природу.

Третій закон Ньютона справджується не завжди, більш строго – у випадках контактної взаємодії (за безпосереднього дотику тіл), а також у разі взаємодії віддалених одне від одного тіл, що перебувають у спокої. Обмежене застосування третього закону Ньютона зумовлене тим, що рівність сил має бути дотримана в *один і той самий момент часу*. Оскільки взаємодія передається із кінцевою швидкістю, третій закон Ньютона є справедливим лише у разі досить тривалої взаємодії. Третій закон не поширюється на випадки релятивістської взаємодії, оскільки поняття одночасності в релятивістській фізиці є відносним. Зокрема,

сформульований в наведений формі третій закон Ньютона не поширюється на випадки електромагнітної взаємодії.

### 1.2.2. Принцип відносності Галілея

Оскільки перший закон постулює існування інерціальних систем відліку, знайдемо зв'язок між законами руху одного і того ж тіла в різних інерціальних системах відліку. Для цього розглянемо дві системи відліку (рис. 1.18): інерціальну нерухому систему  $K$  і систему  $K'$ , що рухається відносно системи  $K$  із постійною швидкістю  $\vec{v}_0$ . Оберемо координатні осі обох систем так, щоб осі  $x$  та  $x'$  збігалися, а осі  $y$  і  $y'$ , а також  $z$  і  $z'$  були паралельні одна одній. Припустимо, що в момент  $t$  рухома точка знаходиться в положенні  $A$ . За цей же час початок координат  $O'$  системи  $K'$  змістився на відстань  $\vec{r}_0 = \vec{v}_0 t$  від початку координат  $O$  системи  $K$ . Тоді радіус-вектор будь-якої точки  $A$  у моменти часу  $t$  і  $t'$  у системах  $K$  і  $K'$  пов'язані простими співвідношеннями:

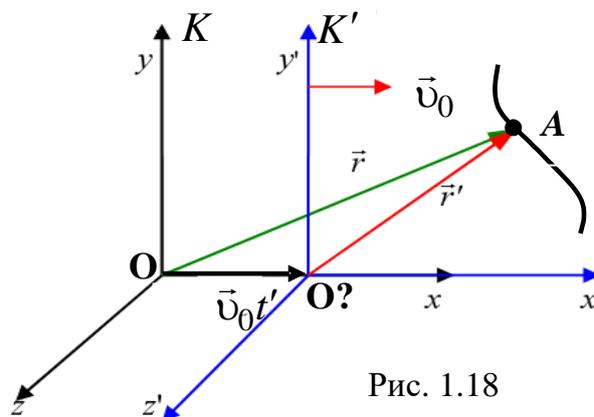


Рис. 1.18

Тоді радіус-вектор будь-якої точки  $A$  у моменти часу  $t$  і  $t'$  у системах  $K$  і  $K'$  пов'язані простими співвідношеннями:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t', \quad t = t'. \quad (1.13)$$

У проекціях на координатні осі співвідношення (1.12) буде таким:

$$x = x' + v_0 t', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (1.14)$$

Формули (1.13) та (1.14) називаються *перетвореннями Галілея*.

Диференціюючи співвідношення (1.13) за часом, отримаємо:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{v}_0 \quad \text{або} \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0, \quad (1.15)$$

де  $\vec{v}$  – швидкість точки в системі  $K$ , а  $\vec{v}'$  – в системі  $K'$ .

Формула (1.15) відображає *класичний закон додавання швидкостей*.

Диференціюючи вдруге, отримаємо:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_0}{dt}.$$

Оскільки швидкість рухомої системи  $K'$  відносно нерухомої  $K$  є постійною ( $\vec{v}_0 = \text{const}$ ), то залишається:

$$\vec{a} = \vec{a}' , \quad (1.16)$$

де  $\vec{a}$  – прискорення точки в системі  $K$ ,  $\vec{a}'$  – прискорення тієї ж точки в системі  $K'$ . Отже, прискорення в обох системах відліку є однаковим, тобто *інваріантним відносно перетворень Галілея*.

Оскільки маса, як і прискорення, теж є незмінною в усіх інерціальних системах відліку, то згідно з рівнянням (1.16) не повинна змінюватися і результуюча сила, що діє на тіло. У цьому полягає основний постулат класичної механіки, який називається *класичним галілеєвським принципом відносності: рівняння руху класичної динаміки є однаковими в усіх інерціальних системах відліку, тобто усі інерціальні системи відліку еквівалентні (рівноправні) стосовно механічних явищ*.

Або інакше: *знаходячись всередині ізолюваної інерціальної системи відліку, жодними механічними дослідженнями не можна визначити, рухається система рівномірно і прямолінійно чи перебуває у стані спокою*.

### 1.2.3. Закон динаміки системи матеріальних точок

Третій закон Ньютона в поєднанні із другим та третім законами дає змогу перейти від динаміки окремої матеріальної точки до динаміки довільної механічної системи.

Поставимо задачу опису руху системи матеріальних точок. Матеріальні точки, що належать до матеріальної системи, можуть взаємодіяти одна з одною (внутрішні сили), а також з матеріальними точками, що не належать до системи (зовнішні сили). Якщо зовнішніх сил немає або вони взаємно скомпенсовані, система матеріальних точок називається *замкненою, або ізолюваною*. Те саме є справедливим і для твердого тіла, оскільки його можна змодельовати як систему з  $n$  матеріальних точок. Якщо тіло абсолютно тверде, його модель являє собою незмінну систему матеріальних точок.

Розглянемо систему  $n$  матеріальних точок масою  $m_i$  кожна, що мають імпульси  $\vec{p}_i$ . Загалом на довільну  $i$ -ту матеріальну точку системи діють:

а) внутрішні сили з боку матеріальних точок, що належать до системи:

$$\vec{f}_i = \sum_{k=1}^{n-1} \vec{f}_{ik} ,$$



Зважаючи на те, що похідна від суми дорівнює сумі похідних від кожної величини, що входить до суми, рівняння (1.19) можна перетворити до такого вигляду:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \text{ або } \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (1.20)$$

де величина  $\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$  називається імпульсом системи  $n$  матеріальних

точок,  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  – векторна сума усіх зовнішніх сил, прикладених до

усіх матеріальних точок системи.

#### 1.2.4. Закон збереження імпульсу

Якщо система матеріальних тіл замкнена (ізольована), то векторна сума усіх зовнішніх сил, прикладених до усіх матеріальних точок системи, дорівнює нулю:  $\vec{F} = 0$ . Тоді із співвідношення (1.20) випливає:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \text{ або } \vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{const}. \quad (1.21)$$

Співвідношення (1.21) виражає **закон збереження імпульсу**: у замкненій системі імпульс окремої матеріальної точки може змінюватися, але сумарний імпульс системи матеріальних точок залишається постійним.

Зазначимо, що імпульс залишається постійним і для незамкненої системи за умови, що зовнішні сили в сумі дають нуль. У випадку, коли сума зовнішніх сил не дорівнює нулю, але проекція цієї суми на деякий напрям – нуль, то зберігається складова імпульсу у цьому напрямку. Дійсно, спроектувавши усі величини рівняння (1.20) на деякий напрям  $x$ , отримаємо:

$$\frac{dp_x}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{xi}.$$

Тоді за  $\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0$  маємо:

$$\frac{dp_x}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = \sum_{i=1}^n p_{xi} = \text{const}.$$

Отже, доходимо висновку, що в природі є такі величини, що визначають стан системи матеріальних точок, які в разі ізольованості системи від зовнішніх сил залишатимуться постійними в процесі руху системи. Такі незмінні з плином часу величини називаються *інтегралами руху*. Таким чином, *імпульс є першим інтегралом руху*.

Як довела німецький математик Емма Нетер, будь-який закон збереження пов'язаний із певною симетрією в навколишньому світі. Зокрема, згідно з *теоремою Нетер закон збереження імпульсу впливає з однорідності простору*, тобто із незалежності усіх законів, що описують систему матеріальних точок, від паралельного переносу системи відліку.

### 1.2.5. Центр мас (інерції) системи матеріальних точок.

#### Теорема про рух центра мас

Рівняння (1.21) формально подібне до рівняння руху однієї матеріальної точки, однак має інший зміст. Фактично це рівняння містить  $n$  рівнянь руху матеріальних точок системи. Але *рух усієї системи можна описати одним рівнянням, формально подібним до рівняння руху однієї матеріальної точки, якщо ввести поняття центра мас (або центра інерції) системи матеріальних точок*.

Для того щоб ввести поняття центра мас, розглянемо систему, що складається із двох матеріальних точок з масою  $m_1$  та  $m_2$  (рис. 1.19).

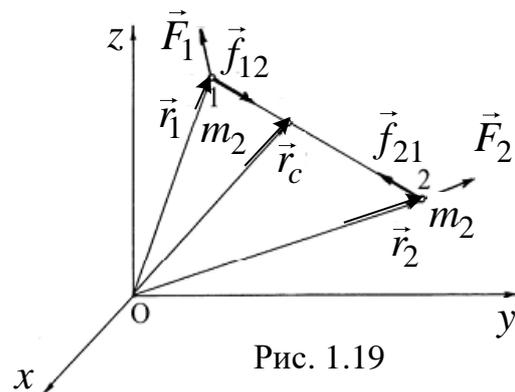


Рис. 1.19

Рівняння руху матеріальних точок цієї системи мають вигляд:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{f}_{12} + \vec{F}_1 \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{f}_{21} + \vec{F}_2 \end{cases} \quad (1.22)$$

Від додавання лівих і правих частин системи (1.22) маємо:

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}. \quad (1.23)$$

Зважаючи на те, що  $\vec{a}_1 = \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2}$  і  $\vec{a}_2 = \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}$ , рівняння (1.23)

перетворимо до вигляду:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{F},$$

або 
$$\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = \vec{F}. \quad (1.24)$$

Це рівняння збіглося б із рівнянням руху однієї уявної точки  $C$  (рис. 1.19), маса якої визначається як сума  $m = m_1 + m_2$ , а положення у просторі задовольняло б умові:

$$m \vec{r}_C = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2.$$

Рівняння руху точки  $C$  можна записати, виходячи з аналогії із рівнянням (1.24):

$$\frac{d^2}{dt^2} (m \vec{r}_C) = m \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = \vec{F}. \quad (1.25)$$

Рівняння (1.25) справедливе, якщо радіус-вектор точки  $C$  визначається рівнянням:

$$\vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

тобто точка  $C$  розміщена на прямій лінії, що з'єднує точки 1 та 2, і ділить цю пряму на відрізки, обернено пропорційні масам точок  $m_1$  і  $m_2$ . Ці міркування можна поширити на систему, що складається із довільної кількості  $n$  матеріальних точок. Радіус-вектор точки  $C$  визначатиметься так:

$$\vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (1.26)$$

де  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  – маса системи матеріальних точок.

Точка  $C$ , радіус-вектор якої задовольняє рівняння (1.26), називається *центром мас*, або *центром інерції* системи матеріальних точок. У проєкціях на відповідні осі можна записати:

$$x_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i; \quad y_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i y_i; \quad z_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i.$$

Швидкість руху центра мас можна виразити як похідну за часом від радіус-вектора центра мас системи:

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i.$$

Відповідно прискорення центра мас системи визначається як похідна від швидкості центра мас системи за часом:

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.27)$$

Із співвідношення (1.27) випливає рівняння руху центра мас:

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}, \quad (1.28)$$

де  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  – векторна сума усіх зовнішніх сил, прикладених до усіх

матеріальних точок системи. Вираз (1.28) відображає *теорему про рух центра мас: центр мас системи матеріальних точок рухається так, як рухалася б одна матеріальна точка масою  $m$ , рівною масі системи, під дією результуючої сили  $\vec{F}$ , рівної сумі усіх зовнішніх сил, прикладених до усіх матеріальних точок системи.*

Із рівняння (1.28), зокрема, випливає: якщо  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F} = 0$ , то

$\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = 0$ , тобто за відсутності зовнішніх сил центр системи матеріальних точок рухається прямолінійно і рівномірно або перебуває у спокої.

Розглянемо деякі особливості динаміки системи матеріальних точок:

1) можна довести, що положення центра мас у класичній механіці не залежить від вибору системи відліку;

2) імпульс центра мас дорівнює векторній сумі імпульсів усіх матеріальних точок системи:

$$\vec{p}_C = m\vec{v}_C = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i.$$

Система відліку, початок координат якої збігається із центром мас системи, називається системою центра мас, або Ц-системою. В

системі центра мас  $\vec{r}_C = 0$ , тому  $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = 0$ ;  $\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = 0$ . Отже,

$\vec{p}_C = m\vec{v}_C = 0$ . Таким чином, векторна сума імпульсів матеріальних

точок системи відносно центра мас дорівнює нулю:  $\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = 0$ . Перехід

до системи центра мас інколи буває дуже зручним для розгляду, наприклад, процесів пружного зіткнення і розсіяння частинок. У такому випадку аналіз зіткнення значно спрощується, отримані результати можна інтерпретувати геометрично за допомогою діаграм;

3) якщо гравітаційне поле Землі є однорідним, тобто прискорення вільного падіння усіх точок тіла однакове ( $\vec{g} = \text{const}$ ), то центр мас тіла збігається з центром тяжіння (ЦТ):

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \frac{1}{mg} \sum_{i=1}^n m_i g \cdot \vec{r}_i = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^n F_i \cdot \vec{r}_i = \vec{r}_{\text{ЦТ}},$$

де  $F = mg = g \sum_{i=1}^n m_i$ .

Далі буде показано, що положення центра мас визначає стійкість будівельних конструкцій, машин, кранів тощо до перекидання, тому це треба брати до уваги під час їхнього проектування.

### 1.2.6. Рух тіл змінної маси

Відомо багато випадків, коли маса тіла змінюється в процесі руху внаслідок безперервного відокремлення або приєднання речовини (це, зокрема, стосується ракети, реактивного літака, рухомої баржі, яку навантажують піском, чи швидкої вагонетки, в яку досипають щебінь, тощо). Виявляється, що закони руху тіл змінної маси можна вивести, спираючись на закон збереження імпульсу. Для цього як приклад розглянемо політ ракети у космос (рис. 1.20). Записавши закон збереження імпульсу для системи «ракета-паливо», можна отримати рівняння руху ракети:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} (\vec{v}_r - \vec{v}). \quad (1.29)$$

Рівняння (1.29), яке називається *рівнянням Мещерського*, описує реактивних рух ракети. У цьому рівнянні  $\vec{F}$  може бути будь-якою зовнішньою силою.

Доданок  $\frac{dm}{dt}(\vec{v}_r - \vec{v}) = \vec{F}_p$  – називається *реактивною силою*, швидкість витікання газів відносно ракети  $\vec{v}_e = (\vec{v}_r - \vec{v})$  – відносною швидкістю. Таким чином, можна дійти висновку про те, що реактивна сила тим більша, чим більша швидкість згорання палива  $\frac{dm}{dt}$  і чим більша відносна швидкість  $\vec{v}_e = (\vec{v}_r - \vec{v})$ .



Рис. 1.20

Розглянемо приклад руху ракети завдяки лише реактивній силі тяги двигуна. У цьому випадку рівняння її руху матиме такий вигляд:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v}_e.$$

Спроекувавши це рівняння на вертикальну вісь та проінтегрувавши, отримаємо:

$$v = -v_a \ln(m) + C. \quad (1.30)$$

Константу  $C$  знайдемо з початкових умов:  $t = 0, v = 0, m = m_0$ , де  $m_0$  – початкова (стартова) маса ракети. Тоді  $C = v_a \ln(m_0)$ . Отже, рівняння (1.30) набуде вигляду:

$$v = v_a \ln(m_0 / m) \quad \text{або} \quad m_0 / m = e^{v/v_a}. \quad (1.31)$$

Рівняння (1.31) називається *формулою Циолковського*. Це рівняння дає змогу обчислити стартову масу палива, потрібну для того, щоб ракета досягла наприкінці польоту швидкості  $v$ .

### 1.2.7. Сили інерції. Рух у неінерціальних системах відліку

*Неінерціальною системою відліку* називається будь-яка система відліку, яка рухається з прискоренням відносно інерціальної, наприклад потяг, що починає рухатися або гальмує, автомобіль, який завертає на повороті шосе, ракета, що злітає з космічним апаратом, Земля, яка обертається тощо. Для з'ясування процесів, що відбуваються в неінерціальних системах відліку, обмежимося розглядом простих випадків.

Приклад 1: система, що рухається прямолінійно і прискорено.

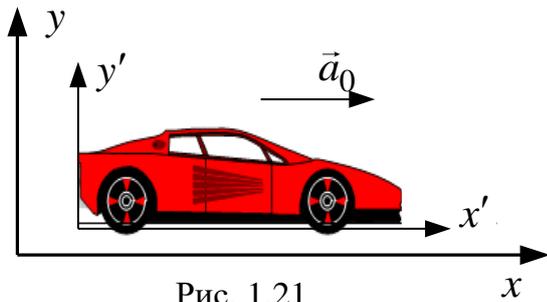


Рис. 1.21

Припустимо, що система  $x', y'$  (наприклад, автомобіль) рухається прискорено відносно нерухомої системи  $x, y$  (рис. 1.21). Це означає, що в нерухомій системі відліку

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (1.32)$$

де  $F$  – сила, що викликає прискорення.

У системі автомобіля рух будь-якого тіла описується рівнянням  $md^2x' / dt^2 = F'$ . Але швидкості в обох системах відліку пов'язані:  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$  (1.15).

З цього випливає  $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$ . Отже, закон руху тіл відносно прискореного автомобіля:

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_0 = \vec{F} - m\vec{a}_0. \quad (1.33)$$

Таким чином, із порівняння формул (1.32) та (1.33) видно, що в прискореному автомобілі на тіла діє додаткова сила  $\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$ , яка називається *силою інерції*. Отже, для того, щоб другий закон Ньютона поширити на неінерціальну систему, його можна дещо “підправити”, ввівши силу інерції. Введення сил інерції дає можливість описувати рух тіл у будь-яких (як інерціальних, так і неінерціальних) системах відліку за допомогою одних і тих самих рівнянь руху.

Наведемо особливості сил інерції.

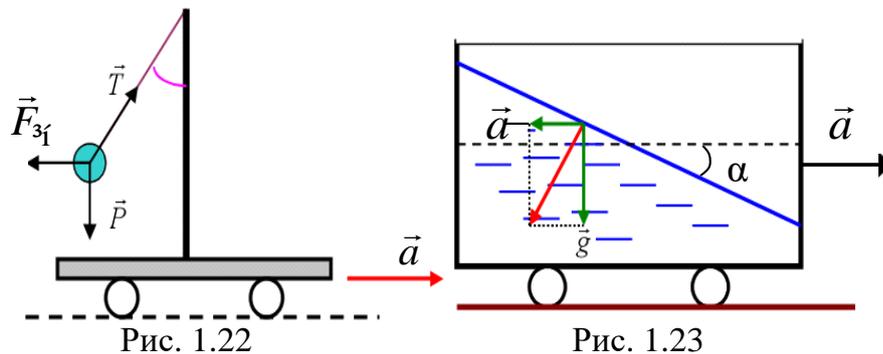
- Сили інерції не інваріантні відносно переходу з однієї системи відліку до іншої.
- Сили інерції не підлягають закону рівності дії і протидії. Якщо на якесь тіло діє сила інерції, то немає сили протидії, що була б прикладена до іншого тіла.
- Сили інерції не можна ставити в один ряд із такими силами, як пружні, гравітаційні та сили тертя. Сили інерції зумовлені властивостями тієї системи відліку, в якій розглядаються механічні явища. У цьому сенсі їх можна назвати *фіктивними силами*. Вони існують тільки в неінерційних системах відліку і спрямовані в бік, протилежний прискоренню системи.

Введення в розгляд сил інерції не є обов'язковим. Взагалі, будь-який рух тіла можна завжди розглядати відносно інерціальної системи відліку. Однак часто важливим видається саме рух тіл відносно неінерціальної системи відліку, наприклад, відносно земної поверхні. Використання сил інерції дає можливість розв'язати відповідну задачу безпосередньо відносно такої системи відліку, що часто виявляється значно простішим, ніж розглядати рух в інерціальній системі.

Багато явищ інтерпретується як прояв сил інерції у прискореній системі відліку, що рухається поступально. Прикладом може бути:

а) прискорений рух потяга (рис. 1.22). Вантаж, підвішений на нитці у вагоні, відхиляється під час руху потяга. Рух вантажу можна розглядати в інерціальній системі відліку. Рівняння руху –  $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$ . Із цього рівняння можна знайти, зокрема, кут відхилення нитки. Однак цей вантаж можна розглядати і в неінерціальній системі відліку, пов'язаній із вагоном, відносно якого вантаж перебуває у спокої. Тоді рівняння динаміки буде таким  $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_i = 0$ , де  $\vec{F}_i = -m\vec{a}$ ;

б) вода в рухомій цистерні (рис. 1.23). За прискореного руху цистерни рівень води встановиться під деяким кутом  $\alpha$  до горизонту. Причому кут нахилу визначається силою інерції  $\vec{F}_i = -m\vec{a}$ , тобто залежить від прискорення  $\vec{a}$  цистерни:  $\text{tg}\alpha = a / g$ . Зазвичай рівень води встановиться так, щоб поверхня була перпендикулярною до напрямку



рівнодійної сили  $\vec{F} = m\vec{g} - m\vec{a}$ .

*Приклад 2:* система відліку обертається з постійною кутовою швидкістю.

Згідно із рівняннями кінематики прискорення тіла в обертовій системі визначається так:

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2[\vec{\omega} \times \vec{v}'] - [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] = \vec{a} + 2[\vec{v}' \times \vec{\omega}] + [\vec{\omega} \times [\vec{r} \times \vec{\omega}]].$$

Отже, рівняння руху матиме такий вигляд:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + 2m[\vec{v}' \times \vec{\omega}] + m[\vec{\omega} \times [\vec{r} \times \vec{\omega}]],$$

де сила  $\vec{F}_{\text{вц}} = m[\vec{\omega} \times [\vec{r} \times \vec{\omega}]]$  називається відцентровою силою інерції; за модулем вона дорівнює  $F_{\text{вц}} = m\omega^2 r$ . Інша сила  $\vec{F}_{\text{к}} = 2m[\vec{v}' \times \vec{\omega}]$ , яка виникає під час руху тіла відносно обертової системи відліку, називається *коріолісовою силою інерції*, або *силою Коріоліса*.

Проілюструємо прояв сили Коріоліса на Землі.

У північній півкулі сила Коріоліса спрямована вправо відносно руху, тому праві береги річок у північній півкулі є крутими – їх підмиває вода під дією цієї сили. У південній півкулі все відбувається навпаки.

Снаряд від пострілу із гармати уздовж меридіана на північ відхилятиметься на схід у північній півкулі і на захід – у південній. У разі пострілу уздовж екватора сили Коріоліса притискуватимуться снаряд до Землі, якщо постріл був виконаний у напрямку на захід, і піднімати його догори, якщо постріл виконано у східному напрямку.

### 1.3. ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

#### 1.3.1. Момент сили та момент імпульсу

Досі ми розглядали випадки поступального руху тіл під дією сил.

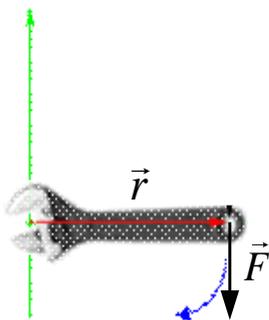


Рис. 1.24

На практиці часто трапляються випадки, коли сили викликають не поступальний, а обертальний рух тіла навколо якої-небудь осі (рис. 1.24), створюючи обертовий ефект. Величина обертового ефекту (дії) оцінюється моментом сили відносно точки (осі). Таким чином, аналогом дії сили в поступальному русі виступає момент сили в обертальному русі і, відповідно, за аналогією до імпульсу в динаміці обертового руху вводиться поняття моменту імпульсу.

Слід розрізняти моменти цих векторів відносно точки та відносно осі. Момент вектора *відносно точки* і *відносно осі* – різні поняття, хоча і пов'язані між собою. Моментом вектора *відносно точки* є сам вектор. Момент цього ж вектора *відносно осі* є його проекцією на цю вісь

відносно точки, що лежить на цій осі. Отже, момент вектора відносно осі вже не є вектором. Розглянемо моменти відносно точки.

Моментом імпульсу  $\vec{L}$  відносно точки  $O$  (початку) називається векторний добуток радіус-вектора  $\vec{r}$ , проведеного із цієї точки  $O$  до матеріальної точки, на імпульс точки  $\vec{p}$ :

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}]. \quad (1.34)$$

Вектор  $\vec{L}$  перпендикулярний до площини векторів  $\vec{r}$  та  $\vec{p}$ , напрям  $\vec{L}$  визначається згідно з правилом правого свердлика (рис. 1.25). Модуль вектора  $\vec{L}$  дорівнює:

$$L = rp \sin \alpha = lp,$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{r}$  і  $\vec{p}$ ,  $l = r \sin \alpha$  плече вектора  $\vec{L}$  відносно точки  $O$  (рис. 1.25).

Моментом сили відносно нерухомої точки  $O$  (початку) називається векторний добуток радіус-вектора  $\vec{r}$ , проведеного із цієї точки  $O$  в точку прикладання сили  $\vec{F}$ , на цю силу:

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}].$$

Напрям вектора  $\vec{M}$  визначається аналогічно до вектора  $\vec{L}$ . Модуль вектора  $\vec{M}$  дорівнює (рис. 1.26):

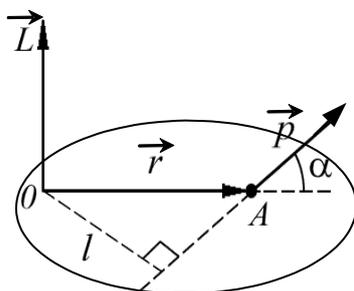


Рис. 1.25

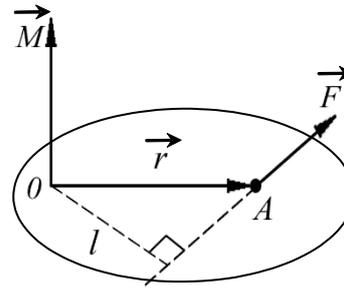


Рис. 1.26

$$M = lF.$$

У випадку дії на точку декількох ( $n$ ) сил результуюча сила дорівнює  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$ . Тоді на основі властивості векторного добутку можна записати:

$$[\vec{r} \cdot \vec{F}] = [\vec{r} \cdot \vec{F}_1] + [\vec{r} \cdot \vec{F}_2] + \dots + [\vec{r} \cdot \vec{F}_n].$$

Це означає, що *момент рівнодійної декількох сил відносно деякого початку дорівнює геометричній сумі моментів складових сил відносно того ж початку.*

### 1.3.2. Рівняння моментів

Доцільність введення цих двох понять пояснюється тим, що моменти імпульсу і сили пов'язані між собою важливим співвідношенням, яке можна вивести із рівнянь Ньютона.

Припустимо, що початок  $O$  нерухомий. Продиференціюємо вираз (1.34) за часом:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{p} \right] + \left[ \vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \right].$$

Оскільки початок нерухомий, то похідна  $d\vec{r}/dt$  є швидкістю матеріальної точки, що пов'язана з її імпульсом як  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Тому перший доданок дорівнює нулю:

$$\left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{p} \right] = [\vec{v} \cdot m\vec{v}] = m[\vec{v} \cdot \vec{v}] = 0.$$

Друге рівняння запишемо відповідно до закону Ньютона  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ .

У підсумку отримаємо  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[ \vec{r} \cdot \vec{F} \right]$  або  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ . (1.35)

Співвідношення (1.35) називається рівнянням моментів: *похідна за часом моменту імпульсу матеріальної точки відносно нерухомого початку дорівнює моменту діючої сили відносно того ж початку.* Для виведення формули не припускалося, що маса точки  $m$  залишається постійною, тому остання рівність справедлива також і в релятивістській механіці, тобто за будь-якої великої швидкості, що наближається до швидкості світла.

Рівняння (1.35), виведене для однієї матеріальної точки, можна узагальнити для довільної системи матеріальних точок. У цьому випадку *моментом імпульсу системи відносно деякого початку називається векторна сума моментів імпульсів усіх матеріальних точок системи відносно того ж початку.* За момент сил  $\vec{M}$  слід взяти момент усіх зовнішніх сил, що діють на систему. Таким чином, *похідна за часом від моменту імпульсу системи матеріальних точок відносно довільного*

нерухомого початку дорівнює геометричній сумі моментів усіх зовнішніх сил відносно того ж початку.

Якщо момент зовнішніх сил відносно нерухомого початку  $O$  дорівнює нулю, то із рівняння (1.35) випливає, що момент імпульсу системи відносно того ж початку залишається постійним за часом. Це положення називається *законом збереження моменту імпульсу*. Закон збереження моменту імпульсу, як і закон збереження імпульсу та енергії, є одним з важливих фундаментальних законів фізики. Зокрема, виведений в класичній фізиці, цей закон застосовується в узагальненому вигляді в атомній фізиці. Окрім того, момент імпульсу можуть мати не лише частинки, а й силові поля, наприклад, електромагнітне поле. Згідно з теоремою Емми Нетер закон збереження моменту імпульсу випливає з ізотропності простору.

### 1.3.3. Рівняння моменту імпульсу для обертання навколо нерухомої осі. Момент інерції

Векторне рівняння (1.35) еквівалентне трьом скалярним рівнянням:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z,$$

де  $M$  – момент зовнішніх сил.

Моментом імпульсу  $L_z$  системи матеріальних точок відносно осі  $z$  називається проекція на цю вісь вектора моменту імпульсу системи відносно будь-якого початку, вибраного на даній осі (рис. 1.27). Моментом сили  $M_z$  відносно тієї ж осі  $z$  називається проекція на цю вісь вектора моменту сили відносно довільного початку, що належить цій осі. Коли момент зовнішніх сил відносно якоїсь нерухомої осі дорівнює нулю, то момент імпульсу системи відносно тієї ж осі залишається постійним. Це – закон збереження моменту імпульсу відносно нерухомої осі. При цьому сам вектор  $\vec{L}$  може змінюватися.

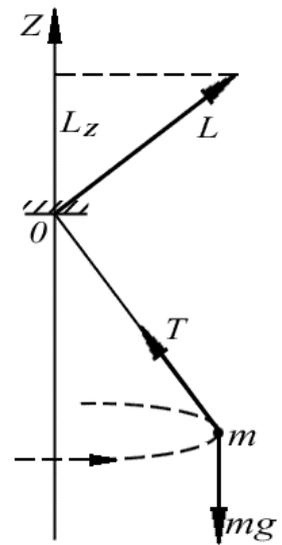


Рис. 1.27

*Приклад.* Невелике тіло маси  $m$ , підвішене на нитці, рівномірно обертається в горизонтальній площині (рис. 1.27) під дією сили тяжіння

$m\vec{g}$  і сили натягу нитки  $\vec{T}$ . Відносно точки О момент імпульсу тіла – вектор  $\vec{L}$  – знаходиться в одній площині із віссю  $z$  та ниткою. Під час руху тіла вектор  $\vec{L}$  під дією моменту  $\vec{M}$  сили тяжіння весь час повертається, тобто змінюється. Але проекція  $L_z$  залишається при цьому незмінною, оскільки вектор  $\vec{M}$  перпендикулярний до осі  $z$ , тобто  $M_z = 0$ .

Застосуємо рівняння моментів відносно осі до аналізу обертального руху твердого тіла. За нерухому вісь оберемо *вісь обертання*. Для цього уявимо тіло як сукупність матеріальних точок. Момент імпульсу окремої матеріальної точки (рис. 1.28), що обертається по колу з радіусом  $r$  відносно осі обертання,  $L = m\omega r$ , лінійна швидкість  $v$  пов'язана з кутовою швидкістю  $\omega$  як  $v = \omega r$ . Отже,  $L = mr^2\omega$ .

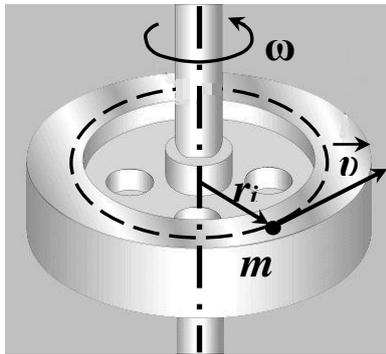


Рис. 1.28

Під час обертання навколо осі системи матеріальних точок, на які поділене тверде тіло, визначається їхня сума:  $L = \sum mr^2\omega$ . Оскільки кутова швидкість обертання твердого тіла однакова для усіх точок, її можна винести з-під знаку суми. Тоді отримаємо:

$$L = \omega \sum mr^2. \quad (1.36)$$

Величину

$$I = \sum mr^2$$

називають *моментом інерції* тіла (системи матеріальних точок) відносно осі обертання. Рівняння (1.92) набуде вигляду:

$$\frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = \vec{M}. \quad (1.37)$$

Рівняння (1.37) виражає *основний закон динаміки обертального руху навколо нерухомої осі*. Воно нагадує рівняння Ньютона для поступального руху тіла, у якому масою є момент інерції  $I$ , роль лінійної швидкості виконує кутова швидкість  $\omega$ , роль сили – момент сили  $M$ , роль імпульсу – момент імпульсу  $L$ .

Якщо момент зовнішніх сил  $M$  відносно осі обертання дорівнює нулю, то момент імпульсу  $I\omega$  зберігається, тобто

$$M = 0 \quad \Rightarrow \quad I\vec{\omega} = \text{const}.$$

Під час обертання навколо осі твердого тіла момент інерції відносно осі обертання, на відміну від кутової швидкості, не змінюється. Тоді рівність (1.37) можна записати як

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\beta} = \vec{M},$$

де  $\beta$  – кутове прискорення тіла.

#### 1.3.4. Приклади, що ілюструють закон збереження моменту імпульсу

Закон збереження моменту імпульсу можна продемонструвати на так званій лаві Жуковського, що являє собою диск, який може вільно обертатися навколо вертикальної осі (рис. 1.29). Демонстратор на лаві, відштовхнувшись ногою від підлоги, надає їй обертового руху. Разом із лавою обертається і він сам. Знехтувавши силою тертя й опором повітря, можна припустити, що момент зовнішніх сил відносно осі обертання дорівнює нулю. Отже, момент імпульсу системи залишатиметься незмінним. Якщо демонстратор розведе руки з гантелями убік, він збільшить момент інерції  $I$ , тому кутова швидкість обертання  $\omega$  повинна зменшитись так, щоб залишився незмінним імпульс  $I\omega$ . Навпаки, якщо руки звести до осі обертання, момент інерції зменшиться, а кутова швидкість обертання зросте.

Аналогічно можна пояснити обертання фігуристки (рис. 1.30). Коли фігуристка виконує пірует, вона обертається на носку навколо вертикальної осі. Ноги та руки

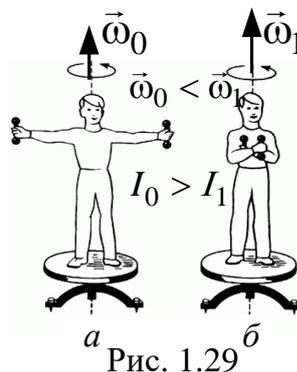


Рис. 1.29

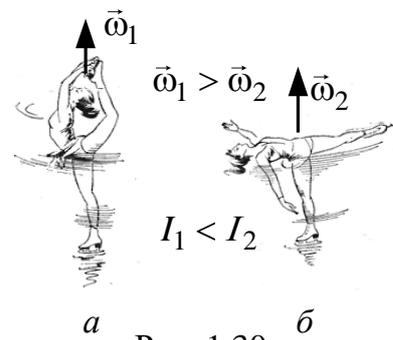


Рис. 1.30

при цьому максимально наближені до осі, і кутова швидкість є максимальною. Для уповільнення обертання фігуристка розводить руки та відводить ногу вбік. Таким чином, вона управляє швидкістю обертання, змінюючи момент інерції свого тіла.

### 1.3.5. Момент інерції. Теорема Гюйгенса – Штейнера

В теоретичній механіці даний момент інерції часто називають *осьовим* з тим, щоб уникнути плутанини із так званим геометричним моментом інерції, що вивчається в будівельній механіці та в опорі матеріалів. Геометричний момент інерції не пов'язаний з рухом матеріалу, він лише відображає ступінь жорсткості перерізу. Використовується для обчислення радіуса інерції, прогину балки різного поперечного перерізу.

Навпаки, *осьовий момент інерції є мірою інертності тіла в обертальному русі*, як і маса, характеризує інерційні властивості тіла в поступальному русі. Цю властивість, наприклад, беруть до уваги,



Рис. 1.31

проектуючи двигун автомобіля. Так, для регулювання нерівномірності обертання колінчастого вала двигуна автомобіля застосовується маховик, що виготовляється у вигляді масивного зубчастого диска. Маховик в машині (рис. 1.31) виконує роль акумулятора кінетичної енергії. Під час розгону частина позитивної роботи зовнішніх сил витрачається на збільшення кінетичної енергії маховика. Швидкість, до якої розганяється система, стає меншою, а під час гальмування маховик віддає запасену енергію назад в систему, і швидкість машини зменшується не так стрімко.

Із визначення (1.36) видно, що момент інерції є величиною *адитивною*, тобто момент інерції тіла дорівнює сумі моментів інерції його частин. Розглянемо однорідне тіло. Розподіл маси у межах такого тіла можна охарактеризувати густиною  $\rho$ , що є однаковою в усіх точках тіла. Тоді елементарна маса дорівнює  $m_i = \rho \cdot \Delta V_i$ . Звідси момент інерції:

$$I = \sum \rho \Delta V_i r_i^2 = \rho \sum \Delta V_i r_i^2 .$$

У граничному випадку за нескінченного поділу тіла на елементарні маси задача знаходження моменту зводиться до інтегрування:

$$I = \int r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV . \quad (1.38)$$

Інтегрування здійснюється по всьому об'єму тіла.

Як приклад розрахуємо момент інерції однорідного суцільного диска радіусом  $R$  та товщиною  $h$  відносно осі ( $z$ ), що проходить через його центр (рис. 1.32). Для цього поділимо диск на безкінечно тонкі кільця завтовшки  $dr$  з радіусом  $r$ . Об'єм такого кільця дорівнює:

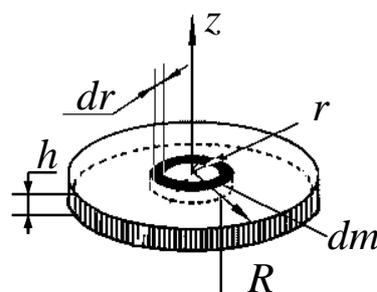


Рис. 1.32

$$dV = h2\pi r dr.$$

Зважаючи на однорідність диска ( $\rho = \text{const}$ ) та рівність (1.38), маємо:

$$I = \rho \int r^2 dV = \rho \int_0^R r^2 h 2\pi r dr = \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4}.$$

Ввівши масу диска як  $m = \rho \cdot \pi R^2 h$ , отримаємо кінцевий вираз для моменту інерції суцільного однорідного диска:

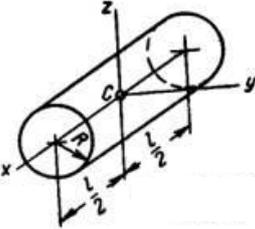
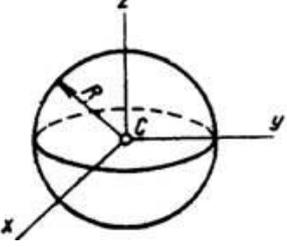
$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

Моменти інерції тіл іншої геометричної форми відносно відповідних осей обертання наведено в таблиці 1.1.

Однак якщо тіло має складну форму і до того ж є неоднорідним, його момент інерції простіше виміряти, аніж обчислити.

Таблиця 1.1

Фігура або тіло	Осьові моменти інерції
<p>Ідеально тонкий стрижень</p>	$I_x = I_y = 0; I_z = \frac{ml^2}{12}$
<p>Прямокутний паралелепіпед</p>	$I_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2);$ $I_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2);$ $I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$

 <p>Суцільний диск, циліндр</p>	$I_x = \frac{mR^2}{2}; I_y = I_z = \frac{m}{12}(3R^2 + l^2)$
 <p>Куля</p>	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mR^2$

У фізиці є чимало способів вимірювання моменту інерції, серед яких для прикладу розглянемо два з них.

1. Визначення моментів інерції тіл обертання з використанням диференціального рівняння обертання.

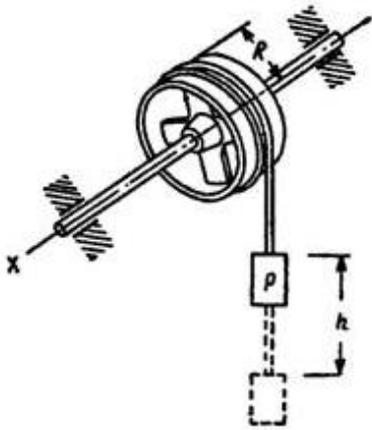


Рис.1.33

Досліджуване тіло закріплюють на горизонтальній осі  $x$ , що збігається з його віссю симетрії, і приводиться у рух навколо неї за допомогою вантажу  $P$ , закріпленого на нитці, що намотана на досліджуване тіло (рис. 1.33), при цьому вимірюється час  $t$  опускання вантажу на висоту  $h$ . Для виключення впливу тертя в точках кріплення тіла на осі  $x$  дослід виконують декілька разів за різних значень ваги вантажу  $P$ .

За результатами двох дослідів з вантажами  $P_1$  і  $P_2$  визначаємо момент інерції:

$$I_x = \frac{(P_1 - P_2)R^2 - \left(\frac{P_1}{t_1^2} - \frac{P_2}{t_2^2}\right) \frac{2hR^2}{g}}{2h \left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2}\right)}$$

2. Експериментальне визначення моментів інерції тіл за допомогою вивчення коливань фізичного маятника.

Щоб знайти момент інерції тіла масою  $m$  (рис. 1.34) відносно заданої осі  $x$  (що не проходить через центр мас), його потрібно підвісити на цій осі і виміряти два параметри: період коливань  $T$  і відстань  $l$  від осі обертання до центру тяжіння. Момент інерції відносно осі визначається за формулою:

$$I_x = \frac{T^2}{4\pi^2 mgl}.$$

Якщо момент інерції  $I_C$  відносно осі, яка проходить через центр мас, відомий, то можна легко обчислити момент інерції відносно будь-якої паралельної осі  $O$ , яка проходить на відстані  $d$  від центра мас (рис. 1.35). Як видно на рисунку, відстані довільної точки твердого тіла  $m_i$  від обох осей дорівнюють відповідно  $r_i$  і  $r_i + d$ . Тому:

$$I = \sum m_i (r_i + d)^2 = \sum m_i r_i^2 + 2\sum m_i r_i d + \sum m_i d^2. \quad (1.39)$$

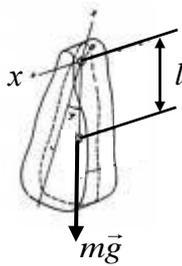


Рис. 1.34

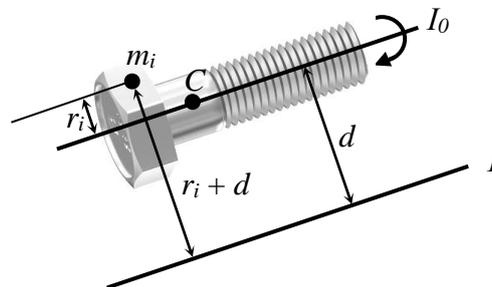


Рис. 1.35

Перший доданок  $\sum m_i r_i^2$  визначає момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас (т.  $C$ ):  $I_C = \sum m_i r_i^2$ .

Другий доданок в отриманому виразі перетворюється на нуль, оскільки  $d = \text{const}$  і  $2\sum m_i r_i d = 2d\sum m_i r_i = 2dmr_C = 0$  ( $r_C$  – відстань від осі  $C$  до центра мас). Тоді рівняння (1.39) набуде вигляду:

$$I = I_C + md^2. \quad (1.40)$$

Співвідношення (1.40) називається **теоремою Гюйгенса – Штейнера**: момент інерції  $I$  тіла відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції  $I_C$  тіла відносно осі, паралельній даній, що проходить через центр мас тіла, і добутку маси тіла на квадрат відстані між цими осями.

### 1.3.6. Вільні осі обертання. Уявлення про гіроскопи

Нерухома вісь під час обертання тіла навколо неї утримується в незмінному положенні підшипниками. У разі обертання незбалансовані частини механізмів осі (вали) зазнають певного динамічного навантаження, виникає вібрація, загроза руйнування механізмів.

Якщо тверде тіло розкрутити навколо довільної осі, що жорстко пов'язана з тілом, і вивільнити вісь із підшипників, то її напрям в просторі загалом буде змінюватися. Для того, щоб довільна вісь обертання зберігала свою вісь незмінною, до неї треба прикласти певні сили. І лише у тому випадку, коли вісь обертання збігається з головною центральною віссю інерції, розкручене і залишене само на себе тіло не чинить на підшипники ніякої дії. Такі осі називають *вільними осями*, оскільки, якщо прибрати підшипники, їхній напрям залишатиметься в просторі незмінним.

*Гіроскопом* (дзигу) називається масивне симетричне тіло, яке обертається з великою кутовою швидкістю навколо осі симетрії, що може змінювати свій напрям у просторі.

*Вільний гіроскоп.* У цьому випадку моменти усіх зовнішніх сил, зокрема і сили тяжіння, відносно центра мас гіроскопа дорівнює нулю. Це можна реалізувати, помістивши гіроскоп в карданний підвіс (рис. 1.36). При цьому:

$$\vec{M} = 0; \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

і момент імпульсу не змінюється:  $\vec{L} = const$ .

Тобто вісь розкрученого гіроскопа залишається незмінною. У

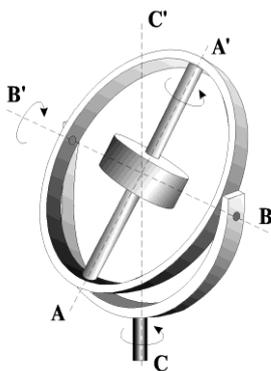


Рис.1.36

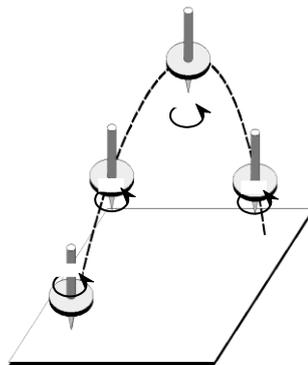


Рис.1.37

цьому можна переконатися, якщо дзигу, «запущену» на паперовому аркуші, підкинути в повітря (рис. 1.37). Вільний гіроскоп, розкручений навколо осі симетрії, має значну стійкість. Дійсно, із основного закону динаміки обертового руху випливає:

$$\Delta\vec{L} = \int_0^{\Delta t} \vec{M} dt.$$

Якщо інтервал часу  $\Delta t$  малий, то і зміна моменту імпульсу  $\Delta \vec{L}$  також мала. Тобто внаслідок короткочасних дій навіть дуже значних сил обертання гіроскопа змінюється незначно. Гіроскоп начебто чинить опір спробам змінити його момент імпульсу.

Розглянемо тепер випадок, коли до осі гіроскопа прикладена сила (наприклад, сила тяжіння), лінія дії якої не проходить через точку опори – т. О (рис. 1.38). Вісь гіроскопа при цьому переміщуватиметься не в бік дії сили, а перпендикулярно до неї, описуючи конус. Такий рух осі називається *прецесією* гіроскопа внаслідок дії зовнішньої сили. Частоту прецесії  $\Omega$  можна визначити на підставі таких міркувань.

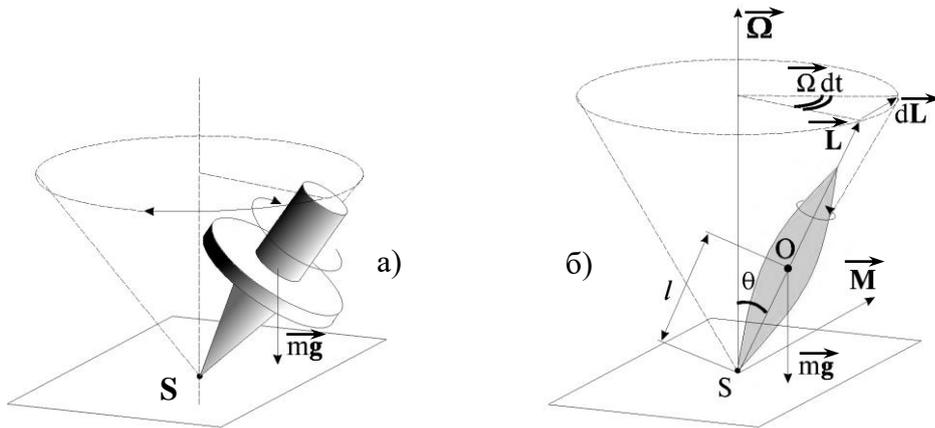


Рис. 1.38

На гіроскоп точки опори діє момент сили тяжіння, рівний за модулем:

$$M = mgl \sin \theta,$$

де  $l = OS$ . Оскільки згідно з рівнянням моментів  $d\vec{L} = \vec{M}dt$  і в даному випадку  $d\vec{L} \perp \vec{L}$ , цей момент сил намагається не змінити, а повернути вектор  $\vec{L}$  (разом із віссю гіроскопа) навколо вертикальної осі. За час  $dt$  вісь повернеться на кут  $d\varphi = \frac{dL}{L \sin \theta} = \frac{Mdt}{L \sin \theta}$ . У результаті кінець

вектора  $\vec{L}$  обертатиметься навколо вертикальної осі по колу радіусом  $L \sin \theta$  з кутовою швидкістю

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L \sin \theta} = \frac{mgl \sin \theta}{L \sin \theta}, \text{ або } \Omega = \frac{mgl}{I\omega}.$$

Це і є кутова швидкість прецесії осі гіроскопа в полі сили тяжіння. Зазначимо, що вона не залежить від кута  $\theta$ .

Цікавий ефект проявляється, якщо розкручений гіроскоп (рис. 1.39) спробувати

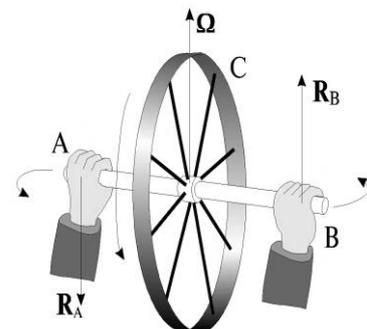


Рис. 1.39

повернути в горизонтальній площині з кутовою швидкістю  $\Omega$ . У цьому випадку вал гіроскопа (AB) намагається вирватися із рук і повернутися в вертикальній площині; він діє на кисті рук із силами  $R_A$  та  $R_B$ . Необхідно прикласти неабияке фізичне зусилля, щоб утримати вал рухомого гіроскопа у горизонтальній площині. Іншими словами, якщо за допомогою моменту зовнішніх сил намагатися повернути гіроскоп навколо осі, перпендикулярної до осі гіроскопа AB, то він справді намагатиметься повернутися, але навколо третьої осі, перпендикулярної до цих двох осей. У цьому полягає *гіроскопічний ефект*. Сили  $R_A$  та  $R_B$  називаються *гіроскопічними силами*.

Дії гіроскопічних сил зазнають підшипники осей частин машини, що швидко обертаються, в разі повороту самої машини (турбіни на кораблі, гвинта на літаку тощо). За значної кутової швидкості, а також великих розмірів маховика ці сили можуть навіть руйнувати підшипники. Гіроскопічні сили здатні викликати так звані коливання

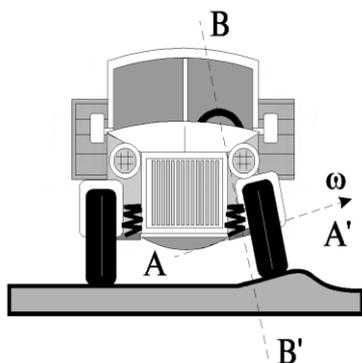


Рис. 1.40

“шиммі” (англ. shimmy – автоколивання шасі) коліс автомобіля (рис. 1.40). Колесу, що обертається навколо осі AA' з кутовою швидкістю  $\omega$ , у момент наїзду на перешкоду надається додаткова швидкість вимушеного повороту навколо осі, перпендикулярної до осі рисунка. При цьому виникає момент гіроскопічних сил, і колесо починає обертатися навколо осі BB'.

Набуваючи кутової швидкості повороту навколо осі BB', колесо знову починає повертатися навколо осі, перпендикулярної до площини рисунка. В результаті виникають коливальні рухи колеса навколо двох взаємно перпендикулярних осей: осі повороту BB' й осі, суміщеної із напрямком руху автомобіля. Якщо не вжити спеціальних конструктивних заходів, ці коливання можуть призвести до зриву покриття з обода колеса і поломки деталей його кріплення. У сучасних конструкціях підвіски колесо в разі наїзду на перешкоду залишається практично у вертикальній площині.

Властивість гіроскопа незмінно зберігати напрям своєї осі в просторі потрібна в конструюванні приладів, призначених для стабілізації та автоматичного управління рухом літаків (автопілот), ракет, морських суден, торпед тощо. Гіроскоп відіграє роль чутливого елемента, що реєструє відхилення рухомого об'єкта від заданого курсу.

У будівництві гіроскоп використовують в так званих гіроскопічних теодолітах (гіротеодолітах), необхідних для орієнтування під час спорудження підземних тунелів, шахт тощо.

### 1.3.7. Умови рівноваги твердого тіла

Умови рівноваги тіл описує *статика*. У будівництві статика, перш за все дає змогу визначати умови рівноваги різноманітних створюваних споруд: будинків, арок, підйомних кранів тощо.

Тіло залишатиметься в стані спокою, якщо немає причин, що викликають його рух. Згідно з рівняннями (1.28) і (1.35), які описують рух системи матеріальних точок, для цього достатньо дотримання таких умов:

1) *результуюча всіх зовнішніх сил, прикладених до тіла, має дорівнювати нулю, тобто:*

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{зовн}} = 0.$$

Ця умова застосовується до тіла, яке може здійснювати поступальні (необертові) рухи.

На рис. 1.41 показано рівновагу твердого тіла під дією трьох сил. Точка перетину  $O$  ліній дії сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  не збігається з точкою прикладання сили тяжіння (центр мас  $C$ ), але за рівноваги ці точки обов'язково опиняється на одній вертикалі. Для визначення рівнодійної всі сили зводять до однієї точки.

Якщо тіло може обертатися відносно деякої осі (рис. 1.42), то для його рівноваги недостатньо рівності нулю рівнодійних усіх сил. Для рівноваги такого тіла потрібне дотримання другої умови:

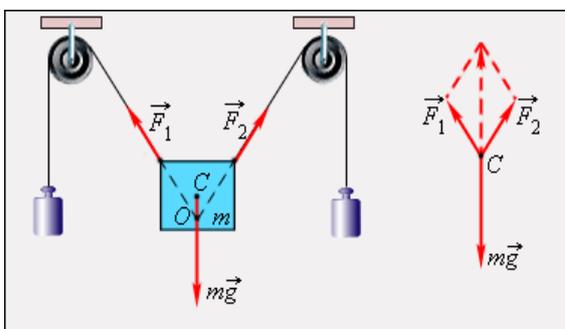


Рис. 1.41

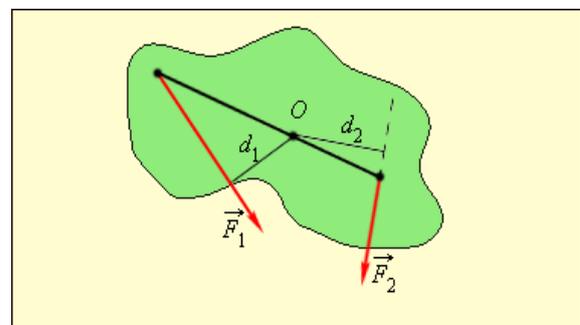


Рис. 1.42

2) *Алгебраїчна сума моментів усіх сил, що діють на тіло, відносно будь-якої точки має дорівнювати нулю, тобто*

$$M = \sum_i M_i^{\text{зовн}} = 0.$$

Додатними зазвичай вважають моменти тих сил, які намагаються повернути тіло проти годинникової стрілки.

Ці умови виконуються в тій системі відліку, у якій тіло перебуває у спокої.

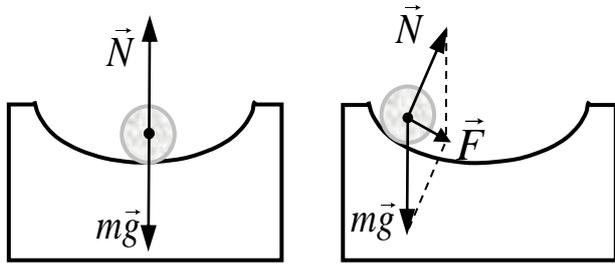


Рис. 1.43

Для тіла, що має нерухому вісь обертання, можливі три види рівноваги: 1) стійка; 2) нестійка; 3) байдужа.

Стан рівноваги називається *стійким*, якщо за малих відхилень тіла від положення

рівноваги (рис. 1.43) виникають сили чи моменти сил, що намагаються повернути тіло в рівноважний стан.

За незначного відхилення тіла від стану *нестійкої* рівноваги виникають сили чи моменти сил, що, навпаки, намагаються віддалити тіло від положення рівноваги (рис. 1.44).

Трапляються і проміжні випадки рівноваги: якщо кулька лежить на горизонтальній площині (рис. 1.45), її зміщення взагалі не порушує рівноваги, оскільки сила тяжіння та сила реакції опори, що діє з боку площини, зрівноважують одна одну за будь-якого положення кульки. Така рівновага називається байдужою.

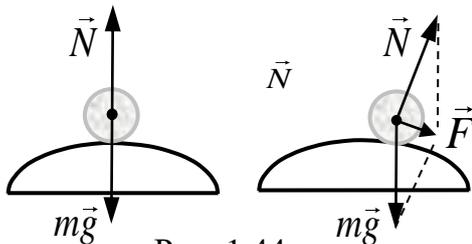


Рис. 1.44

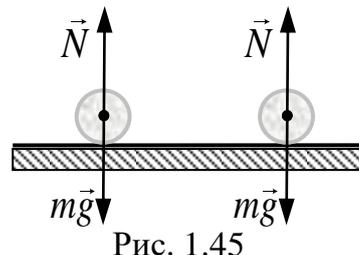


Рис. 1.45

У прикладах, відображених на рис. 1.43 та 1.44, центр тяжіння кулі перебуває в різних положеннях відносно землі. Якщо рівновага стійка, центр тяжіння кулі займає найнижче положення відносно опори. Якщо рівновага нестійка, центр тяжіння кулі опиняється в найвищому положенні відносно опори. Тому положення стійкої рівноваги характеризується *мінімальною потенціальною енергією*.

Особливим випадком є рівновага тіла на опорі. У цьому випадку сила реакції опори прикладена не до однієї точки, а розподілена по площі основи тіла. Тіло перебуває в рівновазі, якщо вертикальна лінія,

проведена через центр мас тіла, проходить через площину опори, тобто всередині контуру, утвореного лініями, що з'єднують точки опори. Коли ж ця лінія не перетинає площі опори, тіло перекидається.

З умови рівноваги тіла, яке спирається на декілька точок, стає зрозумілим, чому підйомні крани завжди обладнують важкою противагою для підвищення їхньої стійкості до перекидання. Завдяки противазі спільний центр тяжіння, крана, вантажу та противаги не виступає за прямокутник, обмежений точками опори коліс навіть тоді,

коли кран піднімає важкий вантаж. На кранах з поворотною баштою (рис. 1.46, а) противагу підвішують на поворотній платформі, на кранах з неповотною баштою (рис. 1.46, б) – на противаговій консолі.

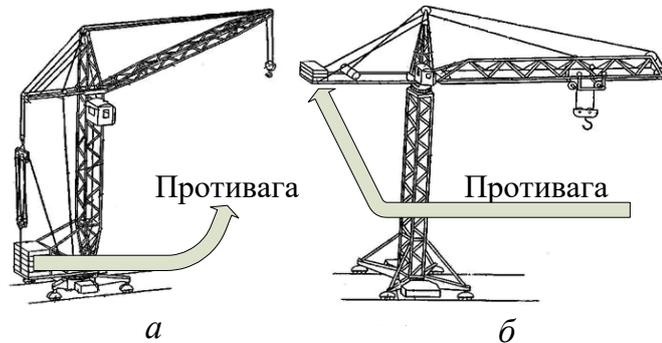


Рис. 1.46

Із законів механіки, зокрема умов рівноваги статички, впливають методи, які дають можливість розв'язати задачі для інженерного розрахунку на міцність будівельних конструкцій (ферми опор ліній електропередачі, мости, консолі будівельних кранів тощо), тобто розрахувати механічні напруження в них. Зокрема, в курсах теоретичної механіки, будівельної механіки та опору матеріалів вивчається аналітичний розрахунок плоскої ферми методами перерізів Ріттера та вирізування кутів, а також графічний розрахунок за допомогою діаграми Максвелла – Кремони.

## 1.4. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ЕНЕРГІЇ

### 1.4.1. Енергія, робота і потужність

Розглянуте поняття «імпульс» ( $\vec{p} = m\vec{v}$ ), що характеризує інертні властивості тіла і є певною мірою його руху, не завжди можна застосувати для оцінювання зміни в характері цього руху. Розглянемо, наприклад, рух тіла за наявності тертя, внаслідок якого тіло зупиняється ( $\vec{p} = 0$ ), при цьому механічний рух перетворюється у теплову форму руху (молекул). У такому випадку імпульс тіла не може бути мірою

руху. Отже, потрібна інша, універсальна міра руху, що дала б змогу врахувати перехід від однієї форми руху до іншої, тобто була б єдиною кількісною мірою руху в усіх його формах. Такою фізичною величиною є енергія. *Енергія – це кількісна міра руху матерії в усіх його формах.*

У природі постійно тривають процеси, що супроводжуються перетворенням однієї форми руху матерії в іншу, а енергія є єдиною мірою, що характеризує кількісні та якісні зміни руху, що відбуваються при цьому. Ці зміни зумовлені взаємодією тіл системи як між собою, так і з зовнішніми тілами. Оскільки рух – невід’ємний атрибут матерії (спосіб її існування), будь-яке тіло має певний запас енергії, що є мірою цього руху. Таким чином, енергія – це єдина кількісна міра руху в усіх формах його прояву і лише умовно для кількісної оцінки якісно різних форм руху і відповідно до їхніх взаємодій вводиться поняття механічної, теплової, електромагнітної й інших видів енергії.

Зміна механічного руху тіла зумовлена силами, що діють на нього з боку інших тіл. Тому для кількісної оцінки обміну енергією між тілами, які взаємодіють, вводиться поняття *роботи сили*.

Робота є мірою передавання енергії від одного тіла до іншого.

Елементарною роботою  $dA$  сили  $\vec{F}$  за елементарного переміщення  $d\vec{s}$  називається скалярний добуток:

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = F \cdot ds \cdot \cos \alpha, \quad (1.41)$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{F}$  та  $d\vec{s}$ . Залежно від кута  $\alpha$  робота може бути додатною ( $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ), від’ємною ( $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ) або дорівнювати нулю ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ).

У загальному випадку, коли тіло, рухаючись по криволінійній траєкторії, проходить скінченний шлях, можна уявно поділити цей шлях на нескінченно малі елементи, на кожному з яких силу  $\vec{F}$  вважати постійною, а елементарна робота визначається рівнянням (1.41), то загальна робота на усьому шляху відображається формулою:

$$A = \int_L (\vec{F} \cdot d\vec{s})$$

і називається *криволінійним інтегралом* вектора  $\vec{F}$  вздовж траєкторії  $L$ .

Унаслідок дії на тіло одночасно декількох сил загальна робота

$$dA = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i d\vec{s}) = \sum_{i=1}^n dA_i,$$

тобто робота результуючої декількох сил дорівнює алгебраїчній сумі робіт, виконаних кожною із сил окремо.

Одиницею роботи в системі СІ є *джоуль* (Дж),  $1 \text{ Дж} = 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ с}$ .

Потужність – це робота, виконана за одиницю часу:

$$P = \frac{dA}{dt}.$$

Потужність тіла, яке має швидкість  $\vec{v}$ , можна записати у вигляді:

$$P = \frac{d}{dt} (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = \left( \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} \right) = (\vec{F} \cdot \vec{v}).$$

Таким чином, одну й ту саму потужність можна розвинути або завдяки дії великої сили, що спричинює малу швидкість тіла (наприклад, сила тяги двигуна повільного трактора), або завдяки відносно незначній дії сили, що спричинює велику швидкість тіла (наприклад, сили тяги двигуна спортивного автомобіля).

Одиницею потужності в системі СІ є *ватт* (Вт),  $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж}/1 \text{ с}$ . Однією з позасистемних одиниць вимірювання потужності, що часто трапляється в автомобільній індустрії, є *кінська сила*:  $1 \text{ к.с.} = 736 \text{ ватт}$ .

#### 1.4.2. Кінетична енергія поступального та обертального рухів

Унаслідок переміщення матеріальної точки масою  $m$  під дією сили  $\vec{F}$  остання здійснює роботу, а отже, енергія рухомої точки зростає на величину роботи сили.

Розрізняють два види механічної енергії – кінетичну і потенціальну. *Кінетичною енергією механічної системи називається енергія механічного руху цієї системи.*

Зміна кінетичної енергії матеріальної точки відбувається під дією прикладеної до неї сили, яка виконує роботу  $dA = (\vec{F} \cdot d\vec{s})$  (див. (1.41)).

Оскільки  $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ ,  $d\vec{s} = \vec{v} dt$ , то:

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = \left( m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \right) = m(\vec{v} d\vec{v}). \quad (1.42)$$

Скалярний добуток  $(\vec{v} d\vec{v})$  можна записати як  $(\vec{v} d\vec{v}) = (v dv)$ .

Підставимо останню рівність у рівняння (1.42) та проінтегруємо вздовж траєкторії від точки 1 до точки 2:

$$A_{12} = m \int_{v_1}^{v_2} (v dv) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

де  $v_1$  – початкова, а  $v_2$  – кінцева швидкості точки.

Величина 
$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \quad (1.43)$$

називається *кінетичною енергією поступального руху матеріальної точки*. Отже,

$$A_{12} = K_2 - K_1. \quad (1.44)$$

Таким чином, *робота сили під час переміщення матеріальної точки дорівнює приросту кінетичної енергії цієї точки*. Із останньої формули випливає, що енергія має таку саму розмірність, що й робота.

Отриманий результат можна узагальнити щодо довільної системи, яка складається з  $n$  матеріальних точок:

$$K_{\text{пост}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2},$$

де  $v_i$  – швидкість  $i$ -ї матеріальної точки,  $m_i$  – її маса. Зокрема, кінетичну енергію поступального руху твердого тіла, що рухається зі швидкістю  $v$ , можна знайти за формулою (1.43), де  $m$  – маса усього тіла.

Під роботою  $A_{12}$  слід розуміти *суму робіт усіх сил, як внутрішніх, так і зовнішніх, що діють на матеріальні точки системи*.

Кінетична енергія залежить від маси тіла і його швидкості, отже, кінетична енергія – функція стану руху тіла чи системи. На відміну від імпульсу, кінетична енергія системи не залежить від того, в яких напрямках рухаються її частини. Кінетична енергія залежить від вибору інерціальної системи відліку.

Знайдемо вираз для кінетичної енергії тіла, що обертається навколо нерухомої осі  $z$  з частотою  $\omega$ . Лінійна швидкість елементарної маси  $m_i$  дорівнює  $v_i = \omega R_i$ , де  $R_i$  – відстань маси  $m_i$  від осі  $z$ . Отже, для кінетичної енергії  $i$ -ї елементарної маси отримуємо вираз:

$$K = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2.$$

Кінетична енергія тіла складається з кінетичної енергії його частин:

$$K = \sum K_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i R_i^2. \quad (1.45)$$

Сума в правій частині співвідношення (1.45) являє собою момент інерції тіла  $I$  відносно осі обертання. Таким чином, кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює:

$$K_{об} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Оскільки кінетична енергія тіла залежить від системи відліку, то для її визначення зручно користуватися *теоремою Кеніга*: кінетична енергія системи матеріальних точок ( $K$ ) дорівнює сумі кінетичної енергії усієї маси системи, що уявно зосереджена в її центрі мас і рухається разом з тілом ( $m v_C^2 / 2$ ), та кінетичної енергії цієї ж системи відносно системи центра мас ( $K'$ ):  $K = K' + m v_C^2 / 2$ .

Як приклад, скористаємося теоремою Кеніга для розрахунку кінетичної енергії гусениці трактора, що рухається відносно землі із швидкістю  $\vec{v}$ . Маса гусениці –  $m$  (рис. 1.47). Кінетична енергія центра мас –  $m v^2 / 2$ . Кінетична енергія гусениці відносно центра мас (відносно штрихової системи відліку  $Z'$ ) дорівнює  $K' = m (v')^2 / 2 = m v^2 / 2$ , де  $\vec{v}'$  – швидкість точок гусениці, що торкаються землі, відносно системи, пов'язаної із центром мас (системи  $Z'$ ). Таким чином:

$$K = m v^2 / 2 + m v^2 / 2 = m v^2.$$

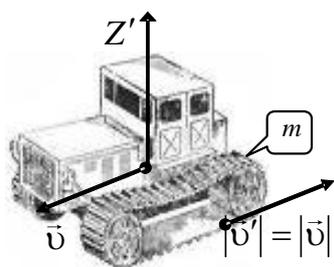


Рис. 1.47

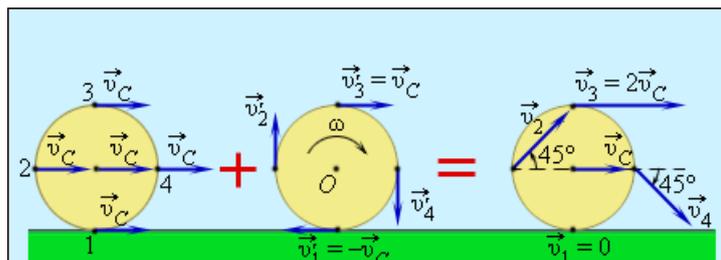


Рис. 1.48

У випадку довільного плоского руху (рис. 1.48) кінетична енергія дорівнює сумі кінетичної енергії поступального руху тіла зі швидкістю центра мас  $v_C$  ( $K^{пост} = m v_C^2 / 2$ ) і кінетичної енергії обертання тіла з

кутовою швидкістю  $\omega$  навколо миттєвої осі, що проходить через центр мас ( $K^{\text{rot}} = I_C \omega^2 / 2$ , де  $I_C$  – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас).

Тоді 
$$K = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2}.$$

### 1.4.3. Консервативні сили. Потенціальна енергія

Якщо деяка величина в кожній точці простору має певне значення, то існує поле цієї фізичної величини. Поле називається скалярним, якщо фізична величина є скалярною, векторна фізична величина характеризується векторним полем. Якщо в кожній точці простору на частинку діє певна сила, це означає, що частинка перебуває в силовому полі. Розрізняють два види силових полів – поле *консервативних* сил і поле *неконсервативних* сил. Система тіл називається консервативною, якщо між тілами системи діють сили, що залежать лише від відстані між цими тілами. Таким чином, для поля консервативних сил справедливим є співвідношення:  $\vec{F} = \vec{F}(r)$ . Поле сил, що мають такі властивості, називається *центральним*. Прикладом центральної (консервативної) сили є сила тяжіння.

Якщо в усіх точках поля сили, що діють на частинку, однакові за величиною і напрямком ( $\vec{F} = \text{const}$ ), поле називається *однорідним*. Поле, що не змінюється з часом, називається *стаціонарним*.

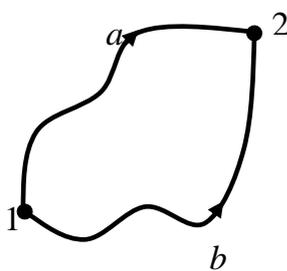


Рис. 1.49

Для визначення консервативного силового поля часто використовують властивості згаданих сил. Сила, що діє на матеріальну точку, називається *консервативною*, якщо робота  $A_{1 \rightarrow 2}$ , яка здійснюється цією силою в разі переміщення тіла з положення (1) в положення (2), залежить не від того, по якій траєкторії відбувається переміщення (рис. 1.49), а лише від початкового і кінцевого положення тіла, тобто:

$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_{1 \rightarrow (a)}^2 (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = \int_{1 \rightarrow (b)}^2 (\vec{F} \cdot d\vec{s}). \quad (1.46)$$

Отже, інтеграли в (1.46) не залежать від способу інтегрування. Із останньої рівності можна отримати вираз для роботи консервативної сили по замкненому шляху:

$$\begin{aligned} \oint_L (\vec{F} \cdot d\vec{s}) &= \int_{1 \rightarrow (a)}^2 (\vec{F} \cdot d\vec{s}) + \int_2^{1 \rightarrow (b)} (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = \\ &= \int_{1 \rightarrow (a)}^2 (\vec{F} \cdot d\vec{s}) - \int_{1 \rightarrow (b)}^2 (\vec{F} \cdot d\vec{s}) \equiv 0. \end{aligned}$$

Таким чином, робота консервативної сили за переміщення тіла по замкненій траєкторії  $L = 1 \rightarrow a \rightarrow 2 \rightarrow b \rightarrow 1$  тотожно дорівнює нулю:

$$\oint_L (\vec{F} \cdot d\vec{s}) \equiv 0. \quad (1.47)$$

Інтеграл в рівнянні (1.47) називається *циркуляцією* вектора  $\vec{F}$ .

Отже, консервативні сили можна визначити двома способами:

- 1) як сили, робота яких не залежить від шляху, по якому тіло переходить з одного положення в інше;
- 2) як сили, робота яких на будь-якому замкнутому шляху дорівнює нулю.

Консервативними силами є сили тяжіння, сили пружності, сили електростатичного походження, оскільки їхня робота не залежить від форми шляху. Сили тертя та опору не є консервативними. Такі сили називають *дисипативними*.

Вираз (1.46) означає: якщо тіло перебуває у потенціальному силовому полі, то робота сил поля не залежить від форми траєкторії, а є функцією лише початкового і кінцевого положення (координати) тіла, тобто існує однозначна функція координат  $U(x, y, z)$ , причому:

$$dA = -dU(x, y, z). \quad (1.48)$$

Функцію  $U(x, y, z)$  називають *потенціальною енергією*. Знак «-» означає: якщо поле здійснює роботу над тілом, то його енергія зменшується.

Унаслідок інтегрування рівняння (1.48) отримаємо вираз

$$A_{1 \rightarrow 2} = -\int_1^2 dU(x, y, z) = U_1(x, y, z) - U_2(x, y, z). \quad (1.49)$$

Таким чином, робота, виконана полем консервативних сил, рівна зміні потенціальної енергії. Величина потенціальної енергії в певній

точці поля може бути визначена з точністю до константи інтегрування, тобто

$$U(x, y, z) = -\int dA + \text{const}.$$

Тому *практичний зміст має не значення потенціальної енергії в певній точці поля, а різниця потенціальних енергій двох точок поля.*

Знайдемо зв'язок сили з потенціальною енергією:

$$dA = (\vec{F}d\vec{s}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU;$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Вираз

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

означає повний диференціал потенціальної енергії.

Вектор сили визначається так:

$$\vec{F} = -\left( \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right). \quad (1.50)$$

Вектор у дужках в рівнянні (1.50) називається градієнтом скалярної функції  $U(x, y, z)$ , тобто:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}U}(x, y, z). \quad (1.51)$$

Відповідно до співвідношення (1.51) рівняння (1.50) отримаємо:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}U}(x, y, z). \quad (1.52)$$

За допомогою виразу (1.50) можна визначити силу в будь-якій точці поля, якщо відома потенціальна функція.

#### **1.4.4. Енергія пружно деформованого тіла**

Під дією зовнішньої сили  $\vec{F}$  тіло деформується доти, доки сили пружності не зрівноважать зовнішню деформаційну силу:  $\vec{F} = -\vec{F}_{\text{пр}}$ . Оскільки згідно із законом Гука  $F_{\text{пр}} = -kx$ , роботу пружної сили можна виразити рівнянням:

$$dA = -dU(x) = F_{\text{пр}} dx = -kx dx.$$

Отже, потенціальна енергія:

$$U(x) - U(x_0) = \int_{x_0}^x kx dx = kx^2 / 2 - kx_0^2 / 2.$$

Припустивши, що потенціальна енергія дорівнює нулю для недеформованого тіла ( $x_0 = 0, U(x_0) = 0$ ), отримуємо:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}.$$

#### 1.4.5. Потенціальна енергія матеріальної точки у гравітаційному полі та в однорідному полі тяжіння

За законом всесвітнього тяжіння Ньютона гравітаційна сила притягання двох тіл визначається за формулою:

$$F = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2},$$

де  $M$  – маса тіла, що створює гравітаційне поле,  $m$  – маса матеріальної точки у даному полі,  $r$  – відстань між їхніми центрами.

Сили гравітаційного притягання, як сили центральні, є консервативними, отже для них можна ввести поняття потенціальної енергії:

$$dU = -dA = -Fdr = -\gamma \frac{M \cdot m}{r^2} dr.$$

$$\text{Отже, } U(r) - U(r_\infty) = \int_r^{r_\infty} -\gamma \frac{Mm}{r^2} dr = \gamma Mm \left( \frac{1}{r_\infty} - \frac{1}{r} \right).$$

Припустимо, що потенціальна енергія взаємодії на нескінченності дорівнює нулю ( $U(r_\infty) = 0$ ). З цього випливає:

$$U(r) = -\gamma \frac{Mm}{r}. \quad (1.53)$$

Як видно із співвідношення (1.53), потенціальна енергія тіла у полі гравітаційного притягання є від'ємною. Це не є властивістю лише сил гравітаційного притягання, оскільки *усяким потенціальним силам відповідає від'ємна енергія, тому що для подолання таких сил частинка витрачає свою кінетичну енергію.*

Якщо тіло, що перебуває на висоті  $h$ , упаде на нульовий рівень (тобто рівень, для якого  $h = 0$ ), сила тяжіння виконає роботу  $A = mgh$ . Тому на висоті  $h$  тіло має потенціальну енергію  $U = mgh + C$ . Нульовим

рівнем можна вважати довільний рівень, наприклад, рівень підлоги, моря тощо. Постійна  $C$  дорівнює потенціальній енергії на нульовому рівні. Вважаючи її рівною нулю, отримаємо:

$$U = mgh.$$

#### 1.4.6. Закон збереження енергії в механіці

Розглянемо, як змінюються кінетична і потенціальна енергії будь-якої ізольованої системи, в якій діють лише консервативні сили. Нехай в результаті дії цих сил система перейшла з положення (1) в положення (2). Роботу, виконану консервативними силами, можна визначити із рівняння (1.49):  $A_{1 \rightarrow 2} = U_1 - U_2$ . Та сама робота може бути виражена через приріст кінетичної енергії (рівняння (1.44)):  $A_{12} = K_2 - K_1$ . Прирівнюючи рівності (1.49) та (1.44), отримаємо:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2.$$

Сума кінетичної і потенціальної енергії називається *повною механічною енергією*  $E$ . Таким чином,  $E_1 = E_2$ , або:

$$E \equiv K + U = \text{const.} \quad (1.54)$$

Рівняння (1.54) виражає *закон збереження енергії: в системі з самими лише консервативними силами повна механічна енергія залишається незмінною.*

Кінетична енергія при цьому може перетворюватися в потенціальну в еквівалентній кількості, і навпаки. Оскільки кінетична енергія за визначенням не може бути від'ємною, то це означає, що потенціальна енергія менша за повну механічну енергію або дорівнює їй.

Якщо в замкнутій системі, окрім консервативних сил, діють також неконсервативні, дисипативні сили (сили тертя, опору), то повна механічна енергія системи втрачається. Дійсно, робота усіх сил за переходу системи з положення (1) в положення (2) визначатиметься так:

$$A_{12} = \hat{A}_{12}^{\hat{e}i} + A_{12}^{\ddot{a}e\ddot{n}} = A_{12} = U_1 - U_2 + A^{\ddot{a}e\ddot{n}}.$$

Прирівнюючи цей вираз до приросту кінетичної енергії, отримаємо:

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + A^{\ddot{a}e\ddot{n}}, \quad \text{або} \quad E_2 - E_1 = A^{\ddot{a}e\ddot{n}}.$$

Сили тертя зазвичай здійснюють негативну роботу, тому їхня наявність в замкнутій системі згодом призводить до зменшення її повної механічної енергії. Дія сил тертя зумовлює перетворення механічної енергії в інші немеханічні види енергії.

Згідно з теоремою Емми Нетер закон збереження енергії впливає із однорідності часу.

#### 1.4.7. Пружний та непружний удари тіл та частинок

Цікавим прикладом застосування законів збереження є пружний та непружний удари (зіткнення) тіл. Їхнє вивчення є корисним у будівництві. Так, наприклад, для забивання палі до початку спорудження будинку вдаються до так званого *віброударного* способу, що ґрунтується на застосуванні удару вібромолота об палю. При цьому вібромолот здійснює ударний та вібраційний вплив, результатом якого є занурення палі у ґрунт. На рис. 1.50 наведено принципову схему вібромолота: 1 – віброзбуджувач спрямованих коливань; 2 – дебаланс; 3 – бойок; 4 – ковадло; 5 – пружинна підвіска; 6 – залізобетонна палля.

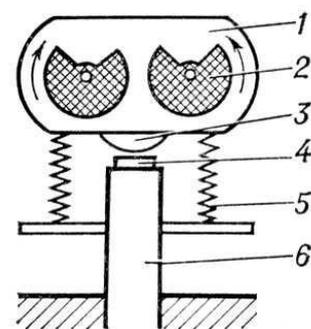


Рис. 1.50

Тіла внаслідок зіткнення одне з одним зазнають деформації. При цьому кінетична енергія, яку мали тіла перед ударом, частково або повністю переходить в потенційну енергію пружної деформації або в так звану внутрішню енергію тіл. Збільшення внутрішньої енергії тіл супроводжується підвищенням температури. Застосовують два граничних види удару: абсолютно пружний і абсолютно непружний.

*Абсолютно непружний* удар характеризується тим, що потенційна енергія деформації не виникає, кінетична енергія тіл повністю або частково перетворюється у внутрішню енергію. Після удару тіла з'єднуються разом та рухаються з однаковою швидкістю або зупиняються. Прикладом може слугувати влучання кулі з гвинтівки у рухоми мішень, наприклад, в ящик з піском, підвішений на мотузці. Куля, застрягнувши в піску, залишається в ящику і рухається разом з ним.

Фізичні явища під час зіткнень є досить складними. Тіла, що зіштовхуються, деформуються, виникають пружні сили і сили тертя, в

тілах збуджуються коливання і хвилі тощо. Однак якщо удар непружний, усі процеси в решті-решт зупиняються і далі тіла, з'єднавшись разом, рухаються як єдине тверде тіло, швидкість якого можна визначити, не заглиблюючись у механізм явища, а використовуючи лише закон збереження імпульсу. Закон збереження механічної енергії не справджується. Натомість справджується закон збереження сумарної енергії різних видів – механічної і внутрішньої.

Розглянемо абсолютно непружний удар на прикладі зіткнення двох однорідних куль масою  $m_1$  та  $m_2$ , що утворюють замкнену систему та рухаються вздовж осі  $x$ , що з'єднує їхні центри, із швидкостями відповідно  $\vec{v}_1$  та  $\vec{v}_2$  (рис. 1.51). В цьому випадку удар називається *центральною*. Позначимо через  $\vec{u}$  спільну швидкість тіл після удару.



Рис. 1.51

Із закону збереження імпульсу випливає:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}.$$

В проєкціях на вісь  $x$  маємо:  $m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) u_x$ .

Далі отримуємо:

$$u_x = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}.$$

Кінетична енергія куль до удару і після нього відповідно дорівнює:

$$E_{k_1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad E_{k_2} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2.$$

Звідси зміна кінетичної енергії:

$$\Delta E = E_{k_1} - E_{k_2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2};$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2.$$

Величина  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  називається зведеною масою тіл. Таким

чином, унаслідок зіткнення двох абсолютно непружних тіл відбувається втрата кінетичної енергії макроскопічного руху, що

дорівнює половині добутку зведеної маси на квадрат відносної швидкості.

Кінетична енергія за абсолютно непружного удару частково або повністю перетворюється на теплову енергію рухомих молекул. Під час зіткнення в системі діють дисипативні сили, що зменшують кінетичну енергію макроскопічного руху, тому застосовувати закон збереження механічної енергії до процесів, що відбуваються під час удару, не можна. *Абсолютно пружним* ударом називається такий удар, унаслідок якого механічна енергія тіл не переходить в інші немеханічних види енергії. Прикладом такого удару може бути зіткнення більярдних куль із слонової кістки, коли кінетична енергія повністю або частково переходить в потенційну енергію пружної деформації. Потім тіла повертаються до початкової форми, відштовхуючи одне одного. Потенційна енергія пружної деформації знову переходить у кінетичну енергію, і тіла розлітаються зі швидкостями, величина і напрямок яких визначаються законами збереження повної енергії і повного імпульсу системи.

Розглянемо абсолютно пружний центральний удар двох однорідних куль. Припускається, що кулі утворюють замкнену систему тіл, а отже, обертання не відбувається.

Позначимо  $m_1$  та  $m_2$  – маси куль,  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  – швидкості куль до удару,  $\vec{u}_1$  і  $\vec{u}_2$  – швидкості куль після удару. Відповідно до закону збереження імпульсу та енергії

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2;$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

отримаємо швидкість куль після удару:

$$u_{1x} = \frac{v_{1x}(m_1 - m_2) + 2m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}; \quad (1.55)$$

$$u_{2x} = \frac{v_{2x}(m_2 - m_1) + 2m_1 v_{1x}}{m_1 + m_2}. \quad (1.56)$$

Для отримання кінцевого вигляду формул треба спроектувати швидкості тіл до удару  $\vec{v}_1$  та  $\vec{v}_2$  на вісь та відповідні проекції (додатні чи від'ємні) підставити у формули (1.55) та (1.56).

За  $m_1 = m_2$  із (1.55) та (1.56) випливає, що  $u_{1x} = v_{2x}$ , а  $u_{2x} = v_{1x}$ , тобто кулі однакової маси внаслідок абсолютно пружного удару обмінюються швидкостями.

Закони, що описують пружний та непружний удари макроскопічних тіл, поширюються також і на фізику мікросвіту. Вивчення зіткнень дає змогу перевірити теоретичні уявлення про процес зіткнення, оскільки є головним методом дослідження взаємодій, взаємоперетворень, структури та інших важливих характеристик атомних і субатомних частинок та процесів мікросвіту, коли немає можливості експериментально дослідити розвиток процесу взаємодії у часі і в просторі, а можна досліджувати лише результат.

### 1.5. ВСЕСВІТНЄ ТЯЖІННЯ

В результаті узагальнення багаторічних спостережень датський астроном Тіхо Браге Кеплер емпіричним шляхом відкрив три закони руху планет:

- 1) *кожна планета рухається по еліпсу, в одному із фокусів якого знаходиться Сонце;*
- 2) *радіус-вектор планети за рівні проміжки часу описує рівні площі;*
- 3) *квадрати періодів обертання планет співвідносяться як куби великих осей еліптичних орбіт, по яких вони рухаються навколо Сонця.*

На підставі законів Кеплера Ньютон відкрив закон *всесвітнього тяжіння*. Згідно з цим законом сила притягання між точковими масами  $m_1$  та  $m_2$ , що перебувають на відстані  $r$  одна від одної, визначається за формулою:

$$\vec{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.57)$$

де  $\vec{F}_{21}$  – сила, з якою 1-е тіло притягує 2-е,  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений від тіла 1 до тіла 2;  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$  – гравітаційна стала, числове значення якої експериментально визначено в лабораторних умовах Г. Кавендішем в 1798 році. Крім того,  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ .

Закон, записаний у вигляді (1.57) є справедливим для точкових і сферичних тіл із сферично симетричним розподілом мас в їхньому об'ємі, причому у другому випадку  $r$  – відстань між центрами

сферичних тіл (рис. 1.52). Для розрахунку сили взаємодії протяжних тіл їх слід уявно поділити на елементарні маси, підрахувати згідно з формулою (1.57) сили притягання між такими масами, а потім геометрично скласти (проінтегрувати). В основі такого підходу лежить принцип суперпозиції гравітаційних полів, відповідно до якого *гравітаційне поле, утворене декількома тілами, дорівнює геометричній сумі гравітаційних полів, утворених цими тілами окремо*. Цей принцип є узагальненням досвіду.

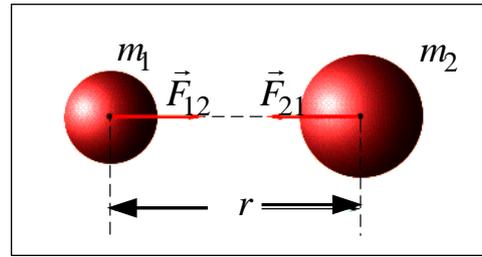


Рис. 1.52

Гравітаційна взаємодія здійснюється через гравітаційне поле. Будь-яке тіло змінює властивості навколишнього простору – утворює в ньому *гравітаційне поле*. Це поле проявляє себе у тому, що розміщене в ньому інше тіло зазнає дії сили. Для характеристики «інтенсивності» гравітаційного поля вводиться фізична величина – *напруженість гравітаційного поля*:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (1.58)$$

Відповідно до рівнянь (1.57) та (1.58) напруженість можна записати як  $G = \gamma \frac{m}{r^2}$  або у векторній формі:

$$\vec{G} = -\gamma \frac{m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.59)$$

Розмірність  $G$  збігається із розмірністю прискорення. Наприклад, напруженість поля поблизу поверхні Землі дорівнює прискоренню вільного падіння  $g$ . Дійсно, взаємодія Землі з тілом на його поверхні визначається за формулою:

$$F = \gamma \frac{M \cdot m}{R^2},$$

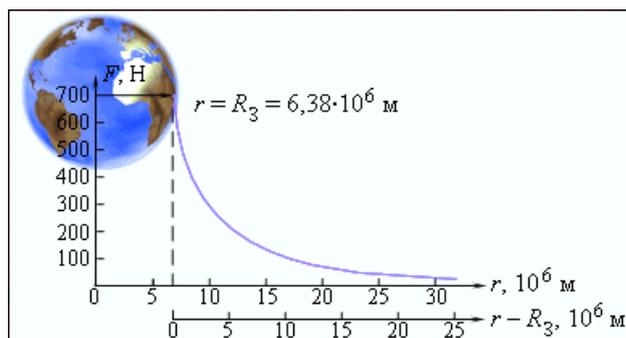
де  $M = 5,9 \cdot 10^{24}$  кг – маса Землі;  $R = 6380$  км – середній радіус Землі. Водночас сила тяжіння:

$$F = mg.$$

Звідси отримаємо вираз для прискорення вільного падіння на поверхні Землі (порів. з (1.59)):

$$g = \gamma \frac{M}{R^2}.$$

У міру віддалення від поверхні Землі сила земного тяжіння і прискорення вільного падіння змінюються обернено пропорційно



квадрату відстані  $r$  до центра Землі. Рисунок 1.53 ілюструє зміну сили тяжіння, що діє на космонавта в космічному кораблі під час його віддалення від Землі. Силу, з якою космонавт притягується до планети поблизу її поверхні, вважають рівною 700 Н.

Рис. 1.53

Другою характеристикою гравітаційного поля є потенціал. Потенціал – це енергетична характеристика гравітаційного поля, скалярна величина, рівна потенціальній енергії тіла одиничної маси в даній точці поля або роботі з переміщення одиничної маси із даної точки поля в нескінченність:

$$\varphi = \frac{U}{m} \Rightarrow \varphi = -\gamma \frac{M}{r}. \quad (1.60)$$

Знаючи потенціал, можна визначити роботу, що здійснюють над частинкою сили поля в процесі її переміщення з положення 1 в положення 2:

$$A_{12} = U_1 - U_2 = m(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Знайдемо зв'язок напруженості поля і потенціалу. З рівняння (1.60) випливає:

$$dU = m d\varphi.$$

З іншого боку, робота визначається:  $dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$ . Оскільки для потенціального поля  $dA = -dU$ , то:

$$(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = -m \cdot d\varphi, \text{ або } \vec{F} = -m \frac{d\varphi}{d\vec{r}} = -m \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\varphi.$$

Поділивши на масу, згідно з формулою (1.58) визначимо напруженість гравітаційного поля:

$$\vec{G} = -\overrightarrow{\text{grad}}\varphi = -\left( \frac{d\varphi}{dx} \vec{i} + \frac{d\varphi}{dy} \vec{j} + \frac{d\varphi}{dz} \vec{k} \right).$$

Таким чином, вектор напруженості гравітаційного поля за модулем дорівнює градієнтові потенціалу в даній точці поля і спрямований в бік зменшення цього поля.

Гравітаційні сили є досить слабкими, значно слабкішими, наприклад, за електричні. Однак сили гравітації відчутно впливають на космічні тіла з великою масою – планети, зірки, і відіграють основну роль у формуванні зоряних і планетних систем із туманностей тощо. Ілюстрацією до закону всесвітнього тяжіння може бути рис. 1.54, на якому зображено одне з найкрасивіших небесних видовищ – кульове зоряне скупчення М13 у сузір'ї Геркулеса, кожна точка якого – це зірка.



Рис. 1.54

### ***1.6. ЕЛЕМЕНТИ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ***

Окрім механіки матеріальної точки та механіки твердого тіла, що були розглянуті у попередніх розділах, фізика вивчає механіку суцільних середовищ. Ця наука охоплює теорію пружності, гідродинаміку, газову динаміку та інші дисципліни, що досліджує речовину як неперервне середовище.

У механіці твердого тіла припускалося, що під дією прикладених сил у тілі виникають деформації, однак вони не бралися до уваги в описі руху цього тіла як цілого. У багатьох важливих випадках наявність деформацій є визначальною, наприклад, коли йдеться про цілу галузь фізики – механіку суцільного середовища або про розрахунок міцності численних конструкцій і деталей машин та механізмів, що базуються на окремій інженерній науці, яка має назву «опір матеріалів».

У цьому розділі ми розглянемо спочатку поведінку твердих тіл, які деформуються під дією прикладених сил, а потім – закони гідродинаміки, що описують течію рідин або газів. Слід відмітити, що основні положення механіки тіл, які зазнають деформації та розглядаються як суцільні середовища, були сформульовані на початку ХІХ ст. і нині становлять основу сучасної теорії пружності.

Як свідчить досвід, тіла під дією прикладених сил тією чи іншою мірою змінюють свою форму й об'єм – зазнають деформації. На мікроскопічному рівні це означає відносне зміщення атомів, з яких

складається тіло. Для зручності опису деформацій подумки поділимо тіло на фізично малі елементарні об'єми (інколи називатимемо частинками), що містять, однак, велику кількість атомів. Якщо немає деформацій, атоми перебувають в стані теплової рівноваги, а всі елементарні об'єми – в механічній рівновазі.

За таких умов сума сил і моментів сил, що діють на виділений об'єм з боку інших об'ємів, які прилягають до нього, дорівнюватиме нулю. Зміна положення атомів унаслідок деформацій призводить до того, що в тілі виникають внутрішні сили (або внутрішнє напруження), що намагаються повернути тіло в стан рівноваги.

Важливо зазначити, що внутрішні сили, як сили молекулярної взаємодії, є короткодійними. Тільки сусідні атоми чи молекули ефективно взаємодіють одні з одними. Це спрощує ситуацію, оскільки дає змогу вважати, що сили, які діють на елементарний об'єм, прикладені до поверхні, що його обмежує.

Залежно від величини прикладених сил деформація твердих тіл може бути *пружною* або *пластичною*.

*Пружною* називається деформація, яка зникає після припинення дії навантаження. Пружні деформації спостерігаються тоді, коли сила (а точніше, сила, віднесена до одиниці площі, тобто напруга), що зумовлює деформацію, не перевищує деяку, визначену для кожного тіла межу – *межу пружності*. Таким чином, пружна деформація є оборотною. Деякі речовини (метали, каучук) можуть зазнавати значної пружної деформації, в той час як в інших випадках (кераміка, пресовані матеріали) навіть незначна деформація перестає бути пружною.

*Пластичною* називається деформація, яка не зникає (принаймні повністю) після припинення дії навантаження, а отже, форма твердого тіла не відновлюється (таку деформацію називають необоротною). Природа пластичної деформації може бути різною залежно від температури, тривалості дії навантаження або швидкості деформації. За незмінного прикладеного до тіла навантаження деформація поступово змінюється; це явище називається *повзучістю*. У міру підвищення температури швидкість повзучості збільшується. Однією з теорій, що пояснюють механізм пластичної деформації, є теорія дислокацій в кристалах. На пластичних деформаціях основані технологічні процеси обробки матеріалів, об'єднані назвою «обробка металів тиском», або холодна обробка металів. До таких процесів належать: прокатування

(прокатне виробництво), пресування, штампування і кування (ковальсько-штампувальне виробництво) тощо.

Усі реальні тверді тіла в процесі деформації більшою чи меншою мірою виявляють пластичні властивості. За деяких умов пластичними властивостями тіл можна знехтувати, як це, власне, відбувається в теорії пружності. Тому у цьому розділі зупинимося саме на пружних деформаціях. За усієї різноманітності випадків довільну деформацію тіла можна звести до двох елементарних деформацій – розтягу (або стиску) та зсуву.

### 1.6.1. Деформація розтягу (стиску)

Звернімося до досліду. Закріпимо один кінець гумового шнура завдовжки  $l$  і потягнемо за інший кінець з постійною силою  $\vec{F}$ . Шнур перейде в нове положення рівноваги з довжиною  $l_1 > l$  (рис. 1.55). Таку найпростішу деформацію можна охарактеризувати як відносне видовження:

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l}{l},$$

при цьому видовженню відповідає  $\varepsilon > 0$ , а стиску –  $\varepsilon < 0$ .

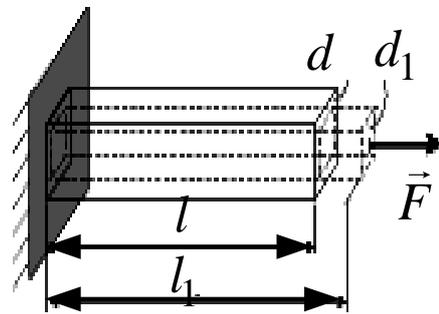


Рис.1.55

Зазначимо також, що за розтягу тіла його поперечний розмір  $d$  зменшується до величини  $d_1$ . Такий поперечний стиск характеризується параметром:

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{d_1 - d}{d} = \frac{\Delta d}{d}.$$

Дослідним шляхом виявлено, що відношення  $\varepsilon_{\perp}$  до  $\varepsilon$  приблизно однакове для різних деформацій одного і того ж матеріалу. Тому у теорії пружності матеріал характеризується коефіцієнтом Пуассона:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon}.$$

Числове значення коефіцієнта Пуассона знаходиться у межах:  $0 < \mu \leq 1/2$ .

Для ізотропних матеріалів, що мають однакові механічні властивості в усіх напрямках,  $1/4 < \mu \leq 1/3$ , зокрема, для металів  $\mu = 3/10$ . Для гуми (продукту вулканізації каучуку) внаслідок практичної нестискуваності коефіцієнт Пуассона  $\mu = 1/2$ . Для пористих матеріалів (наприклад, коркової пробки)  $\mu \approx 0$ .

Як з'ясував Гук, у міру послідовного зростання навантаження, деформації розвиваються рівномірно вздовж стрижня і зростають пропорційно навантаженню, тобто:

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l}{l} \approx \frac{F}{S} = \frac{1}{E} \sigma. \quad (1.61)$$

Величина  $\sigma = \frac{F}{S}$  називається нормальною механічною напругою у торцевому перерізі стрижня. Співвідношення (1.61) виражає закон Гука для деформації розтягу (чи стиску). Коефіцієнт  $E$  називається модулем пружності (або модулем Юнга). Одиницею вимірювання модуля Юнга є паскаль:  $[E] = \text{Н/м}^2 = \text{Па}$ . Фізичне значення модуля Юнга: модуль пружності дорівнює такій нормальній напрузі, яку треба прикласти, щоб розтягнути тіло удвічі (тобто щоб відносне видовження дорівнювало одиниці), якби такі великі деформації були можливі. Насправді вже за значно менших деформацій відбувається руйнування тіла.

Модуль Юнга  $E$  та коефіцієнт Пуассона  $\mu$  повністю характеризують пружні властивості ізотропного матеріалу. Усі інші пружні постійні можуть бути виражені через  $E$  та  $\mu$ . Зокрема, модуль всебічного стиску  $K$  (що характеризує об'ємний стиск як  $\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{K}$ , де  $p$  – тиск) виражається через  $E$  та  $\mu$  співвідношенням:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}.$$

Модуль зсуву  $G$  виражається через  $E$  та  $\mu$  співвідношенням:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (1.62)$$

Дослід засвідчує, що закон (1.61) є справедливим лише в певному інтервалі напруг. Якщо розтягувати стрижень, послідовно збільшуючи від нуля прикладену до нього силу, то щоразу після зняття навантаження

деформація зникає. Однак за деякої напруги  $\sigma \geq \sigma_{пр}$  з'являється залишкове видовження. Ця напруга  $\sigma_{пр}$  називається межею пружності.

На рис. 1.56 графічно відтворено залежність деформації від напруги у вигляді *діаграми розтягу*. Слід зауважити, що закон Гука справедливий лише на ділянці пружності – ділянці пропорційності, для  $0 \leq \sigma \leq \sigma_{п}$ , де  $\sigma_{п}$  – межа пропорційності.

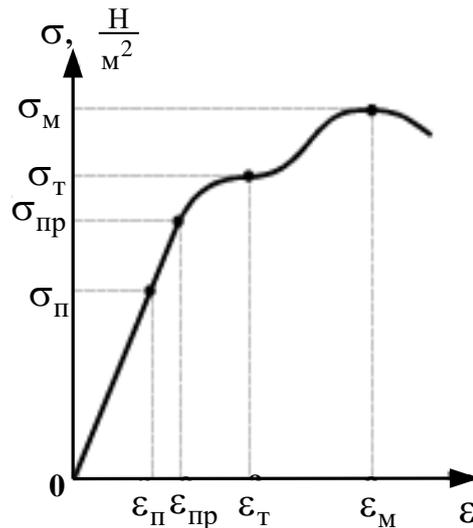


Рис.1.56

За зростання навантаження спостерігається явище текучості, тобто зростання довжини зразка за постійного навантаження  $\sigma_{т}$ , що

називається *межею текучості*. Зауважимо, що течія матеріалу відбувається рівномірно по всій довжині стрижня. За межами ділянки текучості подальше видовження стрижня супроводжується зростанням  $\sigma$ , однак деформації будуть розподілені неоднаково по довжині стрижня – у якомусь місці з'являється шийка (рис. 1.57). За напруги  $\sigma_{м}$ , що називається межею міцності, у цьому послабленому перерізі стається розрив.



Рис. 1.57

Напругу, яку матеріал здатний витримати на практиці, не руйнуючись і не зазнаючи значної деформації, називають *допустимою* і позначають  $[\sigma]$ . Зазвичай  $[\sigma] < \sigma_{пр}$ , й усі розрахунки проводять на підставі закону Гука. Щоб забезпечити міцність за будь-яких обставин, допустима напруга вибирається як частина межі міцності  $\sigma_{м}$ , зокрема, для металів  $[\sigma] = 0,2 \cdot \sigma_{м}$ , а для дерева –  $[\sigma] = 0,1 \cdot \sigma_{м}$ . Число, що вказує, у скільки разів межа міцності більша за допустиму напругу, називається *запасом міцності*:

$$n = \sigma_1 / [\sigma].$$

Слід зазначити, що найбільші деформації, які може витримати матеріал, визначаються протяжністю ділянки текучості. Якщо ділянка текучості велика, то матеріал називається *пластичним*. Такий матеріал, як, наприклад, сталь, здатний витримати значні навантаження, не

руйнуючись. Якщо ділянка текучості є незначною, матеріал вважають крихким. Крихкі матеріали, наприклад чавун, руйнуються за деформацій  $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{пр}}$ . Однак у деяких випадках і пластичні матеріали можуть руйнуватися через незначні деформації  $\varepsilon \approx \varepsilon_{\text{пр}}$  (наприклад, сталь за температури, нижчої за мінус 45 °С).

### 1.6.2. Деформація зсуву

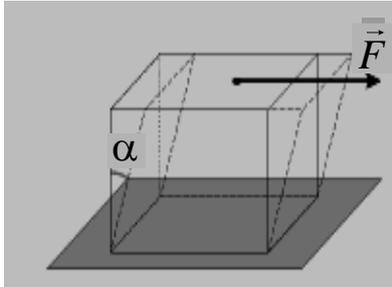


Рис. 1.58

Деформацію зсуву можна спостерігати у досліді з гумовим кубиком, якщо закріпити його, наприклад, нижню основу, а до верхньої основи прикласти дотичну силу (рис. 1.58). Деформація у такому випадку буде характеризуватися параметром  $\gamma = \text{tg}\alpha$ , який залежить від кута зсуву  $\alpha$ , що переважно є малим, а тому  $\gamma \approx \alpha$ .

На ділянці пропорційності зв'язок між деформацією і тангенціальною напругою описується співвідношенням, аналогічним до (1.61):

$$\gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{S} = \frac{1}{G} \tau,$$

де  $\tau = F / S$  – тангенціальна (дотична) напруга, аналогічна за змістом до нормальної напруги  $\sigma$ , а  $G$  – модуль зсуву, що, як і модуль Юнга  $E$ , є характеристикою матеріалу. Модуль зсуву дорівнює такій тангенціальній напрузі, за якої кут зсуву виявився б рівним 45° ( $\text{tg}\alpha = 1$ ).

У табл. 1.2 наведено характеристики пружності і міцності деяких (зокрема й будівельних) матеріалів.

На підставі даних табл. 1.2 можна зробити два важливі висновки.

*По-перше*, оскільки, межа пропорційності  $\sigma_{\text{п}}$  на 2-3 порядки менша за модуль пружності, то в межах пружної деформації  $\varepsilon_{\text{пр}} < 10^{-3} \div 10^{-2}$ .

*По-друге*, спостерігається кореляція між величинами модуля пружності  $E$  та модуля зсуву  $G$  – чим більше  $E$ , тим більше і  $G$ , що підтверджується формулою (1.62).

Деформації розтягу та зсуву виникають в практично важливих випадках згину балок будівельних конструкцій і скручування валів машин та механізмів.

Таблиця 1.2.

Матеріал	Модуль пружності, $E$ , $10^8$ Па	Модуль зсуву, $G$ , $10^8$ Па	Межа пропорційності, $\sigma_p$ , $10^8$ Па	Межа текучості, $\sigma_t$ , $10^8$ Па	Межа міцності за розтягування, $\sigma_m$ , $10^8$ Па
Сталь	2200	850	7,5 і вище	–	до 17
Трос сталевий	–	–	–	–	9,8
Чавун	750 – 1050	290 – 400	–	–	1,2 – 2,4
Дерево уздовж волокна	140	6	–	–	–
Бетон	150 – 400	250 – 260	–	–	–
Цегляна кладка	30	–	–	–	–

### 1.6.3. Деформація кручення

Деформації кручення виникають за скручування валів машин і механізмів, коли за допомогою валу передається обертове зусилля від однієї частини механізму до іншої. На відміну від *однорідних* деформацій стиску та зсуву, деформація кручення та згину є *неоднорідною*. Це означає, що за цього виду деформації навантаження всередині тіла змінюються від точки до точки.

Якщо, наприклад, одну основу вала, виготовити у вигляді круглого стрижня радіусом  $R$  і довжиною  $l$ , закріпити, а до протилежної основи прикласти момент зовнішніх сил  $M$ , то вал буде деформуватися (рис. 1.59). Закон Гука для деформації кручення може бути записаний у вигляді формули:

$$M = f\varphi,$$

де  $f$  – постійна для даного стрижня величина, що називається *модулем кручення*.

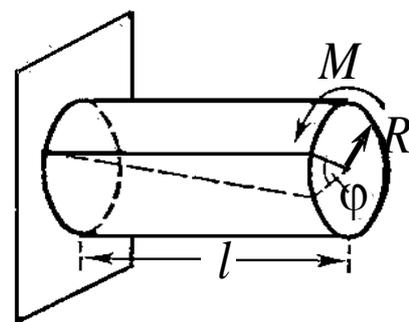


Рис. 1.59

На відміну від раніше введених модулів  $E$  та  $G$  і коефіцієнта  $\mu$ , модуль кручення залежить не лише від матеріалу стрижня, й від його геометричних розмірів:

$$f = \frac{\pi G}{2l} R^4.$$

Експериментально модуль кручення можна виміряти, спостерігаючи крутильні коливання важкого тіла, підвішеного до нижнього кінця стрижня чи дроту. Ці коливання будуть гармонійними з періодом:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}}.$$

Якщо момент інерції тіла  $I$  відомий, то, вимірявши період коливань  $T$ , можна вирахувати модуль кручення  $f$ , згідно з останньою формулою.

#### 1.6.4. Деформація згину

Балка, тобто стрижень, який зазнає згину, деформується так, що спочатку прямі осі балки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $NN_1$  стають колами із центром у т.  $O$  (рис. 1.60). Розглянемо згин балки під дією зовнішньої сили  $\vec{F}$ , нехтуючи її вагою. Усі волокна, розміщені нижче від лінії  $NN_1$ , видовжуються (у них виникають напруги розтягу), а волокна, вище за цю лінію, стискаються (у них виникають напруги стиску). Довжина лінії  $NN_1$  залишається незмінною. Ця лінія називається *нейтральною лінією*. Переріз (недеформованого) стрижня площиною, що проходить через неї перпендикулярно до площини рисунка, називається *нейтральним перерізом*.

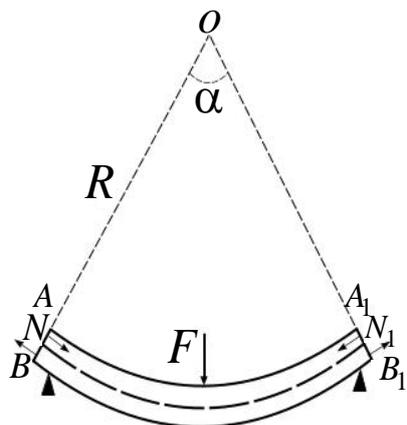


Рис. 1.60

Нехай  $R$  – радіус кривизни нейтральної лінії  $NN_1$ . Тоді її довжина  $l_0 = R \cdot \alpha$ , де  $\alpha$  – центральний кут, що спирається на дугу  $NN_1$ . Розглянемо волокно стрижня, що на відстані  $u$  від нейтрального перерізу. (Величина  $u$  додатна, якщо волокно міститься вище від нейтрального перерізу, і від’ємна, якщо воно знаходиться нижче). Довжина волокна не надто товстого стрижня становитиме

$l = (R+y)\alpha$ , а видовження  $\Delta l = l - l_0 = y\alpha$ . Натяг, що діє уздовж даного волокна, визначається так:  $\tau = E \frac{\Delta l}{l_0} = Ey \frac{\alpha}{l_0}$ ,

або: 
$$\tau = E \frac{y}{R}. \quad (1.63)$$

Таким чином, натяг змінюється лінійно відповідно відстані  $y$ . Натяг нижчий за нейтральний переріз, – від’ємний, тобто є тиском. Будемо вважати, що сума усіх сил натягу, що діють у кожному нормальному перерізі стрижня, дорівнює нулю, тобто  $\int \tau dS = 0$ , або, згідно з (1.63),  $\int y dS = 0$ , де  $dS$  – елемент площі нормального поперечного перерізу.

Інтегрування здійснюється по всьому поперечному перерізу. Очевидно, що нейтральна лінія та нейтральний переріз проходять через центр тяжіння поперечного перерізу стрижня. Із співвідношення  $\int \tau dS = 0$  випливає, що момент сил натягу  $M_\tau$ , що діють на переріз  $AB$ , не залежить від того, відносно якої осі він береться. Для обчислення  $M_\tau$  краще взяти вісь, перпендикулярну до площини рисунка, яка проходить через точку  $O_1$ . Отже,

$$M_\tau = \int y \tau dS = \frac{E}{R} \int y^2 dS,$$

або 
$$M_\tau = \frac{\tau}{y} I = \frac{E}{R} I, \quad (1.64)$$

де введено позначення

$$I = \int y^2 dS. \quad (1.65)$$

Величина  $I$  називається *моментом інерції поперечного перерізу стрижня* за аналогією з відповідною величиною, що вводиться для розгляду обертання тіла навколо нерухомої осі. Однак, на відміну від останньої величини, що має вимірюватися в  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ , величина (1.65) є суто геометричною із розмірністю четвертого ступеня довжини.

Відношення  $I/y$ , яке залежить від розмірів і форми перерізу, називається *осьовим моментом опору*:

$$J = \frac{I}{y},$$

а рівняння (1.64) можна представити у вигляді:

$$M = J \tau. \quad (1.66)$$

Для розрахунку міцності балок треба знати розподіл напруг  $\tau$ , що виникають за відомих моментів зовнішніх сил. Такий розподіл можна отримати з рівності (1.64):

$$\tau(x, y) = \frac{M(x)}{I} y.$$

Якщо поперечний переріз бруса має форму прямокутника із шириною  $a$  і висотою  $b$ , то:

$$I_{\square} = \frac{ab^3}{12}. \quad (1.67)$$

Для колового поперечного перерізу радіуса  $r$ :

$$I_{\circ} = \frac{\pi r^4}{4}.$$

Відповідні їм осьові моменти опору:

$$J_{\square} = \frac{ab^2}{6} \text{ та } J_{\circ} = \frac{\pi r^3}{4}. \quad (1.68)$$

Із (1.66) випливає, що міцність балок зростає у міру зростання осьового моменту опору, причому згідно з (1.68) міцність балки прямокутного перерізу досягається більш ефективно завдяки збільшенню її висоти  $b$ .

Спрямуємо вісь  $X$  уздовж лінії недеформованого стрижня. Вісь  $Y$  спрямуємо до неї перпендикулярно і розмістимо в площині згину. Тоді рівняння нейтральної лінії зігнутого стрижня можна представити у вигляді  $y = y(x)$ , що вираховується згідно з відомою формулою:

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Якщо згин малий ( $y' \ll 1$ ), то квадратом похідної можна знехтувати. У цьому наближенні:

$$M_{\tau} = EIy''.$$

Остання формула застосовується для розрахунку зміщення вільного кінця балки – стріли прогину – під дією зосередженої сили, прикладеної до балки. У випадку, зображеному на рис. 1.61, стріла прогину визначається за формулою

$$\lambda = \frac{Fl^3}{3EI}.$$

Якщо балка має прямокутний переріз, то її стріла прогину різко зменшується у міру зростання величини висоти балки  $b$ , оскільки  $I \sim b^3$  (див. 1.67).

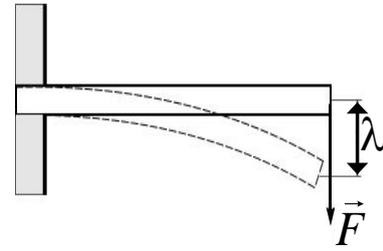


Рис.1.61

Для заощадження матеріалу іноді використовують порожнисті балки. Така балка є значно легшою за суцільну, а її осьовий момент опору (див. 1.67) залишається досить великим. Для підвищення жорсткості використовують *ферми* (рис. 1.62). Ферми – це досить легкі ажурні конструкції, висота яких може сягати десятків метрів.

Як приклад на рис. 1.63 показано типову конструкцію підвісного моста. Потрібна жорсткість такого моста досягається завдяки фермам, що складаються з жорстких елементів і тросів. Рекордну довжину – 3910 метрів – має міст, що з'єднує два острови в Японії. Довжина його центрального прольоту  $L$  становить 1990 метрів за висоти опор  $b = 297$  метрів.

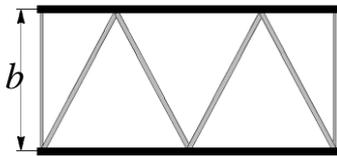


Рис. 1.62

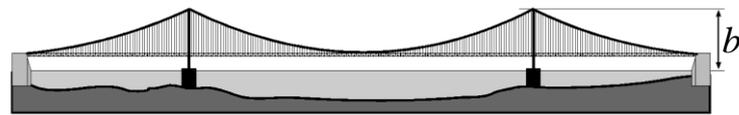


Рис. 1.63

### 1.6.5. Енергія пружної деформації

Сили пружності, що виникають в zdeформованому тілі, здатні виконати роботу. Потенціальною енергією пружної деформації називається енергія, накопичена в тілі внаслідок пружних деформацій, викликаних дією зовнішніх сил. Ця енергія дорівнює роботі, яку виконують сили пружності для відновлення форми тіла.

Розглянемо пружну деформацію розтягу тіла уздовж осі  $x$  на величину  $\Delta l$ . Робота сил пружності визначається так:

$$A = \int_0^{\Delta l} F dx.$$

Згідно із законом Гука  $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}$ . Звідси  $F = \frac{ES}{l} x$ .

Тоді робота визначається так:

$$A = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l} x dx = \frac{ES}{l} \frac{\Delta l^2}{2} = \frac{ES \Delta l^2}{2l} = \frac{E \varepsilon^2}{2} V.$$

Отже,

$$U = \frac{E \varepsilon^2}{2} V.$$

Густина енергії (об'ємна густина пружної енергії) визначається як

$$\omega = \frac{U}{V} = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Пружна енергія деформації зсуву записується аналогічно:

$$U = \frac{G \gamma^2 V}{2}, \quad \omega = \frac{G \gamma^2}{2} = \frac{\tau^2}{2G}.$$

Пружна енергія деформації кручення:

$$U = \frac{M \varphi}{2} = \frac{M^2}{2f} = \frac{M^2 l}{\pi G R^4},$$

де  $f$  – модуль кручення.

### 1.6.6. Аеро- та гідродинаміка

Під дією зовнішніх сил в рідинах та газах, як й у твердих тілах, може виникати внутрішня напруга. Розглядаючи рідини та гази як суцільні середовища, слід зауважити, що рідини, не маючи певної форми, зберігають практично незмінним свій об'єм. У багатьох важливих випадках їх можна розглядати як нестисливі. Гази не мають ні певної форми, ні фіксованого об'єму. Рідина, як і газ, унаслідок зовнішньої дії здатна у рухатися, при цьому тиск у рідині та швидкість її частинок можуть змінюватися складним чином від точки до точки. Тому для опису течії рідини чи газу використовують різні моделі. У найпростішій моделі рідина (або газ) вважаються *нестисливими* та *ідеальними*, тобто без внутрішнього тертя між рухомими шарами. Рух рідини називається *течією*. В результаті течії ідеальної рідини не відбувається перетворення механічної енергії у внутрішню, тому справджується закон збереження повної механічної енергії. Частинки рідини переміщуються вздовж траєкторій, які називаються *лініями течії* (рис. 1.64), дотичні в кожній точці до ліній течії збігаються з напрямком швидкості частинок в цих точках. Якщо картина ліній течії з часом не

змінюються, тобто в рідині не утворюються вихори, то така течія називається *стаціонарною*. Досліди підтверджують, що стаціонарні течії виникають тільки за досить малих швидкостей руху рідини. Наслідком закону збереження енергії для стаціонарної течії ідеальної та нестисливої рідини є рівняння Бернуллі.

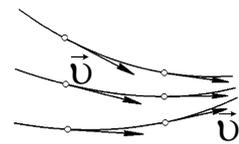


Рис.1.64

Розглянемо стаціонарну течію ідеальної нестисливої рідини по трубі змінного перерізу (рис. 1.65). Різні частини труби можуть перебувати на різній висоті.

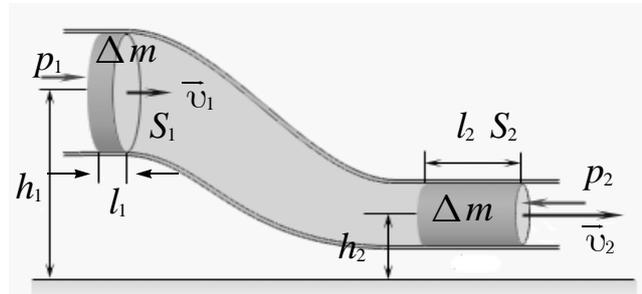


Рис. 1.65

За проміжок часу  $\Delta t$  рідина в трубі з перерізом  $S_1$

переміститься на  $l_1 = v_1 \Delta t$ , а в трубі з перерізом  $S_2$  – на  $l_2 = v_2 \Delta t$ , де  $v_1$  та  $v_2$  – швидкості часток рідини в трубах. Умова нестисливості означає, що об'єм рідини, який протікає за проміжок часу  $\Delta t$  через переріз  $S_1$  дорівнює об'єму рідини, який протікає за той самий проміжок часу  $\Delta t$  через переріз  $S_2$ , тому:

$$\Delta V = l_1 S_1 = l_2 S_2, \quad (1.69)$$

або

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \quad (1.70)$$

Рівняння (1.70) називається *рівнянням нерозривності течії*.

Рівняння нерозривності течії можна застосовувати до реальних рідин і навіть газів, якщо їхньою стисливістю можна знехтувати. Відповідний розрахунок засвідчує, що під час руху рідин і газів із швидкостями, меншими за швидкість звуку, їх із достатньою мірою точності можна вважати нестисливими.

Таким чином, під час переходу рідини з ділянки труби з більшим перерізом до ділянки з меншим перерізом швидкість течії зростає, тобто рідина рухається із прискоренням. Отже, на рідину діє сила. У горизонтальній трубі ця сила може виникнути тільки через різницю тисків у широкій і вузькій ділянках труби. Тиск у широкій ділянці труби має бути більшим, ніж на вузькій ділянці. Якщо ділянки труби розміщені на різній висоті, то прискорення рідини виникає завдяки одночасній дії сили тиску та сили тяжіння.

Оскільки рідина є ідеальною, тобто вона тече по трубі без тертя, то до її течії можна застосувати закон збереження механічної енергії.

Під час переміщення рідини сили тиску виконують роботу:

$$A = F_1 l_1 - F_2 l_2 = p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t,$$

згідно з (1.69) ця формула набуває вигляду:

$$A = (p_1 - p_2) \Delta V.$$

За час  $\Delta t$  у виділеній частині рідини, що перебуває між перерізами  $S_1$  і  $S_2$ , маса рідини  $\Delta m$  переміщується з однієї частини труби з перерізом  $S_1$  в іншу частину з перерізом  $S_2$  (заштриховані об'єми на рис. 1.65). Тоді у разі стаціонарної течії закон збереження механічної енергії для цієї маси буде:

$$E_1 - E_2 = A,$$

де  $E_1$  і  $E_2$  – повні механічні енергії маси  $\Delta m$  у полі тяжіння:

$$E_1 = \frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_1, \quad E_2 = \frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2.$$

Оскільки робота сил тиску призводить до зміни повної механічної енергії, то з попередніх рівнянь можна отримати формулу:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2.$$

Це і є *рівняння Бернуллі*. З нього випливає, що сума

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}$$

залишається незмінною уздовж всієї труби течії стаціонарної рідини.

Завдяки наведеному виводу рівняння Бернуллі стає більш зрозумілим фізичний зміст членів, що входять до нього. Так, статичний тиск  $p$  чисельно дорівнює роботі сил тиску, що здійснюється над одиничним об'ємом рідини; динамічний тиск  $\rho v^2/2$  є кінетичною енергією одиниці об'єму, а величина  $\rho g h$  є потенціальною енергією одиничного об'єму в полі сили тяжіння.

Величина  $\rho v^2/2$  називається динамічним тиском, а величина  $p$  – статичним тиском у рідині. Статичний тиск може бути виміряний за допомогою манометра, що переміщується разом з рідиною. Практично тиск у різних перерізах труби вимірюється за допомогою манометричних трубок, вставлених у бічні стінки труби, крізь яку тече рідина, так, щоб нижні кінці трубок були паралельні лініям течії рідини.

З рівняння Бернуллі випливає, що тиск у рідині, яка тече по горизонтальній трубі змінного перерізу, є вищим в тих місцях течії, в яких швидкість її руху менша, і навпаки, тиск є меншим в тих місцях, у яких швидкість більша.

### 1.6.7. Сили в'язкого тертя

У попередньому розділі ми розглядали рух рідини і газу, знехтувавши силами в'язкого тертя. Тим часом сили, що діють між частинками рухомої рідини, можуть кардинально впливати і на розподіл швидкостей в потоці рідини, і на обтікання рідиною тіл, розміщених в рухомому потоці.

Ньютон з'ясував дослідним шляхом, що сили в'язкого тертя перешкоджають ковзанню одної відносно другої двох паралельних площин, простір між якими заповнено рідиною (рис. 1.66). Так, під час руху зі

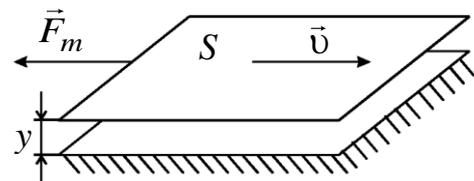


Рис. 1.66

швидкістю  $v$  верхньої пластини з площею  $S$  щодо нижньої виникає сила в'язкого тертя, спрямована проти руху, яка дорівнює:

$$F_m = \eta \frac{dv}{dy} S. \quad (1.71)$$

Ця сила пропорційна площі  $S$  та зміні швидкості на одиницю довжини в поперечному напрямку  $dv/dy$  (градієнту швидкості в напрямку, перпендикулярному руху). Коефіцієнт пропорційності  $\eta$  називається динамічною в'язкістю. Із формули (1.71) випливає, що він чисельно дорівнює силі в'язкого тертя, що виникає між шарами площею  $S = 1$  за градієнта швидкості  $dv/dy = 1 \text{ c}^{-1}$ . Одиниці вимірювання коефіцієнта динамічної в'язкості:  $[\eta] = \text{Па} \cdot \text{с}$ .

Важливо відзначити, що частинки рідини, прилеглі до верхньої пластини (рис. 1.67), рухаються разом з нею зі швидкістю  $v$  (захоплюються пластиною), тоді як частинки рідини поблизу нижньої (нерухомої) пластини перебувають у спокої (прилипають до пластини). Якщо подумки

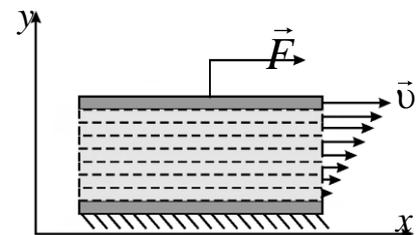


Рис. 1.67

поділити рідину на паралельні плоскі шари, що рухаються рівномірно, то неважко зрозуміти, що кожен вище розміщений шар захоплює за собою нижній сусідній шар з силою  $F_m$ . Одночасно нижній шар гальмує рух верхнього шару з силою, чисельно рівною  $F_m$ . На кожен шар діють зверху і знизу дві рівні, але протилежні сили. Швидкість шарів наростає лінійно пропорційно висоті, а сила тертя передається від одного шару до іншого. Як результат, зусилля  $F = F_m$ , прикладене до верхньої пластини, передається на нижню пластину. Коефіцієнт в'язкості рідини  $\eta$  визначається експериментально, наприклад, за швидкістю її витікання із трубки певного розміру. Як свідчить досвід, від нагрівання в'язкість рідини зменшується, а газів – збільшується. Пояснення різниці коефіцієнтів в'язкості наведено в курсі "Молекулярна фізика".

### 1.6.8. Види течії в'язкої рідини

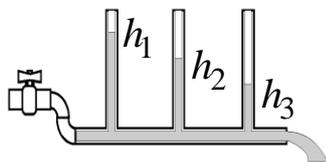


Рис.1.68

Розглянемо течію в'язкої рідини, вдавшись безпосередньо до досліду. З'єднаємо тонку горизонтальну скляну трубу з впаяними в неї вертикальними манометричними трубками за допомогою гумового шланга до водопровідного крана (рис. 1.68).

За невеликої швидкості течії можна легко помітити зниження рівня води в манометричних трубках у напрямку течії ( $h_1 > h_2 > h_3$ ). Це вказує на наявність горизонтального градієнта тиску – статичний тиск рідини зменшується уздовж потоку. Тому для стаціонарності течії на кінцях труби потрібно підтримувати постійну різницю тиску, що зрівноважує сили внутрішнього тертя, які виникають в течії рідини. Зменшення тиску уздовж труби треба брати до уваги, наприклад, у водогоні та газопостачанні у відповідних гідродинамічних розрахунках водогонів і газопроводів, а також у проектуванні нафтопроводів.

Спостерігається два види течії рідини (чи газу). В одних випадках рідина ніби розділяється на шари, які ковзають один відносно одного, не перемішуючись. Така течія називається *ламінарною*. Якщо в ламінарний потік ввести забарвлену струмину, то вона зберігається, не розмиваючись, по усій довжині потоку, оскільки частинки рідини в ламінарній течії не переходять із одного шару в інший. Ламінарна течія є стаціонарною.

За зростання швидкості чи збільшення поперечних розмірів потоку характер течії суттєво змінюється – виникає інтенсивне перемішування рідини. Така течія називається *турбулентною*. У турбулентній течії швидкість частинок в кожному місці увесь час хаотично змінюється – течія нестационарна. Якщо в турбулентний потік ввести забарвлену струмину, то уже на невеликій відстані від місця її введення забарвлена рідина рівномірно розподілиться по усьому перерізу потоку.

Англійський учений Рейнольдс установив, що характер течії залежить від значення безрозмірної величини:

$$Re = \frac{\rho l v}{\eta}, \quad (1.72)$$

де  $\rho$  – густина рідини (чи газу),  $v$  – середня (по перерізу труби) швидкість потоку,  $\eta$  – коефіцієнт в'язкості рідини,  $l$  – характерний для поперечного перерізу розмір, наприклад, сторона квадрата за квадратного перерізу, радіус або діаметр за круглого перерізу тощо.

Величина (1.72) називається *числом Рейнольдса*. За малих значень числа Рейнольдса спостерігається ламінарна течія. Починаючи із деякого певного значення  $Re$ , яке називається критичним, течія набуває турбулентного характеру. Якщо за характерний розмір для круглої труби узято радіус  $r$ , критичне значення числа Рейнольдса становитиме близько 1000. Число Рейнольдса може слугувати критерієм подібності для течії рідини у трубах, каналах тощо. Характер течії різних рідин (чи газів) у трубах різних перерізів є абсолютно однаковим, якщо кожній течії відповідає одне і те ж значення  $Re$ .

#### *Ламінарна течія рідин і газів по трубах. Формула Пуазейля*

Швидкість руху рідини у круглій трубі дорівнює нулю поблизу стінок труби та є максимальною на осі труби, причому розподіл швидкостей  $v(r)$  має параболічний характер. Виділимо уявно циліндричний об'єм рідини за радіусом  $r$  і довжиною  $l$  (рис. 1.69). За стаціонарної течії у трубі постійного перерізу швидкості усіх частинок рідини залишаються незмінними. Отже, сума зовнішніх сил,

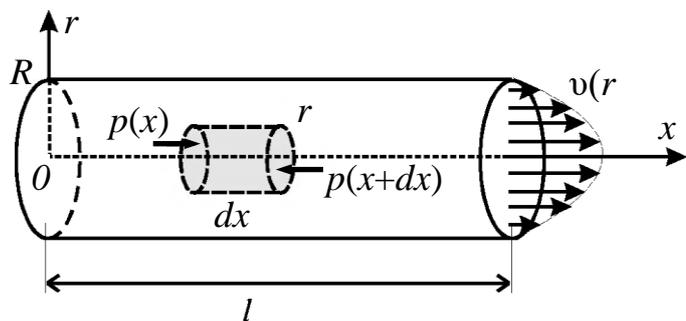


Рис. 1.69

прикладених до будь-якого об'єму рідини, дорівнює нулю. Тому прирівняємо до нуля суму сил в'язкості і тиску, що діють на циліндричний об'єм рідини:

$$p(x) - p(x + dx)\pi r^2 + \eta 2\pi r dx \frac{dv}{dr} = 0.$$

Із цього виразу можна отримати формулу, що визначає витрати рідини – об'єм рідини, що протікає через переріз за одиницю часу:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{l}. \quad (1.73)$$

Це співвідношення називається *формулою Пуазейля*.

*Турбулентна течія*

Якщо швидкість течії велика, течія в трубі стає турбулентною і формула Пуазейля не застосовується. За такої різниці тиску потік  $Q$  в турбулентній течії виявляється меншим, ніж розрахований згідно з формулою (1.73). Це пояснюється тим, що в турбулентній течії тертя є значно сильнішим, ніж у ламінарній. У турбулентній течії швидкість в певній точці хаотично змінюється з часом, однак середня швидкість  $\langle v \rangle$  залишається спрямованою уздовж труби. Вона залишається постійною уздовж перерізу труби, і лише в тонкому шарі поблизу стінок спадає до нуля (рис. 1.70).

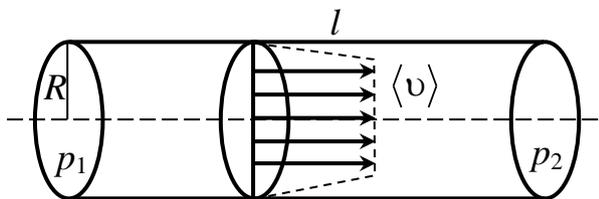


Рис. 1.70

### 1.6.9. Рух твердих тіл у рідинах та газах

Коли тіло рухається у рідині (газі), на нього діє сила з боку середовища. Ця сила називається силою лобового опору. Вона виникає внаслідок в'язкості рідини, а також (за великих швидкостей) внаслідок виникнення турбулентності позаду тіла.

Якщо потік, який обтікає тіло, є ламінарним, сила в'язкого тертя прямо пропорційна швидкості об'єкта. Зокрема, для сфери радіуса  $r$  сила в'язкого тертя визначається за формулою Стокса:

$$F = 6\pi r \eta v.$$

За більших швидкостей у потоці позаду тіла відбувається відрив ліній течії, виникають вихори, що призводить до інтенсивних

турбулентних рухів (рис. 1.71). Тому для сфери сила лобового опору буде більшою, ніж за формулою Стокса. Однак щодо тіл обтічної форми таке завихрення є меншим, отже, сила опору зменшується. За турбулентності сила лобового опору, як

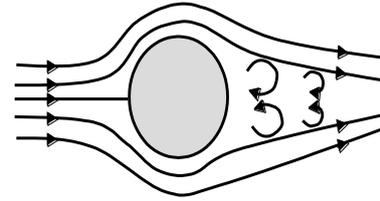


Рис. 1.71

свідчить досвід, зростає пропорційно квадрату швидкості:  $F \sim v^2$ . Таким чином, лобовий опір зростає значно швидше із зростанням швидкості, ніж за ламінарного обтікання. Коли число Рейнольдса досягає  $10^6$ , лобовий опір стрімко зростає; при цьому турбулентність виникає не лише позаду тіла, а й у шарі рідини (чи газу), що безпосередньо прилягає до тіла – у так званому *приграничному шарі* – уздовж усієї поверхні тіла. На практиці силу лобового опору визначають за формулою:

$$F = C_x S \rho v^2 / 2.$$

де  $C_x$  – коефіцієнт лобового опору для тіла певної форми;  $S$  – площа поперечного перерізу тіла.

У таблиці 1.3 наведено коефіцієнти лобового опору для тіл різної форми. Очевидно, що найменший коефіцієнт лобового опору має симетричне краплеподібне тіло з тупим носом та загостреним хвостом. Обтікаючи таке тіло, потік замикається позаду нього, заважаючи падінню тиску за тілом.

Таблиця 1.3

	Тіло	$C_x$
	диск	1,11
	півсфера	1,35...1,40
	півсфера	0,30...0,40
	сфера	0,4
	краплеподібне	0,1
	краплеподібне	0,045

### Піднімальна сила крила літака

Рівняння Бернуллі можна застосовувати і для опису потоку газу (вважаючи його за певних умов нестисливим). Таким чином, рівняння Бернуллі справджується для досить широкого класу завдань аеродинаміки. Одним з таких завдань є вивчення сил, що діють на крило літака. Теоретичне розв'язання цього завдання є надзвичайно складним, тому для дослідження сил зазвичай вдаються до експериментальних

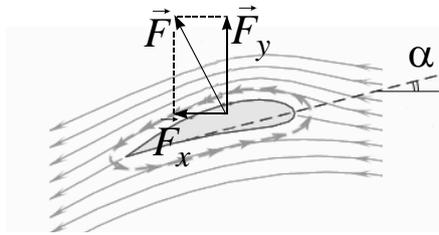


Рис. 1.72

методів. За допомогою рівняння Бернуллі можна дати лише пояснення виникненню *піднімальної сили* крила. На рис. 1.72 зображено лінії течії повітря, що обтікають крило літака. Завдяки спеціальному профілю крила та наявності *кута атаки*, тобто *кута нахилу крила відносно течії*

*повітря*, яке набігає, швидкість повітряної течії над крилом виявляється більшою, ніж під крилом. Тому на рис. 1.84 лінії течії над крилом розміщуються ближче одна до одної, ніж під крилом. З рівняння Бернуллі випливає, що тиск у нижній частині крила буде більшим, ніж у верхній; унаслідок цього виникає сила, яка діє на крило. Вертикальна складова цієї сили називається піднімальною силою. Піднімальна сила може компенсувати силу тяжіння, яка діє на літак, і тим самим забезпечити можливість польоту важких літальних апаратів у повітрі. Горизонтальна складова являє собою силу опору середовища.

Теорія піднімальної сили крила літака була створена М.Є. Жуковським. Він довів, що істотну роль в обтіканні крила відіграють сили в'язкого тертя в поверхневому шарі. У результаті їхньої дії виникає круговий рух (циркуляція) повітря навколо крила (на рис. 1.72 зображено штриховими стрілками). У верхній частині крила швидкість циркуляції повітря складається із швидкістю течії, що набігає, у нижній частині ці швидкості спрямовані в протилежні боки. Це зумовлює різницю тисків і виникнення підйомної сили.

### Запитання для самоперевірки

1. Що таке радіус-вектор матеріальної точки?
2. Запишіть рівняння руху матеріальної точки у векторній формі.
3. Дайте визначення шляху та переміщення.

4. Що таке миттєва швидкість та миттєве прискорення?
5. Визначте тангенціальну та нормальну складову прискорення під час криволінійного руху.
6. Що таке кутова швидкість, кутове прискорення?
7. Наведіть рівняння руху точки по колу.
8. Наведіть формули зв'язку кутових та лінійних величин.
9. Дайте визначення імпульсу в класичній механіці.
10. Запишіть перетворення Галілея.
11. Запишіть II та III закони Ньютона.
12. Запишіть формулу моменту імпульсу відносно точки.
13. Запишіть формулу моменту сили відносно точки й осі.
14. Як визначається момент інерції твердого тіла відносно нерухомої осі? Наведіть приклад.
15. Запишіть основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі.
16. Запишіть і сформулюйте теорему Штейнера.
17. Запишіть закон збереження імпульсу для замкненої системи.
18. Запишіть закон збереження моменту імпульсу для замкненої системи.
19. Дайте визначення поняття механічної роботи.
20. Що називається кінетичною енергією поступального та обертального рухів абсолютно твердого тіла?
21. Дайте визначення потенціальної енергії.
22. Чому дорівнює потенціальна енергія пружно деформованого тіла та тіла в полі тяжіння Землі поблизу її поверхні?
23. Запишіть формулу зв'язку сили та потенціальної енергії.
24. Запишіть і поясніть закон збереження повної механічної енергії.
25. Запишіть закон всесвітнього тяжіння та поясніть його.
26. Які є види деформації?
27. Запишіть закон Гука.
28. Наведіть приклад застосування теорії пружності у будівництві.
29. Запишіть рівняння нерозривності та рівняння Бернуллі та поясніть. Наведіть приклад застосування обох рівнянь у будівництві.
30. Запишіть закон Ньютона для сили в'язкого тертя і поясніть його.
31. Запишіть формулу сили Стокса.



## Розділ 2. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА

Теоретичне обґрунтування матеріалознавчих завдань, які доводиться розв'язуватись інженеру-будівельнику в практичній діяльності, повинно базуватись на знаннях про будову та властивості речовини. Ці властивості вивчаються в таких розділах фізики, як молекулярна фізика та термодинаміка. Молекулярна фізика і термодинаміка дають уявлення про найбільш загальні (фундаментальні) закономірності, пов'язані з будовою речовини, тому ці дисципліни становлять основу природних і технічних наук, таких як фізична хімія, матеріалознавство, теплотехніка, будівельна теплотехніка тощо.

### **2.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ**

#### **2.1.1. Статистичний і термодинамічний методи дослідження**

Молекулярна фізика та термодинаміка – це розділи фізики, в яких вивчаються властивості макроскопічних тіл, пов'язані з величезною кількістю частинок, з яких складаються тіла. Для дослідження цих властивостей застосовують два різні методи, які взаємно доповнюють один одного – статистичний і термодинамічний.

За *статистичного підходу* властивості тіл досліджують з огляду на те, що вони складаються з великої кількості частинок. Статистичні методи ґрунтуються на поняттях й величинах, що стосуються не окремих частинок, а їхніх великих сукупностей. Закони поведінки сукупностей великої кількості часток називаються статистичними закономірностями.

За *термодинамічного підходу* властивості тіл вивчають не розглядаючи їхню внутрішню структуру. Відповідний розділ фізики називається *термодинамікою*. Одним з основних законів термодинаміки є закон збереження енергії. Термодинаміка виникла в першій половині XIX століття і спочатку розвивалася як наука про перетворення тепла в механічну роботу, тобто як наука про теплові машини. У наш час термодинаміка вийшла далеко за межі цього технічного завдання і фактично займається вивченням тих загальних властивостей речовини, які не залежать від її атомно-молекулярної будови. З іншого боку, якщо потрібно застосувати закони термодинаміки до конкретної речовини, то

доводиться використовувати модель цієї речовини, тобто вдаватися до статистичного методу. Надалі, висвітлюючи властивості речовин, будемо вдаватися до обох методів.

### **2.1.2. Атомно-молекулярна теорія будови речовини**

В основі молекулярної фізики лежать поняття атома та молекули. Основні положення молекулярно-кінетичної теорії (МКТ) пояснюють суть цієї теорії. Ці положення підтверджено дослідами.

#### **Основні положення МКТ й основні характеристики молекул**

1. Усі речовини складаються із частинок (молекул).

Це положення має дослідне підтвердження.

- *Змішування різних рідин, наприклад, води й спирту, свідчить про те, що об'єм суміші є меншим за сумарний об'єм двох рідин до їхнього змішування. Це можна пояснити тим, що між молекулами рідин є порожнини і під час змішування рідин молекули однієї з них проникають у вільний простір між молекулами іншої рідини.*

- *Розширення тіл від нагрівання й стискання внаслідок охолодження можна пояснити також тим, що речовини складаються з молекул, розміщених одна від одної на деякій відстані. Під час нагрівання відстань між молекулами збільшується, а внаслідок охолодження зменшується.*

- *Прояв дискретної структури речовин можна спостерігати під електронними або іонними мікроскопами.*

2. Частинки (молекули) взаємодіють між собою.

Факти, що підтверджують це положення:

- *наявність сил притягання й відштовхування;*
- *існування трьох агрегатних станів: через різну взаємодію молекул проявляються різні властивості агрегатних станів (відбито в табл. 2.1).*

*Таблиця 2.1*

Газ	не має власної форми й об'єму
Рідина	не має власної форми, але має об'єм
Тверде тіло	має власну форму й об'єм

3. Частинки (молекули) безперервно й хаотично рухаються.

Деякі факти, що підтверджують це положення:

- молекули газу поширюються по всьому об'єму посудини;

- броунівський рух;
- дифузія.

*Молекула* – це найменша частинка речовини, що має всі її хімічні властивості. Однак кристалічні тіла, такі, наприклад, як кухонна сіль, хімічна формула якої NaCl, не є молекулами. Річ у тому, що хлорид натрію – це кристал, в якому атоми чергуються один з одним. У крупинці солі міститься однакова кількість атомів натрію і хлору, але молекул як таких немає. Цей факт важливий для розгляду теплового руху молекул. Тому у формулюванні основних положень МКТ найчастіше використовують термін «частинка».

*Розміри атомів і молекул* дуже малі. Якщо уявити молекулу у вигляді малої кульки, то її радіус становитиме  $10^{-10}$  м. Молекули складаються з атомів. Частинки, що утворюють атоми є електрони і ядра. Зазначимо, що електрон має радіус порядку  $10^{-13}$  м, а розмір ядра атома становить приблизно  $10^{-14} \div 10^{-15}$  м.

*Одиничною атомною масою*  $m_{\text{ат}}$  вважається 1/12 маси атома ізотопу вуглецю  ${}^{12}_6\text{C}$  :

$$m_{\text{ат}} = \frac{\text{маса ізотопу вуглецю } {}^{12}_6\text{C}}{12} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

*Відносна молекулярна маса*, або відносна маса молекули, є відношенням маси молекули до одиничної атомної маси:

$$m_r = \frac{m_{\text{МОЛ}}}{m_{\text{ат}}} = \frac{\text{маса молекули}}{\text{маса } {}^{12}_6\text{C}} \cdot 12.$$

*Кількість речовини.* Кількість речовини характеризується числом його структурних елементів. У системі СІ кількість речовини виражається в молях. **Моль** дорівнює такій кількості речовини, яка містить стільки ж структурних елементів, скільки атомів міститься в 0,012 кг ізотопу вуглецю  ${}^{12}_6\text{C}$ .

Поняття моля належить до структурних елементів системи. Тому потрібно говорити: «моль молекул», «моль атомів», «моль електронів» тощо. Таким чином, моль будь-якої речовини містить однакову кількість структурних елементів, яка називається *постійною Авогадро*, або *числом Авогадро*:

$$N_A = \frac{0,012}{12m_{\text{ат}}} \text{ моль}^{-1} = \frac{10^{-3} \text{ кг}}{1,66 \cdot 10^{-27}} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

*Молярна маса* – маса одного моля молекул речовини.

$$\mu = m_{\text{МОЛ}} \cdot N_A \cdot$$

Число молів молекул  $\nu$  пов'язане із числом молекул  $N$  деякої речовини формулою:

$$\nu = \frac{N}{N_A}, \text{ або } \nu = \frac{m_{\text{МОЛ}} N}{m_{\text{МОЛ}} N_A} = \frac{m}{\mu},$$

де  $m = m_{\text{МОЛ}} N$  – маса речовини.

### ***Термодинамічна система. Макроскопічні параметри стану термодинамічної системи***

Ті макроскопічні тіла, властивості яких вивчаються методами термодинаміки та молекулярної фізики, становлять *термодинамічну систему*. Приклад термодинамічної системи показано на рис. 2.1.

Термодинамічна система відокремлена від свого *оточення* дійсними або уявними межами, які можуть бути і рухомими, і нерухомими. Крізь межі термодинамічна система обмінюється енергією та речовиною з навколишнім середовищем. Залежно від характеру такого обміну розрізняють *відкриті*, *закриті* та *ізолювані* термодинамічні системи (рис. 2.2).

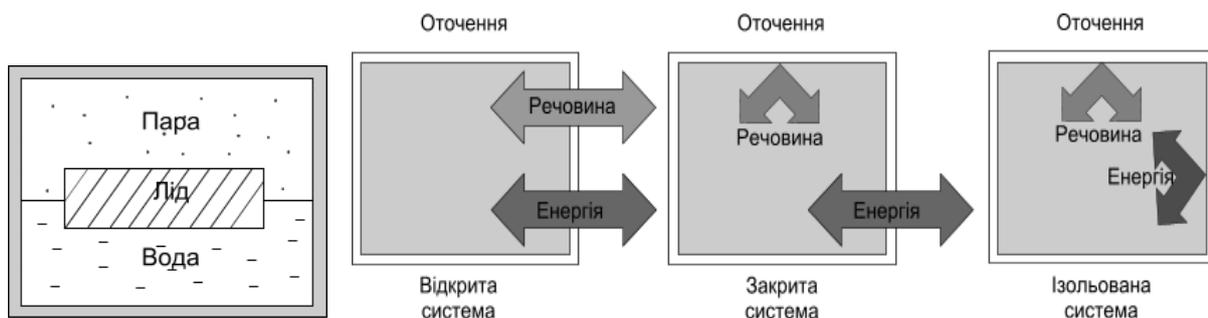


Рис. 2.1

Рис. 2.2

*Відкриті* термодинамічні системи – це системи, які обмінюються як енергією, так і речовиною з навколишнім середовищем.

*Закриті* термодинамічні системи – це системи, які не обмінюються речовиною з іншими системами.

*Ізолювані* термодинамічні системи – це системи, що не обмінюються з іншими системами ні енергією, ні речовиною.

*Адіабатично ізолюваними* називають ізолювані системи з рухомими межами, завдяки яким над системою можна виконувати механічну роботу.

Якщо частини системи мають однакові властивості, система називається *однорідною (гомогенною)*, але коли систему утворюють різні підсистеми, розділені поверхнями поділу, вона є *неоднорідною (гетерогенною)*. На рис. 2.1. наведено приклад гетерогенної термодинамічної системи. Підсистеми термодинамічної системи, однорідні за складом і властивостями і відокремлені поверхнями поділу від інших частин, називаються *фазами*. Інакше кажучи, *фаза – це гомогенна частина гетерогенної термодинамічної системи*. Наприклад, на рис. 2.1 наведена трифазна система, яка складається з твердої, рідкої та газоподібної фаз води.

Стан термодинамічної системи визначається її різними фізичними властивостями. *Макроскопічні величини, що характеризують ці властивості, називаються термодинамічними параметрами стану системи*. Таких параметрів стану термодинамічна система має велику кількість. Розглянемо спочатку найпростіші параметрів, які можуть бути досить легко вимірні – об'єм системи  $V$ , тиск на стінки посудини  $P$ , температура  $T$ , густина  $\rho$  тощо.

Термодинамічні параметри зазвичай поділяють на *зовнішні й внутрішні*. Зовнішні параметри залежать від розміщення та властивості тіл, зовнішніх щодо термодинамічної системи. Можна сказати, що зовнішні параметри характеризують зовнішні умови, у яких перебуває система. Внутрішні параметри залежать від властивостей термодинамічної системи й визначають її стан у заданих зовнішніх умовах. У кожному конкретному випадку потрібно розрізняти, які з параметрів є зовнішніми, а які – внутрішніми. Зазначимо, що один і той самий термодинамічний параметр, залежно від ситуації, може відігравати роль як внутрішнього, так і зовнішнього параметра. Наприклад, якщо газ знаходиться у посудині з нерухомими (твердими) стінками, то об'єм газу є зовнішнім параметром. При цьому тиск газу на стінки залежатиме від об'єму й визначатиме стан газу за фіксованого об'єму, у цьому випадку тиск – внутрішній параметр газу.

Розглянемо іншу ситуацію, коли тиск газу фіксований. Цього можна домогтися, помістивши газ у посудину з рухомою стінкою й фіксованим навантаженням. Об'єм, який займе газ, залежатиме від прикладеного тиску. Тепер тиск – зовнішній параметр, а об'єм – внутрішній.

## Температура

Одним з найважливіших термодинамічних параметрів стану, які описують термодинамічну систему, є *температура*. Поняття температури вводиться для характеристики ступеня (градуса) нагрятості тіл. Уявлення про температуру ввійшло в науку завдяки чуттєвим сприйняттям. За допомогою чуттів людина здатна розрізняти якісний ступінь нагрятості: теплий, холодний, гарячий тощо. Однак кількісна міра нагрятості не може бути визначена за допомогою чуттєвого сприйняття, оскільки відчуття суб'єктивні: залежно від стану руки одне і те ж тіло на дотик може здаватись теплим або холодним. Тому в основу кількісного визначення температури і побудови температурної шкали треба покласти об'єктивні фізичні явища і факти.

Наприклад, з повсякденного досвіду відомо, що фізичні характеристики тіл, такі як електричний опір, об'єм тощо, змінюються внаслідок зміни температури, тобто є функціями температури:  $R = f(T)$  або  $V = f(T)$ . Такі прояви залежності називають *термометричними ознаками*. Термометричні ознаки покладено в основу вимірювання температури. Однак, слід зазначити, що одні й ті самі властивості різних тіл змінюються внаслідок зміни температури по-різному, а температурні шкали, які будуються на їхній основі, використовуються лише в обмеженому діапазоні. Отже, важливо встановити температурну шкалу, яка не залежить від конкретних властивостей фізичних тіл, а пов'язана з загальними властивостями всіх тіл. Таку шкалу можна побудувати, спираючись на закони термодинаміки, ця шкала називається *термодинамічною*.

Ще до побудови температурної шкали, за допомогою згаданих фізичних властивостей, що залежать від температури, можна емпіричним шляхом дійти важливого висновку: *якщо дві або кілька термодинамічних систем перебувають у тепловому контакті, то одні з них будуть нагріватися, а інші охолоджуватися доти, доки температура всіх систем не стане однаковою*. Це положення називається *нульовим началом термодинаміки*. Виявляється, що таку саму властивість має середня кінетична енергія поступального руху частинок, з яких складається система (атомів, молекул тощо). Якщо середні значення енергії для частинок систем однакові, то хоч при контакті систем їхні частинки і будуть обмінюватись енергією, ніякого сумарного переходу енергії з одного тіла до іншого не буде. З цієї

причини середня кінетична енергія поступального руху частинок може бути вибрана як мірило температури. Зазвичай температуру визначають як  $2/3$  цієї енергії:

$$\theta = \frac{2}{3} \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2},$$

де  $m_0$  – маса однієї молекули газу;  $\langle v^2 \rangle = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N}$  – квадрат середньоквадратичної швидкості частинок тіла.

Згідно з цим визначенням температура має розмірність енергії, однак на практиці зручно вимірювати температуру в градусах. Градус визначається як  $1/100$  частина різниці між температурами кипіння та замерзання чистої води за атмосферного тиску. Перевідний коефіцієнт, що визначає, скільки Джоулів міститься в одному градусі, називається *сталюю Больцмана*:  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж / град.

Оскільки кінетична енергія є величиною додатною, то і температура теж є величиною додатною. Визначена таким чином шкала температур називається *абсолютною*. Нулем температури в цій шкалі є температура, за якої тепловий рух припиняється, така температура називається *абсолютним нулем*. Шкалу абсолютної температури, відлік на якій починаються від абсолютного нуля, називають також шкалою Кельвіна, а градуси цієї шкали називають кельвінами і позначають літерою К.

На практиці, крім шкали Кельвіна, широко користуються також іншою стоградусною шкалою, за якою температуру відраховують від точки замерзання води, умовно приписуючи цій температурі нульове значення. Таку шкалу називають *шкалою Цельсія*. Іншими словами, за шкалою Цельсія абсолютному нулю відповідає температура  $-273,15$  °С.

Надалі температуру за абсолютною шкалою ми позначатимемо літерою  $T$ , а температуру за шкалою Цельсія – літерою  $t$ . Очевидно, що зв'язок між шкалами такий:

$$T = t + 273,15.$$

Зважаючи на сталу Больцмана, зв'язок між температурою в джоулях та кельвінах має вигляд:

$$\theta = kT.$$

## ***Рівноважний стан. Рівняння стану***

З досліду відомо, що всі термодинамічні системи мають таку властивість: *якщо зовнішні параметри зафіксовані, то термодинамічна система поступово наближається до стану, який називається **рівноважним**, в якому вона може перебувати як завгодно довго, поки не зміняться зовнішні умови.* Це фундаментальне твердження, що узагальнює всі відомі спостереження над макроскопічними системами.

За експериментальними даними, параметри будь-якої термодинамічної системи, яка знаходиться в рівноважному стані, пов'язані між собою функціональною залежністю:

$$f(P, V, T) = 0.$$

Така залежність називається *термічним рівнянням стану* термодинамічної системи, або просто *рівнянням стану*. Кожна термодинамічна система описується своїм рівнянням стану.

Вигляд функції  $f(P, V, T)$  є різним для різних речовин. Рівняння стану належить до найважливіших характеристик макроскопічних властивостей речовини. Як вже зазначалось, його не можна вивести із законів термодинаміки. Рівняння стану можна отримати безпосередньо з досліду або теоретично за допомогою статистичного методу на основі тієї чи іншої моделі.

### ***Рівноважні процеси. Термодинамічні діаграми стану***

Якщо внутрішні термодинамічні параметри системи з часом змінюються, це означає, що в системі відбувається макроскопічний процес. Причиною може бути зміна зовнішніх параметрів, тобто зовнішніх умов, у яких перебуває система. Інша типова причина — внутрішня нерівноважність в системі. Наприклад, якщо в системі є домішкові атоми і їхня концентрація неоднорідна, то в системі почнеться процес дифузії, який приведе до встановлення рівноважного стану з однорідним розподілом домішок.

Типи нерівноважних макроскопічних процесів досить різноманітні. Їхнім вивченням займаються спеціальні науки — *нерівноважна термодинаміка* та *нерівноважна статистична механіка*. Строго кажучи, будь-який макроскопічний процес є нерівноважним, однак у багатьох випадках процес, спричинений зміною зовнішніх параметрів, відбувається настільки повільно, що система встигає

приходити до рівноважного стану, який характеризується миттєвими значеннями цих параметрів. Таким чином, можна ввести ідеалізований процес, за якого зміна зовнішніх параметрів відбувається нескінченно повільно. Процес можна назвати рівноважним, якщо система проходить неперервний ряд нескінченно близьких рівноважних станів. Наголосимо ще раз, що реальний процес можна розглядати як рівноважний лише наближено; процес тим ближче до рівноважного, чим повільніше він відбувається. Тому рівноважні процеси називаються також квазістатичними.

Вивчати рівноважні процеси набагато легше, ніж нерівноважні. Справді, вичерпну інформацію про рівноважний процес дають рівняння стану, оскільки можна припустити, що в будь-який момент всі параметри мають рівноважні значення.

Для наочного опису термодинамічних систем використовують *діаграми стану* (рис. 2.3), системи координат, в яких вздовж осей відкладаються термодинамічні параметри. Стан термодинамічної системи позначається точкою на діаграмі. Якщо система характеризується трьома основними параметрами стану, то достатньо двовимірних діаграм, оскільки третій параметр можна безпосередньо визначити з рівняння стану. Такими, наприклад, є діаграми  $P$ - $V$ ,  $V$ - $T$ ,  $T$ - $V$  тощо. Рівноважний стан системи на діаграмах зображується точкою.

Нерівноважний стан термодинамічної системи відобразити на діаграмі неможливо, через те що її параметри в різних точках є різними. Процес переходу систем з одного стану в інший – нерівноважний процес, тому його не можна відобразити на діаграмі стану. Однак якщо процес квазістатичний, то в будь-який момент в системі встигає встановитися майже рівноважний стан, завдяки цьому квазістатичний процес можна представити на діаграмі у вигляді неперервної сукупності точок, які замінюють безперервною кривою (рис. 2.4).

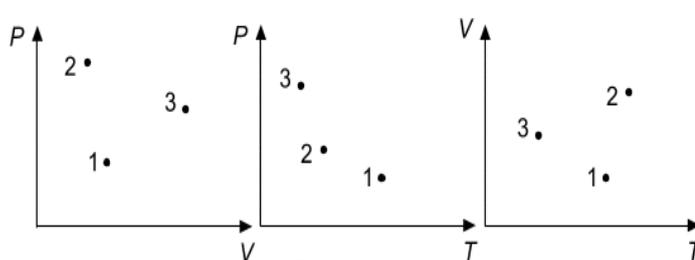


Рис. 2.3

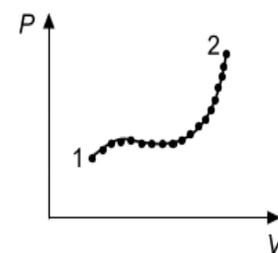


Рис. 2.4

### Ідеальний газ

Найбільш простою термодинамічною системою є *ідеальний газ*. *Ідеальний газ* – це модель реального газу, в якій нехтують розміром молекул (молекули є матеріальними точками), ці молекули зіштовхуються одні з одними і зі стінками посудини абсолютно пружно, а на далеких відстанях не взаємодіють між собою.

Модель ідеального газу можна застосовувати для опису властивостей реального газу за достатнього розрідження, тобто за невисокого тиску і не дуже низької температури. Про точний кількісний критерій застосування моделі йтиметься у зв'язку з рівнянням стану реальних газів.

#### Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії пов'язує параметри стану газу з характеристиками руху його молекул, тобто визначає залежність між тиском і об'ємом газу та кінетичною енергією поступального руху його молекул.

Тиск газу в посудині є результатом зіткнення молекул газу із стінками посудини. Тиск газу – це макроскопічний прояв руху молекул. Як відомо, величина тиску визначається силою, що діє перпендикулярно на одиницю площі поверхні:  $p = F/S$ .

Тиск газу на стінки зумовлений величезною кількістю зіткнень молекул газу зі стінками – згідно із другим законом Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{\Delta(m_0\vec{v})}{\Delta t}.$$

Імпульс однієї молекули: уздовж осі  $x$  (рис. 2.5) дорівнює  $m_0v_x$ , де  $m_0$  – маса однієї молекули. Нехай в одиниці об'єму посудини перебуває  $n$  молекул, половина з них рухається уздовж осі  $x$ , а решта – у протилежному напрямку. За час  $\Delta t$  у шар  $\Delta x$  ( $\Delta x$  – відстань, на якій проявляється дія молекул на стінку) зліва направо потрапляє  $\frac{1}{2}nSv_x\Delta t$  молекул. Кожна з них має імпульс  $m_0v_x$ , отже, загальний імпульс, внесений ними в шар, дорівнює:  $\frac{1}{2}nm_0v_x^2S\Delta t$ .

За це й же час шар залишає, рухаючись справа наліво, таке ж число молекул з таким

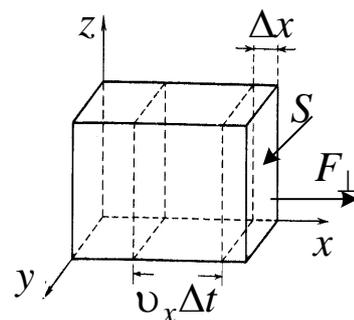


Рис. 2.5

же загальним імпульсом, але протилежного знака. Загальна зміна імпульсу:

$$\frac{1}{2}nm_0v_x^2S\Delta t - \left(-\frac{1}{2}nm_0v_x^2S\Delta t\right) = nm_0v_x^2S\Delta t.$$

Імпульс сили, що діє на стінку площею  $S$ , дорівнює зміні імпульсу частинок  $F\Delta t = nm_0v_x^2S\Delta t$ . Тоді тиск на стінку, буде визначатися формулою:

$$p = nm_0v_x^2. \quad (2.1)$$

Рухаючись хаотично в просторі, молекули мають складові швидкостей й уздовж інших осей. Повна швидкість молекули може бути виражена через її складові за трьома незалежними напрямками:  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ .

Оскільки в русі бере участь безліч молекул, потрібно використовувати середні квадрати швидкостей:

$$\langle v \rangle^2 = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle.$$

Оскільки рух є хаотичним, то всі три компоненти швидкостей рівноправні  $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ . Звідси  $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle$ .

Після підстановки в рівняння (2.1) одержимо:

$$p = \frac{1}{3}nm_0\langle v^2 \rangle. \quad (2.2)$$

Рівняння 2.2 пов'язує макроскопічний параметр – тиск і мікроскопічні – масу й середній квадрат швидкості молекули, тому його можна вважати *основним рівнянням МКТ ідеальних газів*. Однак, часто це рівняння використовують в іншому вигляді:

$$p = \frac{2}{3}n \frac{m_0\langle v^2 \rangle}{2}.$$

Тут  $\frac{m_0\langle v^2 \rangle}{2} = \bar{E}_0$  – середня кінетична енергія поступального руху молекул. Таким чином, тиск ідеального газу визначається середньою кінетичною енергією поступального руху молекули і є середньостатистичною величиною:

$$p = \frac{2}{3}n\bar{E}_0. \quad (2.3)$$

Тиск газу пропорційний середній кінетичній енергії поступального руху молекули.

Відповідно до визначення температури основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії можна перетворити таким чином:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{2}{3} n \cdot \frac{3}{2} kT = nkT.$$

Оскільки концентрація  $n = N/V$ , то:

$$pV = NkT. \quad (2.4)$$

Якщо взяти два різних ідеальних газу, які знаходяться в однакових об'ємах та за однакового тиску і температури, то, як випливає з останнього рівняння, кількість молекул в обох газах буде однаковою. Це так званий *закон Авогадро*.

Беручи до уваги формулу  $\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{\mu}$ , основне рівняння

молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу можна переписати у вигляді:

$$pV = \nu RT, \quad (2.5)$$

де  $R = k \cdot N_A = 8,314$  Дж / моль·К – універсальна газова стала.

У такому вигляді воно має назву *рівняння стану ідеального газу*, або *рівняння Менделєєва-Клапейрона*, яке є результатом узагальнення даних експериментів з достатньо розрідженими газами.

## **2.2. СТАТИСТИЧНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ ІДЕАЛЬНОГО ГАЗУ**

### **2.2.1. Розподіл молекул ідеального газу за швидкостями теплового руху (розподіл Максвелла)**

Завдяки безладному руху молекул і їхнім взаємним зіткненням кожна молекула може змінювати свою швидкість як за величиною, так і за напрямком, тому в газі є і швидкі, і повільні молекули. Але, хоча швидкості окремих молекул змінюються, властивості газу у стані термодинамічної рівноваги загалом не змінюються: параметри системи залишаються сталими. Зумовлено це тим, що швидкості газових молекул підпорядковані певному закону, тобто, незважаючи на цілковиту хаотичність молекулярних рухів, розподіл молекул за швидкостями

виявляється не випадковим, а цілком визначеним. До того ж він є однозначним і єдино можливим.

Дж. К. Максвелл теоретично розв'язав задачу про розподіл молекул ідеального газу за швидкостями поступального руху. Він встановив закон, що дає змогу визначити, яка кількість молекул  $dn$  із загальної кількості  $n$  молекул ідеального газу в одиниці об'єму мають за певної температури швидкості в інтервалі від  $v$  до  $v + dv$ . Максвелл вважав, що газ складається з великої кількості  $n$  однакових молекул, температура в усіх частинах посудини з газом теж однакова і немає зовнішнього впливу на газ.

Якщо поділити діапазон швидкостей молекул на нескінченно малі інтервали, які дорівнюють  $dv$ , то на кожний інтервал швидкості припадатиме деяка кількість молекул  $dn(v)$ , що мають швидкість в інтервалі  $dv$ .

Закон Максвелла описується деякою функцією  $f(v)$ , яка називається *функцією розподілу молекул за швидкостями руху*. Ця

функція визначає відносну кількість молекул  $\frac{dn(v)}{n}$ , швидкості яких лежить в інтервалі від  $v$  до  $v + dv$ , тобто:

$$\frac{dn(v)}{n} = f(v)dv, \quad \text{звідси} \quad f(v) = \frac{dn(v)}{ndv}.$$

Добуток  $f(v)dv = \frac{dn(v)}{n}$  означає ймовірність того, що величина

швидкості окремої молекули знаходиться в інтервалі між  $v$  і  $v + dv$ .

Застосовуючи методи теорії ймовірності, Максвелл знайшов функцію  $f(v)$  у такому вигляді:

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}. \quad (2.6)$$

Конкретний вигляд функції залежить від роду газу  $m_0$  і від параметра стану  $T$ . Графік функції  $f(v)$  подано на рис. 2.6. Функція  $f(v)$  починається від нуля, сягає максимуму, а потім асимптотично прямує до нуля. Крива є несиметричною відносно максимального значення  $f(v)$ . Відносна кількість молекул  $dn(v)/n$ , швидкості яких

вимірюються в інтервалі від  $v$  до  $v + dv$ , чисельно дорівнює площі заштрихованої ділянки на рис. 2.6.

Уся площа, обмежена кривою розподілу і віссю абсцис, чисельно дорівнює кількості молекул, швидкості яких мають різні значення від 0 до  $\infty$ . Оскільки цій умові відповідають всі  $n$  молекул, то площа, що розглядається, дорівнює одиниці:

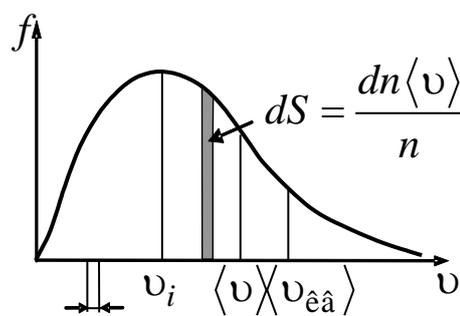


Рис. 2.6

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1.$$

Швидкість, за якої  $f(v)$  є максимальною, **називається найімовірнішою швидкістю**  $v_i$ . Для знаходження  $v_i$  використаємо умову максимуму функції  $f(v)$  (2.6):

$$\left. \frac{d}{dv} \left( v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \right) \right|_{v=v_{im}} = 0, \quad \text{звідси} \quad v_i = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

Середня арифметична швидкість молекул  $\langle v \rangle$  визначається інтегруванням (2.6):

$$\langle v \rangle = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v dn(v) = \int_0^{\infty} v f(v) dv.$$

Підставляючи  $f(v)$  й інтегруючи, отримуємо:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}.$$

Отже, є три швидкості (рис. 2.6.), що характеризують стан газу, формули яких подано у табл. 2.2:

Таблиця 2.2

<b>Найімовірніша</b>	<b>Середня арифметична</b>	<b>Середня квадратична</b>
$v_i = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \approx 1,41 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$	$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = 1,13 v_{im}$	$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 1,22 v_{im}$

У разі збільшення температури (або зменшення маси молекул) максимум кривої  $f(v)$  зміщується у бік більших швидкостей, а його абсолютна величина зменшується, причому площа, охоплена кривою  $f(v)$  і віссю  $v$ , залишається незмінною (рис. 2.7).

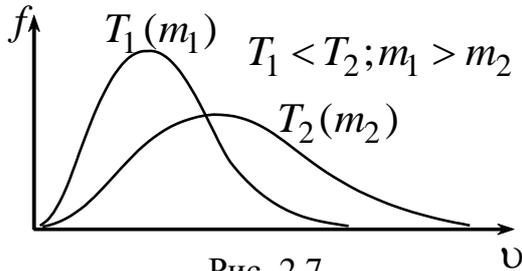


Рис. 2.7

На рисунку 2.7 наведено дві криві розподілу, які відповідають температурам  $T_1$  і  $T_2$  для молекул одного газу або масам  $m_1$  і  $m_2$  молекул різних газів за однакової температури.

Закон Максвелла зручно формулювати, ввівши відносну швидкість  $v_B = \frac{v}{v_i}$ , де  $v$  – дана швидкість, а  $v_i$  – найімовірніша швидкість для молекул даного газу за даної температури.

Розподіл, що визначає кількість молекул, відносні швидкості яких обчислюють в межах від  $v_B$  до  $v_B + dv_B$ , має такий вигляд:

$$dn(v_B) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n e^{-v_B^2} v_B^2 dv_B = f(v_B) n dv_B.$$

Знайдемо середню відносну швидкість молекул ідеального газу:

$$\langle v_B \rangle = \int_0^{\infty} v_B f(v_B) dv_B = \sqrt{2} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{2} \langle v \rangle,$$

де  $\langle v \rangle$  – середня арифметична швидкість.

### 2.2.2. Барометрична формула. Розподіл Больцмана

Якщо на молекули не впливають зовнішні сили, вони рівномірно розподіляються по об'єму посудини. Однак молекули будь-якого газу завжди перебувають в полі сил тяжіння Землі. Якби не було тяжіння, атмосферне повітря розсіялося б по всьому Всесвіту. А якби не було теплового руху молекул атмосферного повітря, то всі вони впали б на Землю. Тяжіння і тепловий рух зумовлюють стаціонарний стан газу, за якого його тиск і концентрація зменшуються залежно від висоти.

Розглянемо ідеальний газ, маси всіх молекул якого однакові, температура стала і який знаходиться в однорідному полі тяжіння. Якщо тиск газу на висоті  $h$  дорівнює  $p$  (рис. 2.8), то на висоті  $h+dh$  він дорівнює  $p+dp$ , причому за  $dh>0$ ,  $dp<0$ , оскільки тиск з висотою зменшується.

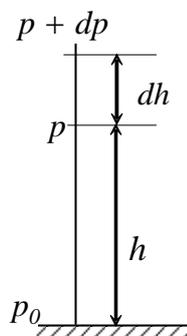


Рис. 2.8

Різниця тиску  $p$  і  $p+dp$  чисельно дорівнює вазі газу, що знаходиться в об'ємі циліндра заввишки  $dh$ , із площею основи, яка дорівнює одиниці:

$$p - (p + dp) = \rho g dh,$$

де  $\rho$  – густина газу на висоті  $h$ .

Використаємо рівняння Клапейрона - Менделєєва, знайдемо густину газу:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}.$$

Тоді:

$$-dp = \frac{\mu g p}{RT} dh \quad \text{або} \quad \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh.$$

Вважаючи  $T = \text{const}$  й інтегруючи за тиском від  $p_0$  до  $p$ , а за висотою від 0 до  $h$ , отримуємо:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} \int_0^h dh \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\mu g}{RT} h,$$

звідси:

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT} h} \quad \text{або} \quad h = \frac{RT}{\mu g} \ln \frac{p_0}{p}.$$

Ці формули називаються **барометричними формулами**. Із них можна зробити висновок, що тиск газу зменшується із висотою за експоненціальним законом тим швидше, чим важчий газ і чим нижча температура (рис. 2.9).

Барометрична формула дає можливість знайти співвідношення між концентраціями газу на різній висоті. Використаємо рівняння стану ідеального газу у вигляді  $p = nkT$ , де  $n$  – концентрація молекул газу. За  $T = \text{const}$  отримуємо:

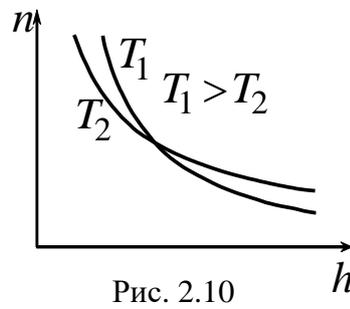
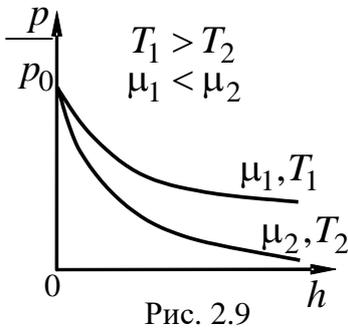
$$nkT = n_0 kT e^{-\frac{\mu g}{RT} h},$$

де  $n_0$  – концентрація молекул на висоті  $h = 0$ .

Оскільки  $\mu = m_0 N_A$ , а  $R = k N_A$ , то:

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} = n_0 e^{-\frac{W_i}{kT}}, \quad (2.7)$$

де  $W_i$  – потенціальна енергія молекул в полі тяжіння.



У міру збільшення висоти концентрація молекул газу зменшується за експоненціальним законом (рис. 2.10). За високих температур кількість молекул  $n$  незначно зменшується з висотою і за

$T \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow n_0$ , тобто підвищення температури викликає вирівнювання концентрації газу з висотою. За  $T \rightarrow 0$  К,  $n \rightarrow 0$ , тобто всі молекули під дією сили тяжіння опускаються на дно посудини.

Больцман довів, що співвідношення (2.7) є справедливим не тільки для потенціального поля сил земного тяжіння, але й у довільному потенціальному полі сил для сукупності довільних однакових частинок, що перебувають у стані хаотичного теплового руху. Тому вираз (2.7) називається **розподілом Больцмана** у зовнішньому потенціальному полі. Із цього виразу видно, що чим менша потенціальна енергія молекул, тим більша їхня концентрація.

## 2.3. ПЕРШЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМІКИ

### 2.3.1. Внутрішня енергія термодинамічної системи

Оскільки термодинамічна система складається з великої кількості частинок, рух яких можна описати законами механіки Ньютона, то механічна енергія системи може бути записана у вигляді суми:

$$W = W_K + W_{\Pi} + U,$$

де  $W_K$  — кінетична енергія руху системи як цілого,  $W_{\Pi}$  — потенціальна енергія системи в зовнішньому полі. Величина  $U$ , яка дорівнює

механічній енергії в системі відліку, що рухається зі швидкістю центра мас, є внутрішньою енергією. В термодинаміці розглядають системи, центр мас яких перебуває в стані спокою, у таких випадках  $W_K = 0$ ,  $W_{II} = \text{const}$ , отже, внутрішня енергія з точністю до константи збігається з механічною енергією системи. Як ми знаємо з механіки,

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} W_{ij} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|),$$

де  $N$  — повне число атомів у системі,  $W_{ij} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$  — енергія взаємодії частинок.

Оскільки молекули ідеального газу не взаємодіють між собою, то енергія міжмолекулярної взаємодії дорівнює нулю  $W_{ij} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = 0$ , а тому внутрішня енергія ідеального газу є лише сумою кінетичних енергій хаотичного руху молекул. У рідинах і твердих тілах енергія взаємодії дає приблизно такий же внесок у внутрішню енергію, як і кінетична енергія атомів чи молекул.

Внутрішня енергія системи визначається її станом. Оскільки стан термодинамічної системи визначається термодинамічними параметрами, наприклад  $p$ ,  $V$  та  $T$ , то внутрішня енергія є функцією параметрів стану:

$$U = f(p, V, T).$$

Це означає, що одному й тому ж термодинамічному стану системи відповідає єдине значення внутрішньої енергії. В термодинамічних процесах розглядається зміна внутрішньої енергії внаслідок зміни стану системи, тому вибір початку відліку внутрішньої енергії є несуттєвим.

### ***Внутрішня енергія ідеального газу. Рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності***

У цьому розділі не розглядатимуться процеси, пов'язані із зміною внутрішньоядерної енергії, тому під *внутрішньою енергією слід розуміти кінетичну енергію теплового руху частинок, з яких складається система, та потенціальну енергію їхньої взаємодії.*

Для молекул ідеального одноатомного газу *число ступенів вільності* (позначається  $i$ ) відповідно до класичної механіки дорівнює кількості координат, потрібних для того, щоб визначити їхнє положення в просторі (див. п.1.1). Очевидно, що число координат в тривимірному

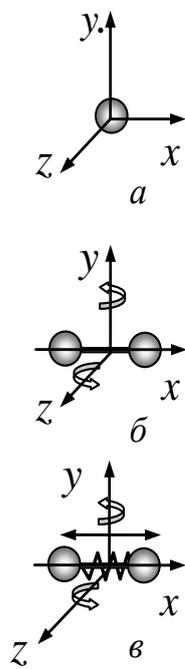


Рис. 2.11

просторі, а отже, і число ступенів вільності молекул одноатомного газу (рис. 2.11, а) дорівнює трьом:  $i_{\text{пост}} = 3$ .

Однак молекула газу не обов'язково має складатися з одного атома, який вважається матеріальною точкою. Газ може бути двоатомним, триатомним тощо. Для молекул таких газів характерна наявність внутрішньої структури, отже, і наявність додаткових ступенів вільності. Якщо атоми в молекулі жорстко пов'язані між собою, то додатковими ступенями вільності є обертальні ступені, які характеризують кутове положення молекули в просторі. В цьому випадку двоатомні молекули мають додатково два ступеня вільності, оскільки брати до уваги обертання навколо осі, яка з'єднує атоми, що вважаються матеріальними точками, немає сенсу (рис. 2.11, б). Отже,

для такої молекули загальна кількість її ступенів вільності

дорівнює п'яти ( $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{об}} = 3 + 2 = 5$ ). Для молекул, які складаються з трьох та більшого числа атомів, число додаткових ступенів вільності дорівнює трьом, а загальна кількість – шести ( $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{об}} = 3 + 3 = 6$ ).

Якщо атоми в молекулі з'єднані не жорстким, а пружним зв'язком, то, окрім обертальних, виникають ще й коливальні ступені вільності, наявність яких треба брати до уваги в описі властивостей багатоатомного газу за високих температур (рис. 2.11, в).

Кожний вид руху має свою частку повної енергії. *Больцман* сформулював закон *рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності*: на кожний ступінь вільності молекули припадає в середньому однакова енергія, яка дорівнює:

$$W = \frac{1}{2} kT . \quad (2.8)$$

Таким чином, сумарна кінетична енергія всіх молекул ідеального газу (внутрішня енергія) дорівнює:

$$U = N \frac{i}{2} kT .$$

Враховуючи  $\nu = \frac{N}{N_A}$  та  $R = kN_A$ , остаточно маємо:  $U = \frac{i}{2} \nu RT .$

Як видно з останньої формули, внутрішня енергія даної маси ідеального газу залежить тільки від температури і не залежить ані від тиску, ані від об'єму газу.

Зміна внутрішньої енергії ідеального газу визначається тільки зміною температури і не залежить ні від тиску, ні від об'єму. Для елементарного процесу:

$$dU = \frac{i}{2} \nu R dT. \quad (2.9)$$

Змінити внутрішню енергію газу можна, наприклад, виконавши над ним роботу. Але незалежно від того, у який спосіб виконують роботу, зміна внутрішньої енергії ідеального газу залежить тільки від зміни температури. Інакше кажучи, зміна внутрішньої енергії залежить лише від параметрів початкового й кінцевого стану і не залежить від процесу переходу від початкового до кінцевого стану. Якщо газ повернути до початкового стану, то зміна внутрішньої енергії дорівнюватиме нулю.

### 2.3.2. Робота та теплота. Перше начало термодинаміки

Розглянемо ідеальний газ як термодинамічну систему. Обчислимо роботу, яку виконує газ у процесі розширення. Уявімо, що газ знаходиться в циліндричній посудині, закритій рухомих поршнем з площею  $S$  (рис. 2.12). Нехай під дією прикладеної сили з боку навколишнього середовища сили  $F$  поршень опустився на відстань  $dx$ , стиснувши газ (навколишнє середовище виконало роботу над термодинамічною системою). Цю роботу можна визначити за відомою з механіки формулою:

$$\delta A = F dx.$$

Оскільки сила  $F$  чинить на поршень тиск  $p$ , який визначається за формулою  $p_{\text{зовн}} = F/S$ , то:

$$\delta A = p S dx.$$

Завдяки тому, що процес відбувається квазістатично, тиск, який чинить зовнішня сила на газ, дорівнює тиску газу на поршень  $p_{\text{зовн}} = p$ , крім того добуток  $S dx$  є не чим іншим, як зміною об'єму газу  $dV$  за стискання, тобто:

$$S dx = -dV,$$

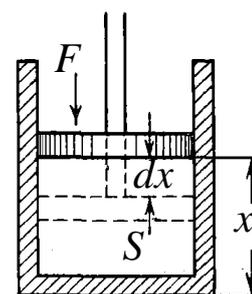


Рис. 2.12

таким чином,

$$\delta A = -pdV .$$

Газ за розширення, тобто збільшення об'єму на  $dV$ , сам виконує роботу над навколишнім середовищем, у цьому випадку його робота буде додатною величиною:

$$\delta A = +pdV .$$

Отже, можна дійти висновку, що робота є додатною ( $\delta A > 0$ ), якщо термодинамічна система виконує роботу над навколишнім середовищем, і від'ємною ( $\delta A < 0$ ), якщо навколишнє середовище виконує роботу над термодинамічною системою.

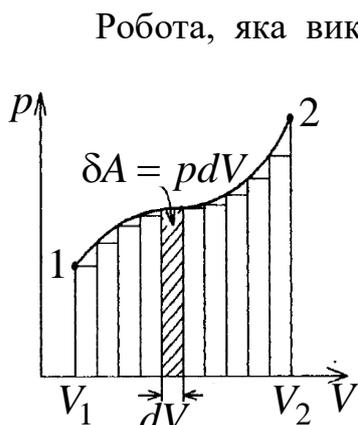


Рис. 2.13

Робота, яка виконується в термодинамічному процесі, допускає наочну геометричну інтерпретацію, якщо зобразити процес графічно за допомогою кривої в координатах  $(p-V)$ . Наприклад, зміна об'єму газу за його розширення зображується кривою 1–2 (рис. 2.13). У разі збільшення об'єму на  $dV$  робота, яку виконує газ, дорівнює  $\delta A = pdV$ , тобто площі заштрихованого нескінченно вузького прямокутника. Тому повна робота, яку виконує газ у процесі розширення від об'єму  $V_1$  до  $V_2$ , складаючись з елементарних робіт  $\delta A$ , зобразиться площею криволінійної трапеції, обмеженою кривою 1–2, вертикальними лініями та віссю абсцис. Таким чином, площа діаграми в координатах  $p-V$  визначає роботу, яку виконує тіло в розглядуваному процесі:

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} pdV .$$

Із геометричної інтерпретації роботи випливає, що ця величина залежить від процесу, завдяки якому система переходить із стану 1 в стан 2.

Зміна стану термодинамічної системи, отже, і її внутрішньої енергії, відбувається завдяки виконанню над системою або самою системою роботи. Наприклад, стискування повітря в циліндрі дизельного двигуна призводить до його нагрівання. Однак змінити стан термодинамічної системи можна і не виконуючи механічної роботи, для цього достатньо її теплового контакту з іншою системою, яка має відмінну температуру. В цьому випадку передавання енергії

відбувається завдяки тому, що частинки системи, яка має більшу температуру, втрачають її внаслідок зіткнень, передаючи її частинкам системи з меншою енергією. *Енергія, якою обмінюються системи під час теплового контакту, називається кількістю теплоти.* Кількість теплоти вважається додатною ( $\delta Q > 0$ ), якщо система отримує енергію, і від'ємною ( $\delta Q < 0$ ), якщо система віддає енергію.

Слід зазначити, що *кількість теплоти, як і механічна робота, є функцією процесу*, тобто величиною, що залежить від процесу, завдяки якому система переходить від одного стану до іншого.

### ***Перше начало термодинаміки***

Одним з ключових постулатів термодинаміки є закон збереження енергії, який дотримується в будь-якій термодинамічній системі і називається *першим началом термодинаміки*. Він формулюється таким чином:

*теплота, яка надається термодинамічній системі, йде на зміну внутрішньої енергії та на виконання системою роботи над навколишнім середовищем.*

Використовуючи величини внутрішньої енергії, роботи та кількості теплоти, перше начало термодинаміки можна записати в математичній формі:

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (2.10)$$

де  $\delta Q$  – нескінченно мала зміна кількості теплоти,  $\delta A$  – елементарна робота,  $dU$  – зміна внутрішньої енергії.

Знаки « $\delta$ » біля величин роботи та кількості теплоти вказують на те, що ці величини залежать від процесу переходу системи між двома нескінченно близькими станами термодинамічної системи. Оскільки внутрішня енергія є функцією стану термодинамічної системи, як було зазначено, то її зміна не залежить від процесу переходу системи з одного стану в інший, а залежить лише від початкового та кінцевого станів, тому ця зміна є повним диференціалом, на відміну від роботи та кількості теплоти.

### ***2.3.3. Поняття про теплоємність. Теплоємність ідеального газу***

Під час передавання термодинамічній системі певної кількості теплоти змінюється її температура. Зміна температури тіла внаслідок

передавання теплоти залежить від розмірів системи та виду речовини, з якої вона складається. Із практичного погляду, корисно знати, яку кількість теплоти потрібно передати системі, щоб її температура змінилася на 1 К.

*Теплоємністю термодинамічної системи називається кількість теплоти, яку поглинає система внаслідок зміни її температури на 1К:*

$$C = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (2.11)$$

Теплоємність тіла вимірюється в СІ в Дж/К.

Теплоємність тіла не може бути характеристикою речовини, з якої складається система. Можна підібрати різні за кількістю й складом системи, теплоємності яких будуть однаковими.

Для характеристики речовини використовують теплоємності, віднесені до одиниці маси або до одиниці кількості речовини.

Теплоємність одиниці маси речовини називають *питомою теплоємністю*. Питома теплоємність вимірюється в Дж/(кг·К) і виражається формулою:

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}.$$

Теплоємність одного моля речовини називають *молярною теплоємністю*. Молярна теплоємність вимірюється в Дж/(моль·К) і виражається формулою:

$$c_v = \frac{\delta Q}{\nu dT}.$$

На підставі першого начала термодинаміки (2.10) формулу (2.11) можна записати в такому вигляді:

$$C = \frac{dU + \delta A}{dT} = \frac{dU + p dV}{dT}.$$

З цього виразу видно, що визначення теплоємності термодинамічної системи саме собою є недостатнім, оскільки кількість теплоти, яку поглинає система, залежить не тільки від зміни температури, а й від характеру процесу, за якого відбувається нагрівання. Найчастіше поглинання теплоти системою відбувається у випадку, коли об'єм системи або тиск навколишнього середовища залишаються незмінними, відповідно розрізняють теплоємність системи за постійного об'єму  $C_V$  та за постійного тиску  $C_p$ .

Якщо об'єм системи залишається незмінним, тобто  $dV = 0$ , то на підставі першого начала термодинаміки  $\delta Q = dU$ , тобто вся кількість теплоти, яка поглинається системою, витрачається на збільшення її внутрішньої енергії, тому:

$$C_V = \left( \frac{dU}{dT} \right)_V.$$

Індекс  $V$  біля похідної означає, що диференціювання відбувається за постійного значення об'єму.

Якщо під час нагрівання тиск залишається незмінним, теплота витрачається не лише на збільшення внутрішньої енергії, а й на виконання системою роботи. Кількість теплоти в такому разі можна написати у вигляді

$$\delta Q = dU + pdV = d(U + pV).$$

Очевидно, що кількість теплоти виявляється рівною зміні величини

$$H = U + pV,$$

що називається *ентальпією*. Поряд з внутрішньою енергією ентальпія є також функцією стану системи. Таким чином, теплоємність за постійного тиску визначається як

$$C_p = \left( \frac{dH}{dT} \right)_p.$$

Оскільки внутрішня енергія ідеального газу залежить від температури згідно з формулою (2.9), його молярна теплоємність за постійного об'єму дорівнює:

$$C_V = \frac{i}{2} R, \quad (2.12)$$

а його молярна теплоємність за постійного тиску, зважаючи на рівняння стану (2.4), дорівнює:

$$C_p = \frac{i+2}{2} R. \quad (2.13)$$

Як видно з формул (2.12) та (2.13), різниця молярних теплоємностей дорівнює універсальній газовій сталій:

$$C_p - C_V = R. \quad (2.14)$$

Це співвідношення називається *рівнянням Майєра*.

Знаючи теплоємність термодинамічної системи, можна виразити кількість теплоти, яку отримує чи поглинає система в тому чи іншому процесі.

Зважаючи на те, що кількість теплоти – величина адитивна, можна одержати вираз для теплоємності системи, яка є сумішшю. Нехай суміш містить  $N$  компонентів, для нагрівання яких на  $\Delta T$  потрібна така кількість теплоти:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N = \sum_{i=1}^N Q_i, \quad (2.15)$$

де  $Q_i$  – кількість теплоти, що потрібна для нагрівання  $i$ -го компонента на  $\Delta T$ . Кількість теплоти, передану суміші, можна записати через питому теплоємність суміші та масу суміші  $m = \sum_{i=1}^N m_i$  як  $Q = cm\Delta T$ .

Аналогічно можна записати для  $i$ -го компонента  $Q_i = c_i m_i \Delta T$ . Підставивши ці формули в рівняння (2.15), виразимо питому теплоємність суміші:

$$c = \frac{c_1 m_1 + \dots + c_i m_i + \dots + c_N m_N}{m_1 + \dots + m_i + \dots + m_N} \quad (2.16)$$

Аналогічно можна виразити й молярну теплоємність суміші  $c_v$ , записавши кількість теплоти як  $Q = c_v \nu \Delta T$ , де  $\nu = \sum_{i=1}^N \nu_i$  – кількість молів суміші:

$$c_v = \frac{c_{v1} \nu_1 + \dots + c_{vi} \nu_i + \dots + c_{vN} \nu_N}{\nu_1 + \dots + \nu_i + \dots + \nu_N}. \quad (2.18)$$

Питома теплоємність неорганічних будівельних матеріалів перебуває в межах від 0,4 до 1 кДж/(кг·К), сухої деревини – 1,7...2 кДж/(кг·К). Найбільшу теплоємність має вода – 4,2 кДж/(кг·К), тому внаслідок зволоження матеріалів їхня теплоємність зростає. Чисельні характеристики теплоємності використовують у розрахунках теплотривкості огорожувальних конструкцій. Крім того, значення теплоємності треба знати для розрахунків затрат палива й енергії на обігрів матеріалів і конструкцій в умовах їхньої експлуатації за низьких температур.

### 2.3.4. Застосування першого начала термодинаміки до основних термодинамічних процесів

*Ізопроесами* в газах називаються термодинамічні процеси, за яких один з основних параметрів стану ( $V, p, T$ ) залишається сталим.

**Ізохорний процес** ( $V = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ).

Ізохорний процес підпорядковується закону Шарля:

$$\frac{p}{T} = \text{const}.$$

Діаграма цього процесу в координатах  $p, V$  зображується прямою, паралельною до осі ординат, де 1-2 – ізохорне нагрівання, а 1-3 – ізохорне охолодження (рис. 2.14).

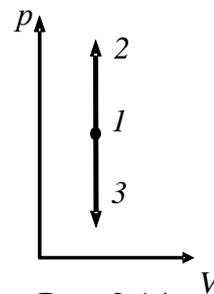


Рис. 2.14

За ізохорного процесу газ не виконує роботи над зовнішніми тілами:  $\delta A = p dV = 0$ .

Отже, з першого начала термодинаміки (2.10) для ізохорного процесу випливає, що  $\delta Q = dU$ . Оскільки  $dU = C_v dT$ , то для довільної маси газу:

$$\delta Q = dU = \frac{m}{\mu} C_v dT. \quad (2.19)$$

**Ізобарний процес** ( $p = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ).

Цей процес підпорядковується закону Гей - Люссака:

$$\frac{V}{T} = \text{const}.$$

Діаграма цього процесу в координатах  $p, V$  зображується прямою, паралельною до осі  $V$  (рис. 2.15). 1-2 – ізобарний процес розширення, 1-3 – ізобарний стиск.

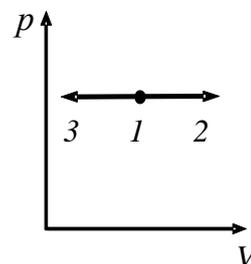


Рис. 2.15

Робота, яку виконує газ за ізобарного розширення від об'єму  $V_1$  до  $V_2$ , дорівнює:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1). \quad (2.20)$$

За ізобарного процесу в разі надання газу масою  $m$  кількості теплоти:

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_p dT, \quad (2.21)$$

його внутрішня енергія зростає на величину:

$$dU = \frac{m}{\mu} C_v dT. \quad (2.22)$$

Газ виконує роботу:

$$\delta A = p dV = \frac{m}{\mu} R dT. \quad (2.23)$$

**Ізотермічний процес** ( $T = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ).

Ізотермічний процес підпорядковується до закону Бойля – Маріотта:

$$pV = \text{const}.$$

Діаграма цього процесу в координатах  $p$ ,  $V$  є гіперболою.  $1-3$  – ізотермічний стиск,  $1-2$  – ізотермічне розширення (рис. 2.16).

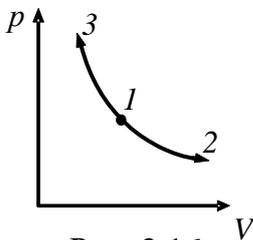


Рис. 2.16

Елементарна робота газу під час ізотермічного розширення:

$$\delta A = p dV = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}. \quad (2.24)$$

Тоді для визначення повної роботи під час ізотермічного розширення газу проінтегруємо вираз (2.24):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (2.25)$$

За  $T = \text{const}$  внутрішня енергія ідеального газу не змінюється:

$$dU = \frac{m}{\mu} C_v dT = 0 \quad \text{і} \quad \delta Q = \delta A,$$

тобто вся кількість теплоти, надана газу, витрачається на виконання ним роботи проти зовнішніх сил:

$$Q = A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (2.26)$$

Робота розширення газу ( $V_2 > V_1$ ) є додатною. У разі стиску газу (процес  $1-3$ ) робота  $A$ , що виконується газом, від'ємна, водночас

зовнішні сили виконують додатну роботу  $A' = -A$ . При цьому  $Q < 0$ , тобто теплота від газу відводиться.

### **Адіабатичний і політропний процеси**

**Адіабатичний процес** – це процес, який відбувається без обміну теплотою ( $\delta Q = 0$ ) між термодинамічною системою і навколишнім середовищем.

Адіабатичний процес описується рівнянням Пуассона:

$$pV^\gamma = \text{const},$$

де  $\gamma$  – показник адіабати, який визначається за формулою:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}.$$

На рис. 2.17 наведено графіки (для порівняння) адіабатичного (1) та ізотермічного (2) процесів в координатах  $p, V$ .

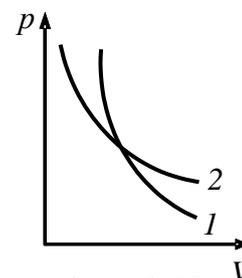


Рис. 2.17

Робота газу за адіабатичного процесу:

$$A = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (2.27)$$

Теплоємність в адіабатичному процесі ( $dQ = 0$ ) дорівнює нулю:

$$C_a = \frac{dQ}{dT} = 0.$$

Робота, яку виконує газ за адіабатичного розширення, є меншою, ніж за ізотермічного. Це пояснюється тим, що за адіабатичного розширення відбувається охолодження газу, тоді як за ізотермічного температура підтримується постійною завдяки припливу еквівалентної кількості теплоти ззовні.

У природі відбуваються реальні процеси, які є проміжними між адіабатичними й ізотермічними. Такі процеси називаються **політропічними**.

**Політропічним** називається процес, за якого теплоємність  $C$  тіла залишається сталою, тобто:

$$\delta Q = CdT.$$

Рівняння політропи ідеального газу має такий вигляд:

$$pV^n = \text{const},$$

де  $n$  – показник політропи.

Усі ізопроцеси в газах є окремими випадками політропного процесу (табл.2.3).

Таблиця 2.3

Процес	Теплоємність	Показник політропи
адіабата	$C = 0$	$n = \gamma$
ізотерма	$C = \infty$	$n = 1$
ізобара	$C = C_p$	$n = 0$
ізохора	$C = C_v$	$n = \pm\infty$

### Кругові термодинамічні процеси (цикли)

**Циклом** називається процес, під час якого термодинамічна система повертається у початковий стан. Прикладом циклічного процесу на діаграмі  $p$ - $V$  є процес, зображений на рис. 2.18. Оскільки внутрішня

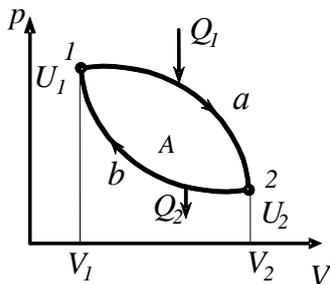


Рис. 2.18

енергія є функцією стану системи, то її повна зміна в результаті циклу дорівнює нулю, математично це виражається таким чином:

$$\oint dU = 0,$$

тому перше начало термодинаміки для кругового процесу можна записати в такому вигляді:

$$\oint \delta Q = \oint \delta A.$$

З цього рівняння випливає висновок: під час кругового процесу, який відбувається за годинниковою стрілкою, робота виконується системою ( $\oint \delta A > 0$ ) завдяки теплообміну з навколишнім середовищем, такий процес називається *прямим циклом*. Під час прямого циклу система може і поглинати, і віддавати певну кількість теплоти середовищу, однак сумарна кількість теплоти за цикл  $\oint \delta Q > 0$ . Навпаки, під час кругового процесу, який відбувається проти годинникової стрілки, робота виконується над системою ( $\oint \delta A < 0$ ) завдяки теплообміну з навколишнім середовищем, такий процес називається *зворотним циклом*. Подібно до прямого циклу, у зворотному циклі система може і поглинати, і віддавати теплоту середовищу, однак сумарна кількість теплоти за цикл  $\oint \delta Q < 0$ .

За прямого циклу робота складається з роботи системи (ділянка  $1 \rightarrow a \rightarrow 2$ ) і роботи над системою (ділянка  $2 \rightarrow b \rightarrow 1$ ):

$$A = \int_1^2 p dV + \int_2^1 p dV.$$

Важливим прикладним застосуванням термодинамічних циклів є теплові машини. Під *тепловою машиною* розуміють пристрій, що перетворює частину внутрішньої енергії робочого тіла в механічну роботу (рис. 2.19).

Теплові машини поділяють на два класи: машини одноразової дії (ракета, гармата тощо) і циклічні машини (парові машини, двигуни внутрішнього згоряння). У циклічних машинах процеси перетворення теплоти в роботу періодично повторюються. Для цього потрібно, щоб робоче тіло після одержання теплота від джерела, виконавши роботу, повернулося у вихідний стан, щоб знову почати такий самий круговий процес.

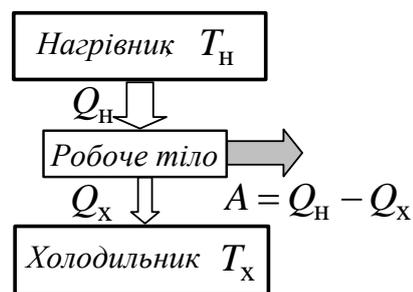


Рис. 2.19

Важливою характеристикою теплових машин є *термічний коефіцієнт корисної дії*  $\eta$  (ККД), який характеризує ефективність роботи теплових машин і визначається як відношення роботи  $A$ , виконаної за цикл, до кількості теплоти  $Q_H$ , отриманої від нагрівника за цикл:

$$\eta = \frac{A}{Q_H} \quad (2.28)$$

Оскільки в загальному випадку  $\oint \delta Q \neq Q_H$ , через те що деяка кількість тепла  $Q_X$  може бути передана холодильнику. Очевидно, що:

$$\oint \delta Q = Q_H - Q_X.$$

Отже, згідно з першим началом термодинаміки для циклів

$$A = Q_H - Q_X.$$

Підстановка останнього виразу в формулу (2.28) приводить до наступної формули для ККД теплових двигунів:

$$\eta = 1 - \frac{Q_X}{Q_H}. \quad (2.29)$$

Це вся інформація, яку може дати перше начало термодинаміки для теплових двигунів. З останньої формули випливає, що *ККД не може перевищувати одиниці*. Інакше кажучи, жоден з теплових двигунів не виконуватиме роботи, яка перевищує кількість теплоти, отриманої від нагрівника. Двигуни з  $\eta > 1$  називаються *вічними двигунами першого*

роду. Таким чином, згідно з першим законом термодинаміки вічний двигун першого роду є неможливим.

З іншого боку, формула (2.29) не заперечує циклів з  $\eta=1$ , в яких  $Q_x = 0$ , тобто вся теплота, отримана робочим тілом від нагрівника, перетворюється в роботу. Причини цього розкриває друге начало термодинаміки.

### Цикли теплових машин

Найбільш практичну реалізацію термодинамічні цикли знайшли в теплових машинах, які називаються двигунами внутрішнього згорання. Завдяки компактності, високій економічності, надійності, довговічності їх використовують у господарській діяльності. Найпоширенішими двигунами внутрішнього згорання нині є двигуни, у яких як пальне використовують бензин і солярку. Ці два типи двигунів, окрім використання різного типу пального, працюють за різними типами термодинамічних циклів, особливості яких залежать від теплофізичних властивостей пального.

### Цикл Отто

Цикл Отто реалізовано у двигунах, у яких використовують як пальне бензин, який швидко згорає (рис. 2.20). Реальні машини використовують порцію пального за один цикл, потім відпрацьоване пальне викидається в атмосферу, а циліндр двигуна поповнюється

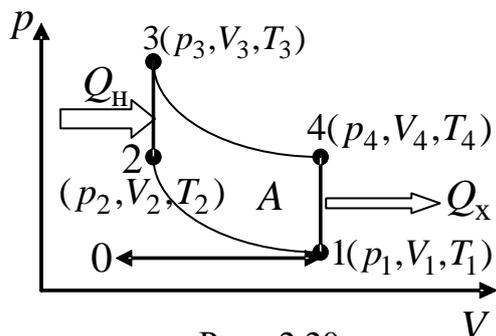


Рис. 2.20

новою порцією пального. Всмоктування пального відбувається на ділянці 0-1 циклу Отто (рис. 2.20), а викид – на ділянці 1-0.

Ділянка 1-2 відповідає адіабатичному (швидкому) стиску пального. За адіабатичного стиску внутрішня енергія парів бензину підвищується, температура також підвищується, у стані 2 пальне запалюється за допомогою іскри. Оскільки воно згорає швидко, процес 2-3 можна вважати ізохорним: об'єм не встигає змінитися, а тиск зростає. На цьому етапі внаслідок згорання пального до робочого тіла надходить кількість теплоти  $Q_H$ , яка визначається за формулою:

$$Q_H = C_V (T_3 - T_2). \quad (2.30)$$

На ділянці 3-4 газ швидко адіабатично розширюється (робочий хід поршня), при цьому його внутрішня енергія зменшується, отже,

знижується температура. Подальше охолодження газу до початкової температури відбувається ізохорно (ділянка 4-1). При цьому частина тепла, отриманої від нагрівача, віддається холодильнику. Холодильником для двигунів внутрішнього згоряння звичайно є атмосфера. Кількість теплоти, віддане холодильнику, згідно з першим началом термодинаміки для ізохорного процесу, визначається за формулою:

$$|Q_x| = C_V (T_4 - T_1). \quad (2.31)$$

Оскільки в цьому циклі тільки на одній ділянці 2-3 тепло надходить до робочого тіла і на одній ділянці 4-1 віддається холодильнику, корисна робота такого циклу може бути визначена за формулою:  $A = |Q_H| - |Q_x|$ . Тоді ККД такого циклу може бути розрахований за формулою (2.29) відповідно до (2.30) і (2.31):

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1 \frac{T_4/T_1 - 1}{T_3/T_2 - 1}}{T_2}. \quad (2.32)$$

З рівнянь Пуассона для адіабат і  $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$  та  $T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1}$  знайдемо  $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_4}{T_3} = \frac{T_1}{T_2}$ . Відтак формула (2.32) набуває вигляду:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \quad (2.33)$$

Із цієї формули стає очевидним, що збільшення ступеня стиску ( $V_1/V_2$ ) збільшує ККД циклу, а також те, що ККД залежить від числа ступенів свободи речовини пального. Слід зазначити, що мінімальною температурою в цьому циклі є температура  $T_1$ , а максимальною –  $T_3$ . У формулу (2.64) входить температура  $T_2$ , менша, ніж  $T_3$ . Тому ККД циклу Отто є меншим за ККД циклу Карно у тому ж інтервалі температур:

$$\eta < 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}.$$

## Цикл Дизеля

Цикл Дизеля реалізований у двигунах, які працюють на пальному, що відносно повільно згоряє, наприклад, на солярці. Він відображений

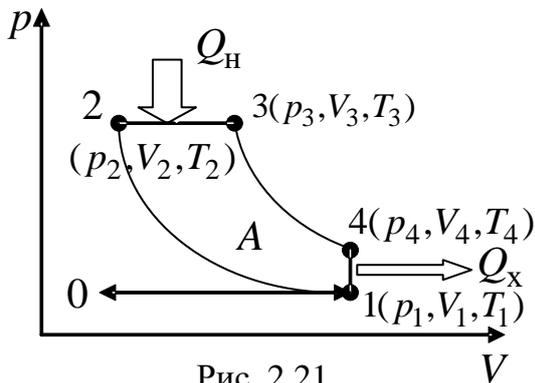


Рис. 2.21

на рис. 2.21. На ділянці 0-1 циклу Дизеля відбувається упорскування пального, а викид – на ділянці 1-0. Ділянка 1-2 відповідає адіабатичному стиску, за якого підвищується температура. У стані 2 пальне самозаймається завдяки високій температурі та відносно повільно згоряє, так що поршень починає

рухатися. Тому ділянку 2-3 можна вважати ізобарним процесом, причому завдяки згорянню пального у систему надходить певна кількість теплоти  $Q_H$ . Згідно з першим началом термодинаміки ця кількість теплоти йде на для виконання поршнем роботи та на збільшення внутрішньої енергії робочого тіла. Кількість теплоти можна виразити через теплоємність ізобарного процесу :

$$Q_H = C_P (T_3 - T_2). \quad (2.34)$$

Ділянка 3-4 – це ділянка швидкого розширення робочого тіла, тобто адіабатичного розширення. Робоче тіло виконує роботу завдяки своїй внутрішній енергії, при цьому його температура знижується. Охолодження робочого тіла до початкової температури відбувається ізохорно (ділянка 4-1), при цьому холодильнику віддається певна кількість теплоти:

$$Q_X = C_P (T_1 - T_4). \quad (2.35)$$

ККД циклу Дизеля може бути розрахований за формулою (2.29), відповідно до формул (2.33) і (2.34) одержимо:

$$\eta = 1 - \frac{C_V (T_4 - T_1)}{C_P (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)}.$$

ККД циклу Дизеля є також меншим, ніж ККД циклу Карно в однаковому температурному інтервалі. ККД теплових двигунів невисокий: за часто використовуваних температур нагрівача й холодильника він становить 30 ÷ 40%.

## Холодильні машини

Холодильні машини – це пристрої, які працюють за зворотними термодинамічними циклами. Згідно з першим началом термодинаміки завдяки зовнішній механічній роботі певна кількість теплоти передається від тіла з нижчою температурою до тіла з вищою температурою, у результаті чого температура більш холодного тіла знижується, а більш нагрітого – підвищується. Схема роботи холодильної машини наведена на рис. 2.22. Оскільки метою холодильної машини є зміна внутрішньої енергії нагрівника й холодильника внаслідок виконання

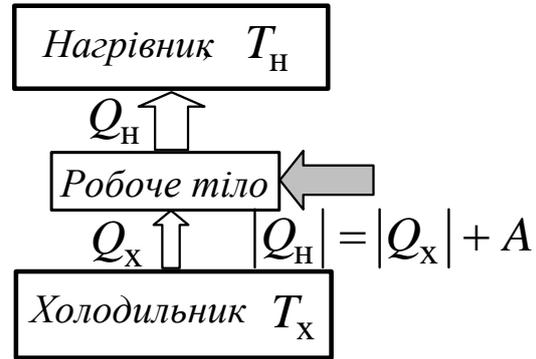


Рис. 2.22

зовнішньої механічної роботи над робочим тілом, ефективність її роботи доцільно характеризувати не тільки ККД, як у тепловій машині.

Ефективність роботи ідеальної холодильної машини можна оцінити за здатністю до зниження температури холодильника за цикл за допомогою *холодильного коефіцієнта*:

$$\zeta_x = \frac{|Q_x|}{|A|} = \frac{1}{\eta} - 1.$$

Оскільки ККД завжди менший за одиницю, тепловий коефіцієнт більший від одиниці.

## 2.4. ДРУГЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМІКИ

Недостатність першого закону термодинаміки для опису макроскопічних процесів можна проілюструвати на такому прикладі. Уявімо ізольовану систему, що складається із двох частин (підсистем) 1 і 2, між якими є тепловий контакт. Якщо підсистеми не перебувають у рівновазі одна з одною, тобто мають різні температури  $T_1$  та  $T_2$ , то між ними буде відбуватись теплообмін, поки температури не зрівняються й уся ізольована система не прийде в рівноважний стан. Згідно з першим началом термодинаміки в процесі теплообміну  $Q_1 = -Q_2$ , де  $Q_1$  і  $Q_2$  – кількість тепла, отриманого першою і другою підсистемами.

Зауважимо, однак, що, спираючись тільки на перше начало, неможливо визначити, яка з величин,  $Q_1$  чи  $Q_2$ , буде позитивною, інакше кажучи, неможливо визначити, чи буде теплота передаватися від більш нагрітого тіла до менш нагрітого тіла, або навпаки, з погляду першого закону, обидва випадки є можливими, аби тільки був дотриманий баланс енергії. Однак, як свідчить експеримент, в описаній вище ситуації процес завжди відбувається тільки в одному напрямку – теплота передається від більш нагрітого тіла до менш нагрітого.

Наведемо ще один важливий приклад процесів, для аналізу яких першого закону термодинаміки явно недостатньо. Як було зазначено, перше начало термодинаміки не заперечує існування двигунів з  $Q_x = 0$ , отже, з  $\eta = 1$ . У такій машині, яка дістала назву *вічного двигуна другого виду*, теплота, отримана робочим тілом, повністю перетворюється в роботу, або робота відбувається внаслідок охолодження лише одного джерела теплоти. Було б дуже заманливо мати можливість побудови вічного двигуна другого виду, тому що в нашому розпорядженні було б практично невичерпне джерело тепла – океан. Важливий висновок, до якого прийшов французький вчений Карно, полягає у тому, що *за постійної температури теплоту не можна перетворити у роботу*, тобто вічний двигун другого виду є неможливим. Однак зворотний процес – повне перетворення роботи в теплоту – цілком можливо здійснити, наприклад, за допомогою тертя.

Друге начало термодинаміки було незалежно постульоване Клаузіусом і Томсоном. Учені запропонували різні, але, як потім з'ясувалося, еквівалентні формулювання цього фундаментального закону.

- *Формулювання Клаузіуса*: неможливим є процес, єдиний результат якого – передавання теплоти від холодного тіла до гарячого.

- *Формулювання Томсона*: неможливим є циклічний процес, єдиний результат якого – здійснення роботи внаслідок охолодження одного тіла.

В обох формулюваннях важливе значення мають слова «єдиний результат». Наприклад, у холодильній машині теплота передається від холодного тіла до гарячого, але це не єдиний результат процесу, оскільки для цього процесу потрібно виконати роботу над системою.

### 2.4.1. Оборотні та необоротні процеси

Усі фізичні процеси, що відбуваються в природі, поділяються на два типи – оборотні і необоротні.

Припустимо, що ізольована термодинамічна система в результаті деякого процесу переходить зі стану  $A$  в стан  $B$ . Процес називається оборотним, якщо можна здійснити зворотний перехід з  $B$  в  $A$  через ті ж проміжні стани так, щоб при цьому не сталося ніяких змін в навколишньому середовищі. Якщо такого зворотного переходу здійснити не можна, тобто якщо по закінченню процесу в самій системі або навколишньому середовищі сталися якісь зміни, то процес є необоротним.

Будь-який процес, що супроводжується тертям, є необоротним, тому що внаслідок тертя частина роботи завжди перетворюється в тепло, тепло розсіюється у навколишньому середовищі, нагріваючи його, через що процес стає необоротним. Ідеальний механічний процес, що відбувається в консервативній системі (без участі сил тертя), був би оборотним. Прикладом такого процесу є коливання важкого маятника на довгому підвісі. Через малий опір середовища амплітуда коливань маятника практично не змінюється протягом тривалого часу, при цьому кінетична енергія маятника повністю переходить у його потенціальну енергію, й навпаки.

Найважливішою принциповою особливістю всіх теплових явищ, у яких бере участь величезна кількість молекул, є їхній необоротний характер. Прикладом необоротного процесу є розширення газу, навіть ідеального, у порожнечу. Припустимо, що маємо закриту посудину, розділену на дві рівні частини заслінкою (рис. 2.23). Нехай у частині I перебуває деяка кількість газу, а в частині II – вакуум. Дослід засвідчує: якщо прибрати заслінку, то газ рівномірно розподілиться по всьому об'єму посудини (розшириться в порожнечу). Це явище відбувається самовільно, без зовнішнього втручання. Незважаючи на те, як завгодно довго триває експеримент, газ залишається розподіленим з однаковою густиною по всій посудині. Хоча скільки б ми не чекали, нам не вдасться спостерігати, щоб газ, розподілений по всій посудині I+II сам собі, тобто без втручання ззовні, вийшов із частини II і сконцентрувався весь у частині I, що дало

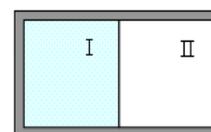


Рис. 2.23

б нам можливість знову за допомогою заслінки повернутися до початкового стану. Таким чином, очевидно, що процес розширення газу в порожнечу є необоротним.

Дослід засвідчує, що теплові явища майже завжди мають властивість необоротності. Так, наприклад, якщо поряд перебувають два тіла, з яких одне тепліше за інше, то їхні температури поступово вирівнюються, тобто тепло самовільно перетікає від більш теплого тіла до більш холодного. Однак зворотний перехід теплоти від більш холодного тіла до нагрітого, який може бути здійснений у холодильній машині, не відбувається самовільно. Для здійснення такого процесу потрібна затрата роботи ще якого-небудь тіла, що призводить до зміни стану цього тіла. Отже, умов оборотності не дотримано.

Грудочка цукру, поміщена у гарячий чай, розчиняється в ньому, але не буває так, щоб з гарячого чаю уже розчинений цукор виділився й знову зібрався у вигляді грудочки. Звісно, одержати цукор, випарувавши його з розчину, можна. Але цей процес супроводжується змінами в навколишньому середовищі, що свідчить про необоротність процесу розчинення. Прикладів необоротних процесів можна навести багато. По суті, будь-який процес, що відбувається в природі в реальних умовах, є необоротним.

Отже, у природі є два види принципово різних процесів – оборотні й необоротні. М. Планк зауважив, що відмінність між оборотними й необоротними процесами лежить набагато глибше, ніж, наприклад, між процесами механічними й електромагнітними, тому її з більшою підставою, ніж будь-яку іншу ознаку, варто було б обрати як найперший принцип розгляду фізичних явищ.

#### 2.4.2. Цикл Карно

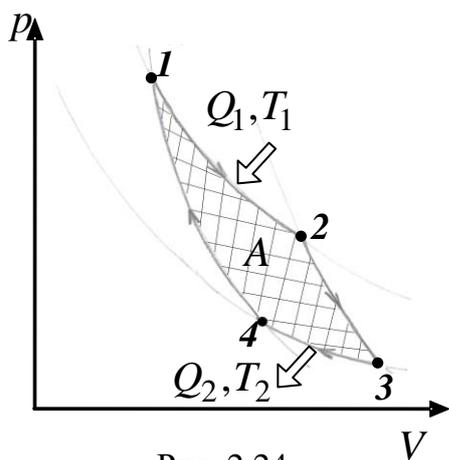


Рис. 2.24

Цикл, за допомогою якого кількість теплоти, яку віднято від якого-небудь тіла, можна найефективніше перетворити в механічну роботу, називається **циклом Карно**. У ролі робочого тіла виступає ідеальний газ. Цикл Карно складається із двох ізотерм і двох адіабат (рис. 2.24). На ділянці 1-2 робоче тіло контактує з

нагрівником (тілом з великою теплоємністю) й одержує від нього кількість теплоти  $Q_1$ . При цьому реалізується ізотермічне розширення газу (через велику теплоємність нагрівника його температура не змінюється). Це найбільш економічно вигідний одноразовий процес, за якого вся отримана кількість теплоти переходить у механічну роботу згідно з першим началом термодинаміки:

$$Q_1 = A_{12} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} . \quad (2.36)$$

Ділянка 2-3 відповідає адіабатичному розширенню ідеального газу. На цьому етапі немає контакту із нагрівачем і робоче тіло не обмінюється енергією з іншими тілами. Це теж вигідно, оскільки в цьому випадку газ виконує роботу завдяки власній внутрішній енергії, внаслідок чого вона зменшується, температура газу стає рівною  $T_2$ . Згідно з першим началом термодинаміки:

$$A_{23} = -\Delta U_{23} = c_V \nu (T_1 - T_2) . \quad (2.37)$$

На ділянці 3-4 робоче тіло приводиться в тепловий контакт із холодильником, який має більшу теплоємність і температуру  $T_2$ . За більш низької температури газ стискають ізотермічно, виконуючи над ним роботу, яка чисельно дорівнює відданій холодильнику кількості теплоти, тоді як робота самого газу, так само, як і віддана кількість теплоти, від'ємна:

$$Q_2 = A_{34} = \nu RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -\nu RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \quad (2.38)$$

За більш низької температури, коли внутрішня енергія менша за початкову, газ стискати легше, тому робота  $A_{34}$  менша за роботу  $A_{12}$ . Ізотермічний стиск знову виявляється найефективнішим, оскільки не потрібно змінювати внутрішню енергію газу, затрачаючи на це додаткову роботу зовнішніх сил. На останній ділянці циклу Карно потрібно повернути газ у початковий стан найефективнішим чином, тобто адіабатично стиснути його. За адіабатичного стиску немає теплового контакту робочого тіла з холодильником, а робота зовнішніх сил повністю затрачується на збільшення внутрішньої енергії газу:

$$A_{41} = -\Delta U_{41} = -c_V \nu (T_1 - T_2) . \quad (2.39)$$

Корисна робота за цикл дорівнює алгебраїчній сумі робіт кожної ділянки циклу Карно:  $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$ . Порівняння формул

(2.37) і (2.39) приводить до висновку, що робота газу на ділянці 2-3 за величиною дорівнює роботі газу на ділянці 4-1, але є протилежною за знаком, отже, алгебраїчна сума робіт на цих ділянках дорівнює нулю, а робота за цикл буде визначатися сумою робіт ділянок 1-2 і 3-4:

$$A = \nu R \left( T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \right). \quad (2.40)$$

Для подальшого перетворення корисної роботи розглянемо рівняння адиабати на ділянках 2-3 і 4-1, записані через об'єм і температуру:  $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$  і  $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$ . Поділимо друге рівняння на перше й одержимо:  $(V_2/V_1)^{\gamma-1} = (V_3/V_4)^{\gamma-1}$ , або  $V_2/V_1 = V_3/V_4$ . Відповідно до цієї рівності можна винести за дужки натуральний логарифм відношення об'ємів у формулі (2.40) й одержати вираз для корисної роботи за цикл Карно:

$$A = \nu R (T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (2.41)$$

Знайдемо ККД теплової машини, яка працює за прямим циклом Карно. Підставимо у формулу для ККД (2.29) роботу, виконану за цикл, визначену за формулою (2.41), і кількість теплоти, отриманої від нагрівника, визначену за формулою (2.36), після перетворення одержимо вираз для розрахунку коефіцієнта корисної дії (ККД) циклу Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (2.42)$$

Таким чином, *ККД циклу Карно залежить лише від відношення температур холодильника та нагрівника і не залежить від роду робочого тіла. Це твердження має назву першої теореми Карно.*

Оскільки цикл Карно складається з оборотних термодинамічних процесів, він є ідеальним циклом і його неможливо здійснити в жодному реальному тепловому двигуні.

Як зазначено в розділі 2.3.4, цикли Отто та Дизеля також є ідеальними циклами, однак, як показав Карно на підставі другого начала термодинаміки, *ККД будь-якої теплової машини (як реальної, так й ідеальної) не може перевищувати ККД ідеальної теплової машини, яка працює за циклом Карно з однаковими температурами нагрівника та холодильника. Це твердження називається другою теоремою Карно.*

### 2.4.3. Ентропія

Використовуючи вираз ККД для будь-якої теплової машини, зокрема і тієї, у якій можуть мати місце необоротні процеси, і ККД теплової машини, що працює за ідеальним циклом Карно, формулювання другої теореми Карно можна представити у вигляді співвідношення:

$$\eta \leq \eta_{\text{к}} \quad \text{або} \quad \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (2.43)$$

де  $Q_1$  та  $Q_2$  – кількість теплоти, підведеної до робочого тіла та відведеного від нього.

Тоді з (2.43) матимемо:

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Звідси отримуємо так звану *нерівність Клаузіуса*:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0, \quad (2.44)$$

де знак рівності стосується оборотного циклу, а знак „менше” – необоротного циклу.

Відношення теплоти до температури, за якою вона передається до робочого тіла  $\left(\frac{Q}{T}\right)$ , називається *приведеною кількістю теплоти*.

Тоді *нерівність Клаузіуса* формулюється так: *сума приведених кількостей теплоти в оборотному процесі дорівнює нулю, а в необоротному – менша від нуля.*

Зазначимо, що *рівність Клаузіуса* можна поширити на будь-який оборотний процес (а не тільки на цикл Карно). На рис. 2.25 показано, що будь-який оборотний цикл можна представити у вигляді нескінченної кількості елементарних циклів Карно.

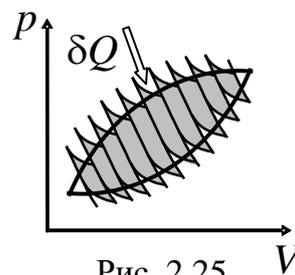


Рис. 2.25

Для кожного елементарного циклу приведена кількість теплоти буде  $\delta Q/T$ , а повна приведена теплота визначатиметься формулою:

$$\oint \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{іа}} = 0.$$

Отже, у будь-якому оборотному циклі повна приведена кількість теплоти дорівнює нулю.

Але якщо інтеграл якоїсь функції вздовж довільної замкненої лінії дорівнює нулю, то та сама функція є функцією стану, тобто різниця значень функції не залежить від виду процесу переходу зі стану 1 до стану 2 (аналогом цього є поняття внутрішньої енергії).

Позначимо: 
$$\frac{\delta Q}{T} = dS. \quad (2.45)$$

Нова функція стану  $S$  називається *ентропією*.

Рівність (2.45) справедлива тільки для оборотних процесів і використовується для розрахунків зміни ентропії в кінцевих станах:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (2.46)$$

Якщо система оборотним шляхом робить круговий процес (цикл), то  $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$ , а, отже,  $\oint dS = 0$ , то  $S = \text{const}$ .

У випадку необоротних нерівноважних процесів  $dS \neq \frac{\delta Q}{T}$ , а також для необоротних кругових процесів дотримується строга *нерівність Клаузіуса*:

$$\oint \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{і н. н.}} < 0. \quad (2.47)$$

Розглянемо, що відбувається з ентропією в ізольованій термодинамічній системі.

В ізольованій термодинамічній системі у разі будь-якої оборотної зміни стану її ентропія не зміниться. Математично це можна записати:

$$dS = 0.$$

Розглянемо, що відбувається з ентропією термодинамічної системи під час необоротного процесу. Припустимо, що перехід зі стану 1 у стан 2 по шляху 1a2 оборотний, а зі стану 2 у стан 1 по шляху 2b1 – необоротний (рис. 2.26).

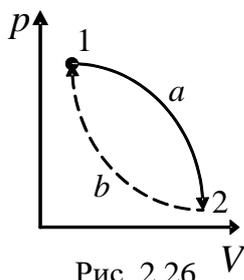


Рис. 2.26

Запишемо вираз для правої частини нерівності (2.47) відповідно до нашого прикладу:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_{1a2} \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{і н. н.}} + \int_{2b1} \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{і н. н.}}.$$

Перший доданок у цій формулі може бути замінений на зміну ентропії, тому що цей процес оборотний. Тоді нерівність Клаузіуса можна записати у вигляді:

$$S_2 - S_1 + \int_{2b1} \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{i \hat{a} \acute{a}} < 0.$$

Звідси:

$$S_2 - S_1 < \int_{2b1} \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{i \hat{a} \acute{a}}.$$

Оскільки,  $\int_{2b1} \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{i \hat{a} \acute{a}} = - \int_{1b2} \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{i \hat{a} \acute{a}}$ , то остаточно можна

записати:

$$S_2 - S_1 > \int_{1b2} \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{i \hat{a} \acute{a}}. \quad (2.48)$$

Якщо система адіабатично ізольована, то  $\delta Q = 0$ , нерівність (2.48) матиме вигляд:

$$S_2 - S_1 > 0, \quad (2.49)$$

тобто ентропія ізольованої системи під час необоротного процесу зростає. Зростання ентропії триває не безмежно, а до певного максимального значення, характерного для даного стану системи. Це максимальне значення ентропії відповідає стану термодинамічної рівноваги. Зростання ентропії під час необоротних процесів в ізольованій системі означає, що енергія, яку має система, стає менш доступною для перетворення в механічну роботу. У стані рівноваги, коли ентропія сягає максимального значення, енергія системи не може бути перетворена в механічну роботу. Якщо система не ізольована, ентропія може і зменшуватись, і зростати залежно від напрямку теплообміну.

Використовуючи поняття ентропії та нерівність Клаузіуса, друге начало термодинаміки можна сформулювати як закон зростання ентропії замкненої системи під час необоротних процесів: *будь-який необоротний процес у замкненій системі відбувається так, що ентропія системи при цьому зростає.*

Можна запропонувати більш коротке формулювання другого начала термодинаміки: *у процесах, що відбуваються в адіабатично замкненій системі, ентропія не зменшується.* В цьому твердженні

суттєвим є те, що йдеться про адіабатично замкнені системи, тому що в незамкнутих системах ентропія може мати довільний характер.

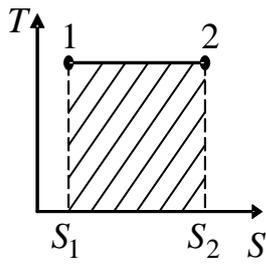


Рис. 2.27

Ентропія як функція стану системи може виступати як параметр стану, так само як і температура, тиск чи об'єм. Зображуючи той чи інший процес на діаграмі ентропія – температура ( $T$ - $S$ ), можна дати математичну інтерпретацію кількості теплоти як площі фігури під кривою, що відображує процес. На рис. 2.27 наведено діаграму для ізотермічного процесу в координатах ( $T$ - $S$ ).

Формула (2.73) дає змогу визначати зміну ентропії за різних процесів, що відбуваються в термодинамічній системі. Розглянемо зміну ентропії під час ізопроцесів в ідеальному газі.

**Адiabатичний процес.** В адіабатичному процесі  $\delta Q = 0$ , тому зміна ентропії:

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Таким чином, в адіабатичному процесі ентропія системи не змінюється. Отже, адіабатичні процеси є ізентропійними процесами.

**Ізотермічний процес.** Використовуючи перше начало термодинаміки (2.25) і формулу (2.43), знаходимо зміну ентропії в ізотермічному процесі:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta A}{T} = \frac{1}{T} \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (2.50)$$

Оскільки  $V_2 > V_1$ , то  $\Delta S > 0$ , тобто за ізотермічного розширення ентропія зростає.

**Ізохорний процес.** Відповідно до першого начала термодинаміки (2.10) і рівняння (2.19) знаходимо зміну ентропії:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU}{T} = \frac{m}{\mu} C_V \int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (2.51)$$

Отже, внаслідок ізохорного нагрівання ( $T_2 > T_1$ ) ентропія ідеального газу зростає.

**Ізобарний процес.** Згідно з першим началом термодинаміки (2.10) і рівнянням (2.21) збільшення ентропії становить:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{m}{\mu} C_p \int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{m}{\mu} C_p \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad (2.52)$$

тобто за ізобарного нагрівання ( $T_2 > T_1$ ) ентропія ідеального газу збільшується.

У середині XIX століття виникла проблема так званої теплової смерті Всесвіту. Розглядаючи Всесвіт як замкнену систему та застосовуючи до неї друге начало термодинаміки, Клаузіус звів його зміст до твердження, що ентропія Всесвіту повинна досягти свого максимуму. Це означає, що згодом усі форми руху повинні перейти в теплову форму. Перехід теплоти від гарячих тіл до холодних призведе до того, що температура всіх тіл у Всесвіті зрівняється, тобто настане повна термодинамічна рівновага, і всі процеси припиняться – настане тепла смерть Всесвіту.

Помилковість висновку про теплову смерть полягає в тому, що застосовувати друге начало термодинаміки до незамкнутих систем, наприклад до такої безмежної системи, що нескінченно розвивається, як Всесвіт, треба із застереженням.

### ***Фізичний зміст ентропії. Ентропія і ймовірність***

З'ясуємо фізичний зміст ентропії. Для цього скористаємося рівнянням (2.50) для ізотермічного процесу, за якого внутрішня енергія не змінюється, а будь-які зміни характеристик зумовлені лише зміною об'єму. Розглянемо зв'язок об'єму, який займає газ у рівноважному стані, з кількістю просторових мікростанів частинок газу. Кількість мікростанів частинок газу, за допомогою яких реалізується макростан газу як термодинамічної системи, можна підрахувати в такий спосіб. Поділимо весь об'єм на елементарні кубічні комірки зі стороною  $d \sim 10^{-10}$  м (порядку величини ефективного діаметра молекули). Об'єм такої комірки дорівнюватиме  $d^3$ . У першому стані газ займає об'єм  $V_1$ , отже, кількість елементарних комірок, тобто кількість місць  $N_1$ , які можуть займати молекули в цьому стані, буде дорівнювати  $N_1 = \frac{V_1}{d^3}$ .

Аналогічно для другого стану з об'ємом  $V_2$  одержимо  $N_2 = \frac{V_2}{d^3}$ . Слід

зазначити, що зміна положень молекул відповідає новому мікростану. Не будь-яка зміна мікростану спричинить зміни макростану.

Припустимо, молекули можуть займати  $N_1$  місць, тоді обмін місцями будь-яких молекул у цих  $N_1$  комірках не призведе до нового макростану. Однак перехід молекул в інші комірки зумовить зміни макростану системи. Кількість мікростанів газу, що відповідають даному макростану, можна підрахувати, визначивши кількість способів розміщення частинок цього газу в елементарних комірках. Для спрощення розрахунків розглянемо 1 моль ідеального газу. Для 1 моля ідеального газу рівняння (2.52) матиме вигляд:

$$\Delta S = R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (2.53)$$

Число мікростанів системи, що займає об'єм  $V_1$ , позначимо  $\Gamma_1$  і визначимо, підрахувавши число розміщень  $N_A$  молекул, які утримуються в 1 молі газу, по  $N_1$  коміркам:  $\Gamma_1 = \frac{N_1!}{(N_1 - N_A)!}$ . Аналогічно підрахуємо

число мікростанів  $\Gamma_2$  системи, що займає об'єм  $V_2$ :  $\Gamma_2 = \frac{N_2!}{(N_2 - N_A)!}$ .

Число мікростанів  $\Gamma_i$ , за допомогою яких можна реалізувати  $i$ -тий макростан, називається термодинамічною ймовірністю даного макростану. Термодинамічна ймовірність  $\Gamma \geq 1$ .

Знайдемо відношення  $\Gamma_2/\Gamma_1$ :

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = \frac{N_2!(N_1 - N_A)!}{N_1!(N_2 - N_A)!}.$$

Для ідеальних газів кількість вільних місць є набагато більшою за кількість молекул, тобто  $N_1 \gg N_A$  і  $N_2 \gg N_A$ . Згідно з виразом для чисел  $N_1$  і  $N_2$  через відповідні об'єми одержимо:

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \approx \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^{N_A} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{N_A}.$$

Таким чином можна виразити відношення об'ємів через відношення термодинамічних ймовірностей відповідних станів:

$$\frac{V_2}{V_1} = \left( \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^{\frac{1}{N_A}}. \quad (2.54)$$

Підставимо (2.84) в (2.83) й одержимо:  $\Delta S = \frac{R}{N_A} \ln \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$ . Зважаючи

на те, що відношення молярної газової постійної та числа Авогадро є сталою Больцмана  $k$ , а також на те, що логарифм відношення двох величин дорівнює різниці логарифмів цих величин, одержимо:  $S_2 - S_1 = k \ln \Gamma_2 - k \ln \Gamma_1$ . На цій підставі можна дійти висновку, що ентропія  $i$ -го стану визначається логарифмом числа мікростанів, за допомогою яких реалізується даний макростан:

$$S_i = k \ln \Gamma_i. \quad (2.55)$$

Формула (2.55) називається формулою Больцмана на честь німецького вченого, який визначив статистичний зміст ентропії як міри хаосу. Формула Больцмана має більш загальне значення, ніж формула (2.53), тобто може бути застосована не тільки для ідеальних газів, вона дає змогу розкрити фізичний зміст ентропії. Чим більш упорядкована система, тим менша кількість мікростанів, за допомогою яких здійснюється даний макростан, тим менша ентропія системи. Зростання ентропії в ізольованій системі, де відбуваються необоротні процеси, означає рух системи в напрямку до найбільш імовірного стану, яким є стан термодинамічної рівноваги. Можна сказати, що ентропія є ступенем хаосу системи; чим більший хаос в ній, тем вища ентропія. У цьому полягає фізичний зміст ентропії.

Нерівноважна термодинамічна система після припинення дії джерела, що підтримує її в нерівноважному стані, згодом переходить у найбільш імовірний рівноважний стан. Такий перехід супроводжується зростанням ентропії. Отже, по зміні ентропії можна судити про напрямок перебігу самовільного процесу.

#### **2.4.4. Третє начало термодинаміки. Теорема Нернста**

*Перші два начала термодинаміки дають недостатньо відомостей про поведінку термодинамічних систем при нулі за шкалою Кельвіна. Вони доповнюються третім началом термодинаміки, або теоремою: ентропія всіх тіл у стані рівноваги прямує до нуля за наближення температури до нуля Кельвіна:*

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0.$$

Оскільки ентропія визначається з точністю до адитивної константи, то цю константу зручно вважати такою, що дорівнює нулю. З теореми випливає, що теплоємності  $C_p$  і  $C_V$  всіх тіл за  $T = 0$  К дорівнюють нулю.

## 2.5. РЕАЛЬНІ ТЕРМОДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ

### 2.5.1. Сили взаємодії між молекулами. Агрегатні стани речовини

Для найбільш загальної характеристики теплових властивостей макроскопічних тіл користуються поняттям *агрегатних станів* – газоподібного, рідкого та твердого.

У будівельній справі використовують матеріали з різними фізико-хімічними властивостями, які перебувають в різних агрегатних станах. Для правильного застосування матеріалів треба знати їхні властивості, зумовлені їхньою атомно-молекулярною будовою.

Агрегатний стан речовини визначається силами взаємодії між її молекулами. Сили взаємодії між молекулами мають електромагнітну природу, хоча взагалі молекули електрично нейтральні, заряди в атомах і молекулах можуть бути розміщені не симетрично, а розсунуті один відносно одного, утворюючи електричний диполь. Якщо такої асиметрії немає, вона може виникнути внаслідок взаємодії молекул. Кількісно оцінити сили взаємодії між молекулами досить важко, оскільки кожна молекула містить не по одній, а багато заряджених частинок. Відомо лише, що між молекулами можуть діяти як сили притягання, так і сили відштовхування.

Як свідчать теорія й експеримент, і сили притягання, і сили відштовхування значною мірою залежать від відстані між центрами молекул, що взаємодіють. Наближено можна вважати, що й ті, й інші обернено пропорційні деякій степені відстані між молекулами, тобто:

$$F \sim \frac{1}{r^m}.$$

Відмінність між силами притягання  $F_n$  та відштовхування  $F_e$ , полягає в значенні показника степеня при  $r$ . Для сил притягання  $m = 7$ , для сил відштовхування  $m$  може набувати значення від 9 до 15. З наведених значень  $m$  випливає, що сили відштовхування змінюються залежно від відстані значно швидше, тому вони можуть проявлятися

тільки під час безпосереднього зближення молекул. Якісна залежність сил притягання і відштовхування й результуючої сили взаємодії між молекулами відповідно до відстані між ними наведено на рис. 2.28, а.

Як видно з рис. 2.28, а, за деякого значення  $r = r_0$  сила притягання дорівнює силі відштовхування й результуюча сила, що діє між молекулами, дорівнює нулю. Отже, потенціальна енергія взаємодії молекул при цьому значенні повинна мати мінімальне значення. У цілому залежність потенціальної енергії взаємодії молекул від відстані між ними, що представлена на рис. 2.28, б, має вигляд характерної потенціальної ями, глибина якої визначається величиною  $W_n = W_{n \min}$

Величина  $W_{n \min}$  разом з кінетичною енергією хаотичного теплового руху  $W_k \sim kT$ , яка пропорційна абсолютній температурі системи, визначає агрегатний стан речовини.

За невисоких температур, коли дотримується умова  $W_{n \min} \gg kT$  (глибока потенціальна яма), речовина перебуває у твердому агрегатному стані.

Якщо ж потенціальна енергія взаємодії молекул є невеликою (неглибока потенційна яма), а система перебуває за досить високої температури й характеризується великою кінетичною енергією теплового руху, так що виконується умова  $W_{n \min} \ll kT$ , речовина перебуває в газоподібному стані.

У проміжному випадку, коли  $W_{n \min} \sim kT$ , речовина перебуває в рідкому агрегатному стані.

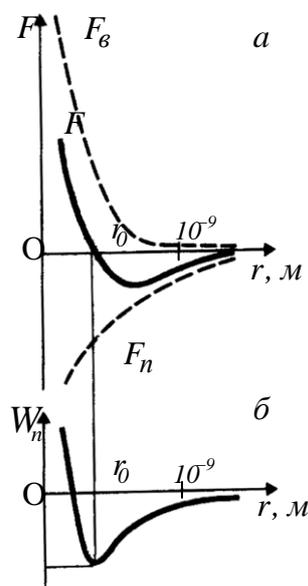


Рис. 2.28

### 2.5.2. Реальні гази. Рівняння Ван дер Ваальса

Досі як термодинамічні системи ми розглядали ідеальний газ. Як зазначалось, ця модель добре описує властивості реальних газів за достатнього розрідження, тобто за невисокого тиску і не дуже низьких температур. При підвищенні тиску та зниженні температури середні відстані між молекулами зменшуються, отже, середня кінетична енергія молекул стає порівняною з потенціальною енергією їхньої взаємодії, а тому поведінка реального газу усе більше відрізняється від поведінки ідеального газу. Так, радіус молекул більшості газів – порядку  $10^{-10}$  м, отже, об'єм молекул – порядку  $4 \cdot 10^{-30}$  м<sup>3</sup>. В 1 м<sup>3</sup> газу за нормальних умов утримується  $2,7 \cdot 10^{25}$  молекул. Таким чином, власний об'єм молекул в 1 м<sup>3</sup> за нормальних умов буде порядку  $1,2 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>, тобто близько 0,0001 від об'єму, зайнятого газом.

При збільшенні тиску до 500 МПа об'єм газу за законом Бойля – Маріотта має зменшитись в 5000 разів, тобто та сама кількість молекул повинна міститись в об'ємі  $2 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>. Отже, власний об'єм молекул займає 0,5 об'єму посудини. Ясно, що за таких умов нехтувати розмірами молекул не можна. Крім того, не можна при цьому не брати до уваги сили взаємодії між молекулами, оскільки вони тепер перебувають на порівняно близькій відстані одна від одної. Очевидно, слід перейти від моделі ідеального газу до реальних газів.

Для одержання рівняння, що більш точно описує поведінку реальних газів, треба ґрунтуватися на більш близькій до реального газу моделі.

З великої кількості рівнянь, запропонованих для опису поведінки реальних газів, найпростішим й одночасно, таким, що дає можливість зрозуміти процеси в реальних газах, є рівняння голландського фізика Ван дер Ваальса, яке він запропонував у 1873 році. Для одержання рівняння Ван дер Ваальс скористався такою моделлю: молекули газу являють собою абсолютно пружні кульки скінченного розміру, між якими є сили взаємного притягання.

Відповідно до цієї моделі Ван дер Ваальс запропонував два виправлення в рівнянні Менделєєва – Клапейрона.

1) Врахувати об'єм молекул. Перше виправлення Ван дер Ваальса  $b$  – виправлення на так званий недоступний об'єм. Якщо позначити

об'єм нестисливої частини 1 моля газу через  $b$ , то рівняння стану газу має набути такого вигляду:

$$p(V_{\mu} - b) = RT.$$

За  $p \rightarrow \infty$  об'єм газу наближається до  $b$ , а не до 0, як це впливає з щойно наведеного рівняння.

На перший погляд може здатися, що об'єм  $b$  дорівнює простій сумі об'ємів усіх молекул. Але це не так. Слід брати до уваги, що в разі стискування газу зменшується не весь об'єм, а лише різниця між об'ємами газу і його нестисливої частини.

Найближча відстань між центрами двох куль, що зіштовхнулися, дорівнює їхньому подвоєному радіусу (рис. 2.29). Тоді для центру кожної із цих двох молекул (а ймовірність одночасного зіткнення трьох і більш молекул є мізерно малою, і нею можна знехтувати) недоступним є об'єм кулі радіусом  $2r$ . Отже, недоступний об'єм, що припадає на кожну пару молекул, дорівнює:

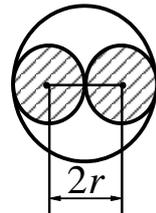


Рис. 2.29

$$\frac{4}{3} \pi (2r)^3 = 8 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3, \text{ де } \frac{4}{3} \pi r^3 - \text{об'єм однієї молекули.}$$

Це означає, що недоступний об'єм, що припадає на кожну молекулу, дорівнює  $4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$ , тобто є учетверо більшим за власний об'єм. А недоступний об'єм, що припадає на всі  $N_A$  молекул моля газу, дорівнює зчетвереному об'єму всіх молекул:

$$b = 4 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 N_A.$$

Якщо, наприклад, у посудині перебувають дві молекули, то центр кожної з них не може наблизитися на відстань, меншу за діаметр  $d = 2r$  молекули. Це означає, що для центрів обох молекул виявляється недоступним сферичний об'єм радіуса  $d = 2r$ , тобто об'єм, що дорівнює восьми об'ємам молекули, а розраховуючи на одну молекулу – зчетверений об'єм молекули.

2) Врахувати сили міжмолекулярної взаємодії. Дія сил притягання газу зумовлює появу додаткового тиску на газ, який називається внутрішнім тиском. Згідно з обчисленнями Ван дер Ваальса внутрішній тиск обернено пропорційний квадрату молярного об'єму, тобто:

$$p' = a/V_{\mu}^2,$$

де  $a$  – постійна Ван дер Ваальса, що характеризує сили міжмолекулярного притягання,  $V_{\mu}$  – молярний об'єм.

Вводячи ці виправлення, одержимо рівняння Ван дер Ваальса для 1 моля газу (рівняння стану реальних газів):

$$\left(p + \frac{a}{V_{\mu}^2}\right) (V_{\mu} - b) = RT. \quad (2.56)$$

Для довільної кількості речовини з огляду на те, що

$$V = \frac{m}{\mu} V_{\mu} = \nu V_{\mu},$$

рівняння (2.56) набуває вигляду:

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \frac{m^2}{\mu^2}\right) \left(V - b \frac{m}{\mu}\right) = \frac{m}{\mu} RT, \quad (2.57)$$

де величини  $a$  й  $b$  – сталі для кожного газу величини, що визначаються дослідним шляхом.

Відповідно до рівняння (2.57) можна побудувати ізотерми. Оскільки рівняння Ван дер Ваальса є рівнянням третього степеня щодо об'єму  $V$ , то воно дає одне або три значення  $V$  залежно від  $p$  і  $T$ .

Графічно теоретичні ізотерми Ван дер Ваальса представлені на рис. 2.30, де залежність  $p$  від  $V$  відображено для різних температур.

З рис. 2.30 видно, що будь-якому значенню  $p_1$  відповідають три значення  $V$ .

За високих температур ці ізотерми мають форму, близьку до гіперболи  $pV = \text{const}$  й описують газоподібний стан речовини (майже ідеальний газ).

Унаслідок зниження температури форма ізотерми змінюється, за деякої температури  $T_k$  вона проявляє точку перегину ( $\kappa$ ). За ще менших температур ізотерми набувають складної форми й можуть заходити навіть в ділянки негативного тиску (рис. 2.30).

Пояснення ізотерм Ван дер Ваальса дають експериментальні ізотерми, отримані Ендрюсом для вуглекислоти. У товстостінній посудині стискувався один моль  $\text{CO}_2$ , тиск вимірювався манометром, температура підтримувалася постійною. Отримані ізотерми представлені на рис. 2.31. На цих ізотермах замість горбів, характерних для теоретичних ізотерм Ван дер Ваальса, спостерігаються прямолінійні горизонтальні ділянки ( $aa'$ ,  $vv'$ ,  $cc'$  тощо), що поступово зменшуються відповідно до збільшення температури і на кривій ( $T_k = \text{const}$ ), що вироджуються в точку перегину кривої (точку  $\kappa$ ).

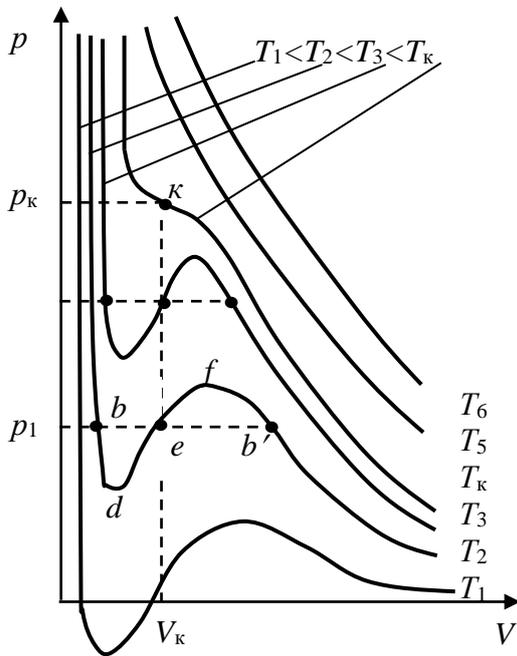


Рис. 2.30

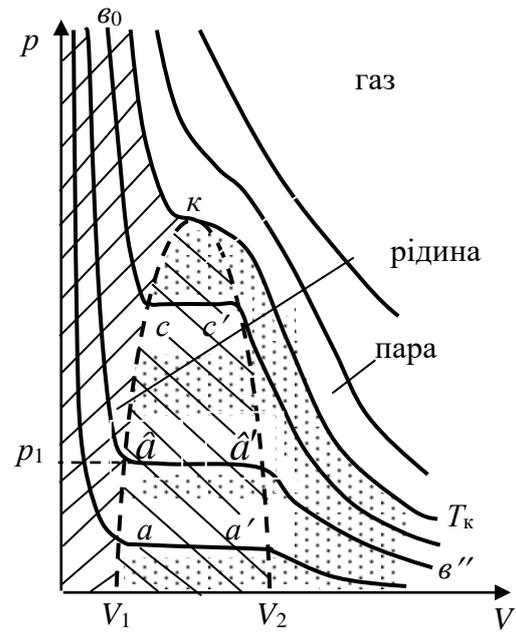


Рис. 2.31

Що ж відбувається з газом? За малих значень тиску, що відповідають ділянкам  $v''v'$ , газ стискується аналогічно ідеальному, виявляючи, щоправда, трохи більшу стисливість. Але коли тиск газу сягає значення  $p_1$  за об'єму  $V_2$ , надалі він залишається незмінним до об'єму  $V_1$ . На цій ділянці газ перетворюється в рідину. Конденсація газу триває доти, доки вся маса газу в посудині не перетвориться в рідину (точка  $v$ ). При подальшому зменшенні об'єму відбувається стиск рідини. Дуже крутий підйом ділянок  $vv_0$  свідчить про малу стисливість рідини.

Скорочення горизонтальних ділянок з підвищенням температури означає, що рідкий стан усе менше відрізняється від газоподібного й у точці перегину ( $k$ ) відмінність між цими станами речовини зникає. Таким чином, стан речовини, який характеризується точкою  $k$ , з однаковим правом можна назвати і газом, і рідиною. Тому такий стан називають критичним, а температуру, за якої він настає, – критичною температурою  $T_k$ .

Критична температура  $T_k$  на рисунку 2.31 характеризується точкою, котрій відповідає критичний об'єм  $V_k$  і критичний тиск  $p_k$ . Рівняння Ван дер Ваальса відносно об'єму є алгебраїчним рівнянням третього степеня. Рівняння (2.57) можна привести до вигляду:

$$V_{\mu}^3 - \left( \frac{RT}{p} + b \right) V_{\mu}^2 - \frac{a}{p} V_{\mu} + \frac{ab}{p} = 0.$$

За фіксованих значень тиску й температури воно має три корені відносно  $V$  ( $V_1, V_2, V_3$ ) або:

$$(V_\mu - V_1)(V_\mu - V_2)(V_\mu - V_3) = 0.$$

У критичному стані всі три корені збігаються:

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_K, \text{ тобто } (V_\mu - V_K)^3 = 0. \quad (2.58)$$

Розкриваючи рівняння (2.58) і порівнюючи коефіцієнти при  $V_\mu^3, V_\mu^2$ , і  $V_\mu$ , одержуємо для критичного стану ( $p = p_K, T = T_K$ ):

$$T_K = \frac{8a}{27bR}, \quad V_K = 3b, \quad p_K = P_K = \frac{a}{27b^2}. \quad (2.59)$$

Якщо на різних ізотермах з'єднати всі точки, коли починається процес кипіння, і точки, за яких починається процес конденсації, отримаємо деяку ділянку, окреслену пунктиром на рис. 2.31. Ця пунктирна куполоподібна лінія розділяє  $p$ - $V$  – діаграму на три ділянки.

1. Права частина від окресленої ділянки відповідає газу – тут речовина перебуває лише в газоподібному стані.

2. Ліворуч – рідкий стан.

3. У середині окресленої ділянки – гетерогенна система і рідина + пара. Вище від ізотерми, яка відповідає температурі  $T_K$ , – газоподібний стан.

За температур, вищих від критичної, немає прямолінійних горизонтальних відрізків на ізотермах. Отже, за цих температур, ні за якого тиску зріджувати газ не можна. З цього випливає умова зрідження газів: для перетворення газу в рідину треба стискати газ за температури нижчої від критичної.

Порівняння ізотерм Ван дер Ваальса з дослідними ізотермами демонструє, що ізотерми Ван дер Ваальса, на відміну від ізотерм ідеального газу, охоплюють не тільки ділянку газоподібного стану речовини, й ділянки двофазного й рідкого станів. При цьому в ділянці малих тисків і великих об'ємів спостерігається збіг ізотерм, що є очікуваним, оскільки за цих умов газ можна вважати ідеальним. Рідкому стану відповідають ліві ділянки ізотерм, що стрімко піднімаються угору. Однак у цій ділянці є лише якісна узгодженість з результатами експериментів.

Хвилеподібні ділянки (*wdefe'*) ізотерм Ван дер Ваальса (рис. 2.30) речовини, що стосуються двофазного стану, сильно відрізняються від

відповідних горизонтальних ділянок експериментальних ізотерм (пунктирні прямі  $ve'$ ). Однак досліди свідчать, що деякі стани, що відповідають ділянкам  $vdefv'$  ізотерм Ван дер Ваальса, практично можна отримати. Наприклад, можна затримати кипіння рідини, з якої ретельно вилучено домішки, нагріваючи її в посудині із гладкими стінками. При цьому одержують перегріту рідину, різним станам якої відповідають точки кривої  $vd$ .

Аналогічно за повільного ізотермічного стиску газу, що не містить порошин, іонів та інших центрів конденсації, можна одержати пересичену пару, що відповідає ділянці ізотерми  $v'f$ . У разі потрапляння в пересичену пару порошин або іонів відбувається її швидка конденсація. Це явище використовують у камері Вільсона для спостереження за траєкторією руху заряджених часток.

Стани перегрітої рідини і пересиченої пари називаються метастабільними станами. Ділянку ізотерми  $def$  експериментальним шляхом отримати неможливо.

### 2.5.3. Водяна пара в атмосфері. Вологість

Повітря, що містить водяні пари, які під дією сонячної енергії випаровуються з поверхонь океанів, морів й інших водойм, називається вологим.

Тиск повітря, яке містить водяну пару, складається з тиску сухого повітря  $p_{сп}$ , тиску пар води  $p_{п}$ , тобто атмосферний тиск дорівнює:

$$P_a = P_{сп} + P_{п}$$

Про вологість повітря можна судити за величиною тиску водяної пари або за його густиною  $\rho_n$ . Кількість водяної пари (у грамах), що міститься в  $1 \text{ м}^3$  повітря, називається абсолютною вологістю. Відношення густини  $\rho_n$  водяної пари за певної температури до густини насиченої пари  $\rho_{нп}$  за тієї ж температури називається відносною вологістю. Відносна вологість повітря виражається у відсотках:

$$\varphi = \frac{P_{п}}{P_{нп}} \cdot 100\%$$

або, з огляду на зв'язок між густиною та тиском, у вигляді:

$$\frac{P_{п}}{P_{нп}} = \frac{\rho_{п}}{\rho_{нп}}$$

Отже, відносну вологість можна представити формулою:

$$\varphi = \frac{P_{\text{п}}}{P_{\text{нп}}} \cdot 100\%.$$

Нагадаємо, що насиченою називається пара, що перебуває в динамічній рівновазі зі своєю рідиною. У цьому стані густина пари над рідиною й тиск, який чиниться парою на стінки посудини (пружність пари), мають максимальне значення для даної рідини за певної температури. Пара, тиск і густина якої є меншою за тиск й густину насиченої пари за певної температури, називається ненасиченою.

Очевидно, що за ізотермічного збільшення об'єму, який займає насичена пара, або за ізохорного нагрівання насичена пара переходить у ненасичену. І навпаки, за ізотермічного стискання або ізохорного охолодження ненасичена пара стає насиченою. Тому за зниження температури повітря та постійного вмісту водяної пари відносна вологість зростає, тобто чим нижча температура повітря, тим водяна пара ближча до стану насичення. Нарешті, за певної температури відносна вологість дорівнює 100 % і подальше зниження температури призводить до конденсації водяної пари.

Температура, за якої пара стає насиченою внаслідок ізохорного охолодження, називається *точкою роси*. За температури, нижчої від точки роси, з'являється туман, «запітнівають» вікна, на траві осідають крапельки роси.

Зазначимо, що для конденсації пари недостатньо дослідження температури. Якщо в повітрі мало центрів конденсації, то водяна пара в повітрі залишається у перенасиченому метастабільному стані. Як вже зазначалось, центрами конденсації можуть бути дрібні порошини різних речовин, навколо яких утворюється водяна плівка, тому над містом часто бувають тумани: у міському повітрі багато пилу.

#### **2.5.4. Особливості будови і теплового руху у твердих тілах і рідинах**

Простота теплових властивостей ідеального газу, яка дає змогу побудувати загальне для всіх газів рівняння стану, пов'язана з малою роллю міжмолекулярної взаємодії. В рідинах та газах міжмолекулярна взаємодія відіграє основну роль.

##### ***Тверді тіла***

Більшість речовин – як природного, так і штучного походження – за звичайних умов перебуває у твердому стані. Із відомих нині хімічних сполук близько 95% є твердими речовинами, які мають важливе значення, оскільки становлять основу конструкційних матеріалів, які використовуються у будівництві.

Залежно від розміщення атомів чи молекул у просторі тверде тіло перебуває в *кристалічному* або *аморфному стані*.

Кристалічний стан – це впорядкована періодична структура, яка характеризується наявністю дальнього порядку розміщення частинок твердої речовини. Дальнім порядком називається впорядкованість, яка не змінюється і періодично повторюється. Інакше кажучи, далекий порядок – це тривимірна періодичність розміщення частинок.

У кристалічних речовинах атоми, іони або молекули можуть розміщуватися тільки в певних точках простору, які називаються *вузлами кристалічних ґраток*. В *аморфних речовинах про періодичність структури не йдеться*. Проте їм притаманне відносна впорядкованість будови, яка проявляється в закономірному розміщенні навколо кожної частинки її найближчих «сусідів», тобто для аморфних речовин можливим є тільки ближній порядок. Цим вони подібні до рідин, отже, їх з деяким наближенням можна розглядати як переохолоджену рідину з дуже високою в'язкістю.

Характерною відмінністю кристалічних речовин від аморфних є *анізотропія* – залежність їхніх фізичних властивостей від напрямку в кристалі.

Зокрема, більшість фізичних властивостей кристалів (електро- і теплопровідність, міцність, оптичні характеристики) у різних напрямках неоднакові, що зумовлене внутрішньою будовою кристалів. Уздовж різних напрямків відстань між частинками в кристалі різна, тому й кількісна характеристика тієї чи іншої властивості для цих напрямків є різною.

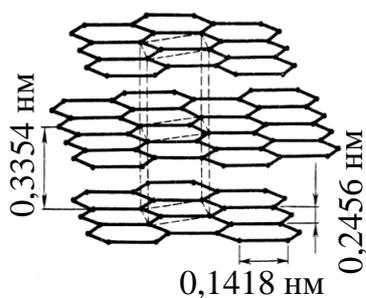


Рис. 2.32

Особливо яскраво анізотропія проявляється в монокристалах. Типовим прикладом анізотропної кристалічної речовини є графіт (рис. 2.32), структура якого являє собою паралельні шари з різними енергіями зв'язку усередині шарів і між окремими шарами. Завдяки цьому

теплопровідність уздовж шару є в п'ять разів вищою, ніж у перпендикулярному напрямку, а електропровідність близька до електропровідності металів і в сотні разів більша, ніж у перпендикулярному напрямку.

Іноді та сама речовина може утворювати кристали різної форми. Це – явище *поліморфізму*, а різні кристалічні форми однієї речовини називаються *поліморфними модифікаціями*, наприклад, алмаз і графіт – хімічно одна й та сама речовина, яка має різні поліморфні модифікації.

*Аморфні тверді речовини* є ізотропними, *тобто їхні властивості в будь-якому напрямку однакові*. Перехід кристалічної речовини з твердого стану в рідкий відбувається за певної, фіксованої для даної речовини температури й супроводжується стрибкоподібною зміною його властивостей (густини, в'язкості тощо), тоді як аморфні речовини переходять у рідкий стан поступово, протягом деякого інтервалу температур (так званий інтервал розм'якшення) і характеризуються плавною зміною властивостей.

Аморфний стан речовин є менш стабільним порівняно з кристалічним, тому аморфні речовини можуть мимовільно переходити в кристалічні. Для деяких речовин аморфний стан найбільш характерний практично за будь-яких умов. Наприклад, переважно в аморфному стані перебувають скло, смоли, віск, більшість гідроксидів перехідних металів тощо. За певних умов в аморфному стані можуть перебувати майже всі речовини, за винятком металів і деяких іонних сполук. А за звичайних умов переважна більшість твердих речовин перебуває в кристалічному стані.

Індивідуальна зовнішня форма кристала кожної речовини зумовлена його внутрішньою будовою, тобто кристалічною ґраткою.

*Кристалічна ґратка* – це сукупність кристалічних вузлів (атомів, іонів і молекул речовини), які під час формування кристала розміщуються в просторі в певній послідовності паралельно одні одним.

Основою кристалічної ґратки слугує елементарна комірка. *Елементарна комірка* – це найменша структурна одиниця кристалічної решітки, яка проявляє всі властивості її симетрії і являє собою паралелепіпед із властивими для цього типу кристала гранями  $a$ ,  $b$ ,  $c$  і кутами між ними  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (рис. 2.33, б).

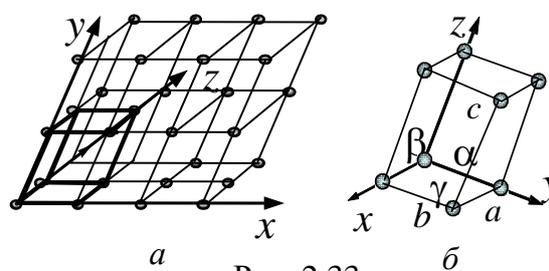


Рис. 2.33

Унаслідок багаторазового повторення елементарних комірок за всіма трьома напрямками кристалічних осей можна утворити кристалічну ґратку, що являє собою *монокристал* ідеальної форми. Але в природі частіше трапляються *полікристали*, що мають регулярні структури тільки в певних ділянках, при переході через які орієнтація регулярності різко змінюється. Полікристали складаються з безлічі дрібних монокристалів (зерен), орієнтованих вздовж різних осей координат, тому в полікристалах анізотропія не проявляється. Більшість кристалічних речовин, які використовують в будівництві, природних або штучних, перебувають саме в полікристалічному стані.

Залежно від співвідношення довжини ребер  $a$ ,  $b$ ,  $c$  і кутів  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  між окремими гранями елементарної комірки розрізняють сім систем, або *сингоній*, кристалів (табл. 2.4). Однак елементарна комірка може містити й додаткові вузли, розташовані всередині або на її гранях – такі ґратки називаються *об'ємноцентрованими* та *гранецентрованими*. У зв'язку із цим кількість типів кристалічних ґраток збільшується до 14, вони називаються ґратками Браве.

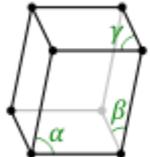
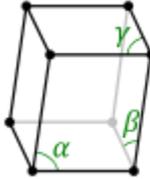
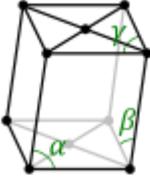
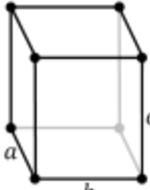
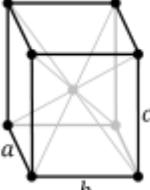
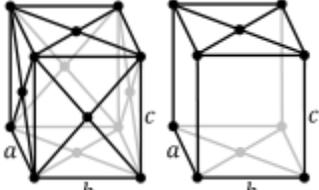
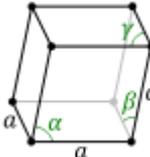
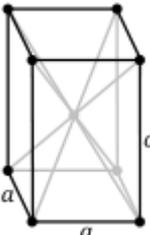
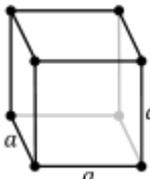
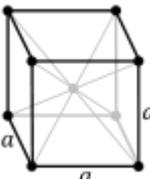
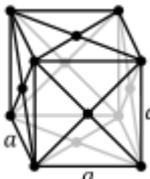
Залежно від природи частинок, розміщених у вузлах кристалічної ґратки, і характеру діючих між ними сил розрізняють чотири основні типи кристалічних ґраток.

1. *Іонні ґратки*, у вузлах яких розміщуються різнойменно заряджені іони, пов'язані силами електростатичного притягання.

Речовини з іонними кристалічними ґратками мають порівняно високу твердість, тугоплавкість і нелетючість. У твердому стані вони не проводять електричного струму, але в розчинах і розплавах стають електропровідними в результаті електролітичної дисоціації. Іонні кристали мають підвищену крихкість: навіть невеликий зсув у кристалічній ґратці призводить до зближення однойменно заряджених

іонів, відштовхування між якими спричинює розрив іонного зв'язку й, як наслідок, руйнування кристала.

Таблиця 2.4

Сингонії	Ґратки Браве		
	примітивна	об'ємноцентрована	гранецентрована
триклинна $a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$			
моноклинна $a \neq b \neq c, \beta \neq 90^\circ$ $\alpha = \beta = 90^\circ$			
ромбічна $a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$			
гексагональна $a = b \neq c, \gamma = 120^\circ$ $\alpha = \beta = 90^\circ$			
тригональна $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$			
тетрагональна $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$			
кубічна $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$			

Прикладом іонного кристала є кам'яна сіль  $\text{NaCl}$ . До іонних кристалів належать також численні оксиди.

2. *Атомні ґратки* містять у вузлах кристалічної ґратки атоми, між якими є ковалентні зв'язки. Структура атомних ґраток може бути каркасною (алмаз), шаруватою (графіт) або ланцюговою (деякі полімери, силікатні матеріали). Речовин з атомними ґратками порівняно небагато. Їм притаманна висока міцність, твердість, тугоплавкість і цілковита нерозчинність. Такі властивості зумовлені міцністю ковалентного зв'язку.

3. *Металеві ґратки* містять у вузлах атоми металів, між якими вільно переміщуються узагальнені для всіх атомів електрони («електронний газ»), що утворюють металевий зв'язок. Для металів можливі три види кристалічних ґраток: кубічна гранецентрована, кубічна об'ємноцентрована і гексагональна.

Особливості будови металевих ґраток зумовлюють властивості металів: високі температури плавлення, електро- і теплопровідність, ковкість, пластичність.

4. *Молекулярні ґратки* містять у вузлах молекули, пов'язані слабкими силами міжмолекулярної взаємодії (Ван дер Ваальсовими) або водневими зв'язками. Молекулярні ґратки характерні для твердих галогенів, води (лід), інертних газів і багатьох органічних сполук. Оскільки сили міжмолекулярної взаємодії значно слабкіші, ніж сили ковалентного, металевого або іонного зв'язків, молекулярним кристалам властиві невисока твердість, легкоплавкість і летючість.

Кристалічний стан речовини, який характеризується строго закономірним розміщенням частинок у вузлах кристалічної ґратки з регулярним повторюванням й мінімальною енергією *системи*, називається *ідеальним кристалом*.

Однак у реальних кристалах є цілий ряд відхилень від ідеальної структури – *дефектів кристалічної ґратки*. Дефекти кристалічної ґратки можуть виникати в процесі росту кристала внаслідок нерівноважних умов і наявності домішок, а також під впливом температури, механічних навантажень, електричних і магнітних полів або іонізуючого випромінювання.

Залежно від походження трапляються такі дефекти кристалічних ґраток:

- *мікродофекти* – порушення в періодичності розміщення часток у вузлах кристалічної ґратки;

- *макродофекти* – тріщини, пори, чужорідні домішки, які виникають у процесі росту кристала.

*Мікродофекти* можуть бути точковими, лінійними, поверхневими й об'ємними.

*Точкові дофекти* проявляються по-різному:

- вакансії (рис. 2.34, а);
- проникнення (рис. 2.34, б);
- заміщення (рис. 2.34, в).

*Лінійні дофекти, або дислокації,* можуть бути декількох різновидів:

- крайова дислокація – обрив площини, у якій розміщені атоми, іони або центри мас молекул у вузлах кристалічної ґратки (рис. 2.35, а);

- гвинтова дислокація – частковий розрив такої площини із замиканням країв, що утворювалися, на паралельно розміщені площини (рис. 2.35, б);

- ланцюгова дислокація – послідовно розміщені точкові дофекти.

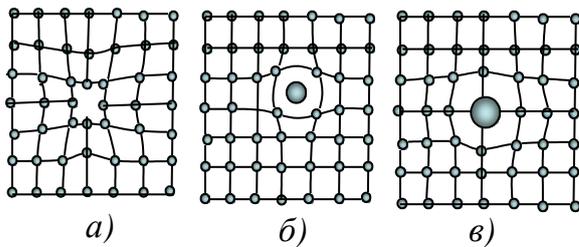


Рис. 2.34

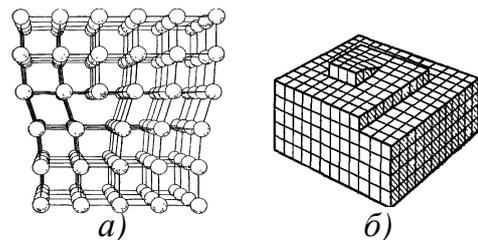


Рис. 2.35

Дислокації можуть переміщуватися по кристалу, накопичуватися на ділянках найбільшої напруги, а також виходити на поверхню кристала й порушувати його зовнішній шар.

*Поверхневі дофекти* виникають: 1) між двома кристалічними поверхнями, поверненими й зміщеними одна щодо одної на кілька градусів; 2) за неправильного упакування частинок у шарі; 3) на межі вкраплення іншої фази у вигляді мережі дислокацій.

*Об'ємні дофекти* утворюються завдяки: 1) накопиченню порожнеч, пор, каналів, вакансій усередині кристала; 2) присутності частинок, що потрапили до кристала в процесі його утворення

(розчинник, пухирці газу); 3) існуванню зародків нової фази, що виникають за рівноважних умов існування кристала.

Дефекти всіх типів впливають на властивості кристалів, зокрема на міцність, пластичність, електричну провідність тощо. Регулювання виду й кількості дефектів дає змогу змінювати хімічні й фізичні властивості речовин у потрібному напрямку й одержувати нові типи матеріалів із заданими характеристиками.

### *Рідини*

У процесі дослідження явища розсіювання рентгенівських променів, нейтронів й електронів з'ясовано, що рідина має своєрідну молекулярну структуру: найближчі «сусіди» кожної молекули рідини розміщуються в певному порядку так, що кількість найближчих «сусідів» і їхніх взаємне розміщення для всіх молекул приблизно однакові, тобто в рідині панує так званий близький порядок. Таким чином, близький порядок полягає в упорядкованому розміщенні поблизу довільно обраної молекули деякої кількості її найближчих «сусідів».

Багато особливостей поведінки рідини зумовлені досить складним характером теплового руху її молекул. Для рідини характерні різні типи руху: поступальні переміщення молекул, обертання молекул, коливання молекул у полі сусідніх молекул, коливання атомів усередині окремих молекул. Складність полягає в тому, що всі ці типи рухів не можна розглядати окремо, оскільки є сильний взаємний вплив рухів.

Спроби поєднати зазначені види рухів здійснюються за допомогою різних моделей. До них, зокрема, належить «модель дифузії стрибком», коли теплові коливання молекули рідини відбуваються поблизу положення рівноваги із середньою частотою  $1/\tau_0$ , близькою до частот коливання атомів у кристалах, й амплітудою, зумовленою вільним об'ємом, який надається молекулі її «сусідами». За час, який більший за період коливань, положення рівноваги може зміщуватись на відстань порядку  $10^{-10}$  м. У звичному нам масштабі часу за одну секунду молекула в рідині може змінювати своє положення мільярди разів.

Переміщення молекули з одного рівноважного положення в інше відбувається не безперервно, а у вигляді активованих стрибків з подоланням потенціального бар'єра висотою  $W$  (енергія активації). Цю енергію молекула може одержати в процесі взаємодії з іншими молекулами. Установлено, що за підвищення температури тривалість середнього (за сукупністю великої кількості молекул) часу

«осілого життя» молекули швидко зменшується відповідно до експоненціального закону:

$$\langle \tau \rangle \sim e^{\frac{W}{kT}},$$

де  $k$  – стала Больцмана.

Час  $\langle \tau \rangle$  є характерним часом, пов'язаним з переміщенням частинок рідини в середньому на відстань  $\langle \delta \rangle$ , яка за порядком величини дорівнює середній відстані між молекулами. Експериментально встановлено, що:

$$\langle \delta \rangle \sim \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}},$$

де  $\mu$  – молярна маса рідини,  $\rho$  – її густина,  $N_A$  – число Авогадро. Для води, наприклад,  $\langle \delta \rangle \approx 3 \cdot 10^{-10}$  м.

### ***Теплофізичні характеристики твердих тіл та рідин***

Теплофізичні характеристики твердих тіл та рідин визначають технологічні та експлуатаційні властивості будівельних матеріалів. Відомості про значення цих характеристик та використання їх у розрахунках будівельних конструкцій, систем теплоізоляції тощо дають можливість досягти бажаних результатів, зокрема міцності конструкцій, значно заощадити будівельні матеріали тощо.

Оскільки, як вже зазначалось, універсального рівняння стану рідин та твердих тіл немає, то значення теплофізичних характеристик можна отримати лише дослідним шляхом.

### ***Коефіцієнт стискуваності***

Для характеристики стискуваності речовини застосовують коефіцієнт стискуваності.

Коефіцієнт стискуваності характеризує процес ізотермічної зміни об'єму речовини під дією тиску і визначається за формулою:

$$\chi = -\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dp} \right)_T.$$

Коефіцієнт стискуваності в СІ вимірюється в  $\text{Па}^{-1}$ .

Дослідним шляхом встановлено, що коефіцієнт стисливості рідин у сотні тисяч разів менший, ніж для газів, і для більшості рідин визначається у межах  $10^{-9} \div 10^{-10}$   $\text{Па}^{-1}$ . Серед рідин найбільшу

стисливість має рідкий гелій, у якого за тиску в кілька атмосфер стисливість дорівнює  $8 \cdot 10^{-3} \text{ Па}^{-1}$ . Для води  $\chi = 4,53 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ , для ртуті –  $3,96 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$ .

Коефіцієнт стисливості рідин залежить від тиску: чим більший тиск, тим менший коефіцієнт, і навпаки. Це зрозуміло, оскільки внаслідок стиснення зменшується відстань між її частинками та збільшуються сили відштовхування між ними, що й ускладнює подальше зближення частинок. Слід зазначити, що за високого тиску коефіцієнти стисливості різних рідин практично однакові, незважаючи на те, що за звичайного тиску показники можуть значно відрізнятися.

Коефіцієнт стисливості ізотропних твердих тіл в десятки разів менший, ніж для рідин, для більшості з них він вимірюється у межах  $10^{-10} \div 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$ . Стискуваність монокристалічних речовин залежить від напрямку стискування: стискуваність вздовж напрямків, які характеризуються слабкою міжатомною взаємодією, може значно перевищувати стискуваність на напрямках, вздовж яких в кристалічній ґратці відбувається сильна взаємодія.

### ***Коефіцієнт термічного розширення***

Іншою величиною, яка застосовується для характеристики теплофізичних властивостей твердих тіл та рідин, є коефіцієнт об'ємного теплового розширення

$$\alpha = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p,$$

який відображає відносну зміну об'єму за зміни температури на 1 К за постійного тиску.

У СІ коефіцієнт теплового розширення вимірюється у  $\text{К}^{-1}$ .

Ця величина враховується в процесі конструювання температурних швів, накладанні захисних покриттів, підборі складу композиційних матеріалів тощо.

Механізм теплового розширення тіл можна представити таким чином. Якщо до тіла підвести певну кількість теплоти, то завдяки коливанию атомів відбуватиметься процес поглинання ним енергії. При цьому коливання атомів стають більш інтенсивними, тобто збільшуються їхня амплітуда та частота. Зі збільшенням відстані між атомами збільшується й потенціальна енергія, яка характеризується міжатомним потенціалом. Останній виражається сумою потенціалів сил

відштовхування й притягання (рис. 2.28). Сили відштовхування між атомами внаслідок зміни міжатомної відстані змінюються швидше, ніж сили притягання; у результаті форма кривої мінімуму енергії є несиметричною, рівноважна міжатомна відстань збільшується. Це явище притаманне тепловому розширенню.

Коефіцієнти розширення твердих тіл є досить незначними, вони становлять  $10^{-5} \div 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ . Теплове розширення твердих тіл може викликати дуже велике напруження, тому в техніці, будівництві необхідно брати до уваги ймовірні наслідки теплового розширення. Наприклад, така речовина, як інвар, коефіцієнт лінійного розширення якої дорівнює  $\alpha = 3 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , широко застосовується в точному приладобудуванні, де потрібно уникнути зміни розмірів деталі за коливань температури.

Для різних рідин значення  $\alpha$  за однакових температур і тиску можуть змінюватися досить відчутно. Так, за  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  для води  $\alpha = 15 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , для бензолу –  $124 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , для рідкої вуглекислоти –  $1050 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , для гліцерину –  $53 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$  тощо.

Коефіцієнт об'ємного теплового розширення тіл повинен зменшуватися за підвищення тиску й зростати з підвищенням температури. Експериментальні дані переконливо підтверджують справедливість цього твердження. Дійсно, за підвищення температури  $\alpha$  значно зростає. Зокрема, для рідкої вуглекислоти в разі підвищення температури від  $0$  до  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  коефіцієнт теплового розширення зростає вдвічі.

Об'єм більшості рідин за підвищення температури збільшується, при цьому зменшується їхня густина. Вода вирізняється відомою аномалією, яка полягає в тому, що в межах від  $0$  до  $4 \text{ }^\circ\text{C}$  підвищення температури призводить не до збільшення об'єму, а до його зменшення, так що за  $4 \text{ }^\circ\text{C}$  вода має максимальну густину. Ця аномалія пояснюється тим, що молекули води частково асоціюють, тобто збираються в групи з декількох молекул, утворюючи своєрідні більші молекули. Вода складається із трьох типів молекул, відповідно до формул  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $(\text{H}_2\text{O})_2$  і  $(\text{H}_2\text{O})_3$ , питомий об'єм яких є різним. За різних температур співвідношення концентрацій цих груп молекул теж є різним. Цим і пояснюється, що за певної температури ( $4 \text{ }^\circ\text{C}$ ) питомий об'єм води має мінімальне значення.

### *Теплоємність*

Теплоємність твердих тіл, як свідчать результати дослідів, зростає унаслідок підвищення температури.

Теплоємність твердих тіл пов'язана з енергією атомів, які здійснюють малі коливання навколо своїх положень рівноваги, ці коливання описуються законами квантової фізики. У разі підвищення температури теплоємність наближається до певної межі, коли коливання атомів можна розглядати з погляду класичної механіки. Оскільки повна енергія, яка припадає на один ступінь вільності атома, дорівнює  $kT$ , а коливання атомів у твердому тілі можуть бути напрямлені вздовж трьох осей, то на три ступеня вільності припадає енергія:

$$W = 3kT.$$

Внутрішня енергія одного моля речовини твердого тіла:

$$U = N_A \cdot W = N_A \cdot 3kT = 3RT,$$

де  $N_A$  – число Авогадро; а  $N_A \cdot k = R$ .

Тоді молярна (атомна) теплоємність твердих тіл приблизно дорівнює:

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{d(3RT)}{dT} = 3R \approx 25 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}).$$

Остання формула виражає закон Дюлонга та Пті.

Як впливає із законів термодинаміки, різниця теплоємностей за постійного тиску та постійного об'єму визначається за формулою:

$$C_p - C_V = \frac{T\alpha^2}{\rho\chi}, \quad (2.59)$$

де  $T$  – температура тіла,  $\alpha$  – коефіцієнт термічного розширення,  $\rho$  – густина тіла,  $\chi$  – коефіцієнт стискуваності.

Оскільки у твердих тіл коефіцієнт термічного розширення дуже малий, то з формули (2.59) впливає, що  $C_p \approx C_V$ .

Експериментально доведено, що теплоємність рідин також залежить від температури, причому ця залежність у різних рідин різна. Теплоємність одних рідин (і таких більшість) через підвищення температури збільшується, а інших, навпаки, знижується. У деяких рідин теплоємність унаслідок підвищення температури спочатку спадає, а потім, пройшовши через мінімум, починає зростати. Саме такі зміни теплоємності спостерігаються у води.

Однак в результаті зниження температури теплоємність усіх речовин наближається до нуля, цей факт є наслідком третього начала термодинаміки.

## **2.6. ПОВЕРХНЕВІ ЯВИЩА**

Усі теплофізичні властивості речовин, які ми розглянули, мають об'ємний характер, тобто в них бере участь вся маса тіла. Однак більшість тіл, які використовують у будівельній справі, являють собою гетерогенні системи, наприклад, в'язучі речовини зазвичай є розчинами, що складаються з багатьох фаз, які межують одна з одною. Наявність у фаз поверхонь розділу зумовлює наявність категорії явищ, які називаються поверхневими.

### **2.6.1. Поверхневий натяг**

Поверхня рідини, яка межує з іншим середовищем, перебуває в особливих умовах порівняно з рештою маси рідини. Сили, які діють на кожен молекулу поверхневого шару рідини, що межує зі своєю парою, спрямовані в бік об'єму рідини, тобто всередину рідини. Внаслідок цього для переміщення молекули із глибини рідини на поверхню має бути виконана робота. Якщо за постійної температури збільшити площу поверхні на нескінченно малу величину  $dS$ , то потрібна для цього робота дорівнюватиме  $dA' = \sigma dS$ . Робота для збільшення площі поверхні виконується проти сил поверхневого натягу, які намагаються скоротити поверхню. Тому робота самих сил поверхневого натягу для збільшення площі поверхні рідини дорівнюватиме:

$$dA = -\sigma dS.$$

Коефіцієнт пропорційності  $\sigma$  називається **коефіцієнтом поверхневого натягу** і визначається величиною роботи сил поверхневого натягу за зміни площі поверхні на одиницю. В СІ коефіцієнт поверхневого натягу вимірюється в Дж/м<sup>2</sup>.

Молекули поверхневого шару рідини мають надлишкову потенціальну енергію порівняно з молекулами в глибині рідини. Ця енергія прямо пропорційна площі поверхні рідини:

$$U = \sigma S \tag{2.60}$$

Приріст потенціальної енергії поверхневого шару пов'язаний тільки з приростом площі поверхні:  $dU = \sigma dS$ . Сили поверхневого натягу – консервативні сили, тому справедливою є рівність:  $dA = -dU$ . Сили поверхневого натягу намагаються зменшити потенціальну енергію поверхні рідини. В термодинаміці енергію, яка може бути перетворена в роботу, називають вільною енергією  $U_S$ . Отже,  $dA = -dU_S$ . Відповідно до поняття вільної енергії формула (2.90) матиме вигляд:  $U_S = \sigma S$ . Використовуючи останню рівність, можна визначити *коефіцієнт поверхневого натягу* як фізичну величину, яка чисельно дорівнює вільній енергії одиниці площі поверхні рідини.

Дію сил поверхневого натягу можна спостерігати за допомогою досліду над тонкою плівкою рідини (наприклад, мильного розчину), яка огортає дротяний прямокутний каркас, у якого одна сторона може переміщуватись (рис. 2.36). Припустимо, що на рухому сторону завдовжки  $l$  діє зовнішня сила  $F$ , переміщуючи її рівномірно на нескінченно малу відстань  $dh$ . Елементарна робота цієї сили дорівнюватиме  $dA = Fdh$ . Оскільки плівка має дві поверхні, вздовж них

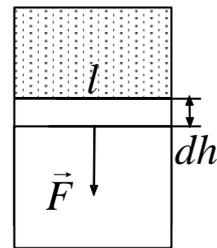


Рис. 2.36

діють сили поверхневого натягу  $F_H$ , векторна сума яких дорівнює зовнішній силі. Модуль зовнішньої сили дорівнює подвоєному модулю однієї з сил поверхневого натягу:  $F = 2F_H$ . Робота, яка виконується зовнішньою силою, дорівнює за величиною сумі робіт сил поверхневого натягу:  $dA = dA_H + dA_H = 2dA_H$ . Величина роботи сили поверхневого натягу буде визначатись таким чином:  $dA = Fdh = \sigma dS$ , де  $dS = l \cdot dh$ .

Отже,

$$\sigma = \frac{F}{l}.$$

Тобто *коефіцієнт поверхневого натягу*  $\sigma$  може бути визначений як величина, що дорівнює силі поверхневого натягу, яка діє вздовж дотичної до поверхні рідини і яка припадає на одиницю довжини лінії розділу.

Сили поверхневого натягу намагаються скоротити площу поверхні рідини. Це помітно в малих об'ємах рідини, коли вона набуває форми кульок. Як відомо, саме сферична поверхня має найменшу площу за певного об'єму.

Коефіцієнт поверхневого натягу залежить від температури, а саме внаслідок нагрівання коефіцієнт поверхневого натягу зменшується. Наприклад, для води за 100 °С він наближується до нуля.

### 2.6.2. Явище змочування. Крайовий кут

Розглянемо поведінку краплини рідини 2, яка межує з одного боку з газом 3, з другого боку – з твердим тілом 1 (рис. 2.37). До лінії дотику всіх трьох середовищ прикладені три сили поверхневого натягу, кожна з яких спрямована по дотичній до поверхні дотику відповідних середовищ. За величиною ці сили (віднесені до одиниці довжини лінії дотику) дорівнюють відповідним коефіцієнтам поверхневого натягу  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$ . Кут між поверхнею рідини і твердим тілом  $\theta$  називається *крайовим кутом*.

Поверхня рідини, яка називається *меніском*, встановлюється так, щоб рівнодійна всіх трьох сил натягу дорівнювала нулю. Таким чином,

$$\sigma_{13} = \sigma_{12} + \sigma_{23} \cos \theta \quad \text{або} \quad \cos \theta = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}}.$$

Якщо  $\sigma_{12} < \sigma_{13}$ , тобто якщо поверхневий натяг на межі твердого тіла з газом є більшим, ніж на межі з рідиною,  $\cos \theta > 0$  і кут  $\theta$  гострий,

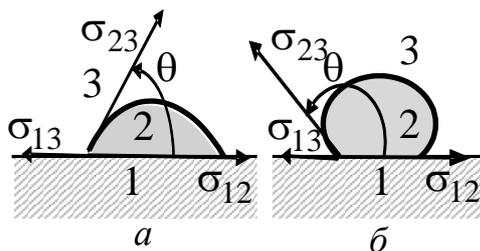


Рис. 2.37

то рідина *змочує* тверде тіло (рис. 2.37, а). Краплина рідини, поміщена на поверхню, дещо розтікається по ній. Та якщо  $\sigma_{12} > \sigma_{13}$ , то  $\cos \theta < 0$  і кут  $\theta$  тупий. У цьому випадку рідина *не змочує* твердого тіла (рис. 2.37, б).

Явище змочування широко застосовується у виробництві, наприклад, у *флотації* (спливання) – методі збагачення порід, тобто відокремленні гірських порід від пустої породи та домішок. Він полягає в тому, що руду подрібнюють, отриманий порошок змішують із спеціально підібраною маслянистою рідиною та збовтують до утворення пінистої суміші. *Гідрофільні* (змочувані) частинки кам'яних порід (кварц, силікати) змочуються водою й осідають на дно посудини. Частинки цінних порід, які містять метал, краще змочуються маслом, ніж водою. Масляна плівка сприяє їхньому налипанню на пухирцях повітря, з якими ці частинки спливають на поверхню.

### 2.6.3. Тиск Лапласа. Капілярні явища

Якщо рідина має криву поверхню, то під цією поверхнею внаслідок дії сил поверхневого натягу виникає додатковий тиск, величина якого визначається за формулою *Лапласа* (рис. 2.38):

$$p_{\text{л}} = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.61)$$

де  $R_1$  і  $R_2$  – радіуси кривини поверхні у двох взаємно перпендикулярних перерізах поверхні рідини.

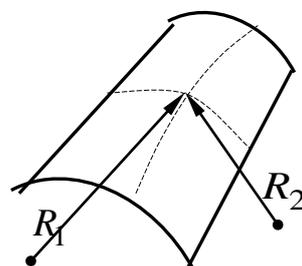


Рис. 2.38

У формулі *Лапласа* радіус кривини  $R_1$  і  $R_2$  вважається додатним, якщо центр кривини відповідного перерізу лежить всередині рідини. Тому меніск є випуклим, додатковий лапласівський тиск – додатним  $p_{\text{л}} > 0$  та спрямованим всередину рідини. Якщо ж центр кривини відповідного перерізу лежить поза рідиною, то меніск є ввігнутим, а додатковий тиск – від’ємним:  $p_{\text{л}} < 0$ . Причому очевидно, що чим менший радіус кривини, тим більшим є додатковий тиск над поверхнею рідини, що зумовлює так звані капілярні явища.

*Капілярні явища* полягають у тому, що в так званих *капілярах* – вузьких циліндричних трубках з діаметром, меншим за 1 мм, унаслідок додаткового лапласівського тиску істотно змінюється висота рівня рідини.

Поведінка рідини в таких трубках є цікавою тим, що коли рідина змочує трубку, меніск є ввігнутим, і унаслідок лапласівського тиску рідина піднімається на деяку висоту  $h$  (рис. 2.39), а в разі незмочування меніск є випуклим, і рідина, навпаки, опускається на деяку глибину  $h$ .

Умовою підняття стовпчика рідини у капілярі є рівність гідростатичного тиску та додаткового лапласівського:  $\rho g h = p_{\text{л}}$ .

Для циліндричного капіляра радіуси кривини поверхні дорівнюють ( $R_1 = R_2 = R$ ). Тоді формула Лапласа (2.61):

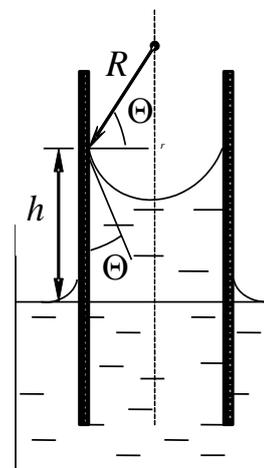


Рис. 2.39

$$p_{\text{л}} = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2\sigma}{R}.$$

На рис. 2.39 видно, що радіус капіляра дорівнює:

$$r = R \cos \theta,$$

де  $\theta$  – крайовий кут, тоді: 
$$p_{\text{л}} = \frac{2\sigma \cos \theta}{r} = \rho g h.$$

З цього можна визначити висоту підняття (опускання) рідини в капілярі:

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r}.$$

Як видно з формули, чим меншим є радіус капіляра, тим вище піднімається або нижче опускається рідина.

Капілярні явища відіграють значну роль у житті людини. Наприклад, обмін вологи у ґрунті і в рослинах відбувається завдяки підняттю води по капілярах. На капілярності ґрунтується вбирання вологи бетоном, що впливає на таку властивість будівельних матеріалів, як морозостійкість. Кровообіг у частинах живих організмів відбувається також завдяки капілярному просочуванню плазми у капілярах.

#### ***Уявлення про адсорбцію та поверхнево-активні речовини***

*Поверхнево-активні речовини* (ПАР) є речовинами, які інтенсивно адсорбуються на поверхнях розділу фаз, що супроводжується відповідним зменшенням поверхневого натягу.

*Адсорбція* є явищем захоплення поверхнею твердих тіл або рідин інших молекул завдяки молекулярним силам зчеплення, що приводить до зменшення поверхневого натягу у розчинах ПАР, зумовленого підвищенням їхньої концентрації в поверхневому шарі. Під час адсорбції на поверхні частинок або пор утворюються шари адсорбера завтовшки як одна (мономолекулярна адсорбція), дві або декілька (полімолекулярна адсорбція) молекул.

Розрізняють фізичну та хімічну адсорбцію (хемосорбцію). Фізична адсорбція зумовлена *Ван дер Ваальсовими* або електростатичними силами притягання частинок адсорбера до частинок поверхневого шару адсорбенту, залежить від природи адсорбера та адсорбенту, збільшується за підвищення тиску та зниження температури. За фізичної адсорбції адсорбовані частинки зберігають свої індивідуальні властивості, на відміну від хемосорбції.

*Адсорбцію використовують* для модифікації поверхні матеріалів, фарбування тканин, флотації, видалення деяких металів з розбавлених розчинів, стабілізації електричних властивостей напівпровідників тощо.

Поверхнево-активні речовини застосовують:

- для збільшення поверхневого натягу рідин завдяки тому, що молекули ПАР взаємодіють сильніше з молекулами рідини, ніж молекули рідини між собою; наприклад, для „висолювання” у миловарній промисловості – якщо посолити мильний розчин, то в поверхневий шар почнуть виштовхуватись молекули мила;
- як мийні засоби;
- як мастила, тому що наявність орієнтованих адсорбційних шарів мастил на поверхні твердого тіла призводить до зменшення тертя;
- нарешті, адсорбція ПАР на поверхні твердих тіл призводить до адсорбційного зниження їхньої міцності – ефекту *Ребіндера*, що використовується для інтенсифікації технологічних процесів: буріння гірських порід, обробки металів різанням, для подрібнення твердих тіл у звичайних умовах вібрацією та під впливом ультразвуку.

Нарешті, треба відзначити й *шкідливість адсорбції* – це негативний вплив робочих середовищ на експлуатаційні властивості конструкційних матеріалів – виникнення крихкості, корозійного стомлення, корозійного розтріскування тощо.

## **2.7. ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ, ЇХНІ ОСОБЛИВОСТІ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ**

У техніці, зокрема в будівництві, використовують матеріали найрізноманітнішого призначення. Багато з цих матеріалів під впливом зовнішніх умов (тиску, температури) можуть змінювати свій агрегатний стан. Однак зміною агрегатного стану не вичерпуються всі можливі перетворення речовин та матеріалів. Наприклад, за високого тиску кристалічні тіла здатні змінювати свою кристалічну структуру, не змінюючи при цьому агрегатного стану. Перетворення кристалічного тіла в аморфне і навпаки супроводжується суттєвою зміною фізичних властивостей, однак в цьому випадку зміни агрегатного стану також не відбувається. Наприклад, скло, яке є типовим аморфним матеріалом, протягом великого проміжку часу (роки й століття) кристалізується, що наочно проявляється в зміні його оптичних властивостей – воно стає мутним. Тому для характеристики станів речовини вводиться поняття фазового стану, яке є більш широким, ніж поняття агрегатного стану.

Зміна фазового стану речовини називається *фазовим переходом*.

Для прогнозування зміни фізичних властивостей речовин та матеріалів, що є основою їхньої експлуатації, важливо мати уявлення про фазові переходи, які відбуваються з ними в разі зміни зовнішніх умов. Інформація про фазові перетворення речовин також дає можливість контролювати та змінювати їхні властивості в потрібному напрямі.

Розрізняють фазові переходи першого та другого типу.

*Фазовий перехід першого типу* відбувається за певної сталої температури і тиску, коли стрибкоподібно змінюються такі термодинамічні величини, як ентропія, густина, внутрішня енергія системи, в зв'язку з чим перехід супроводжується поглинанням або виділенням деякої кількості теплоти (яка називається *теплотою фазового переходу*).

До фазових переходів першого типу належать *пароутворення та конденсація*, які є взаємооберненими процесами переходу рідини в газ і навпаки, *сублімація та аблімація*, що є взаємооберненими переходами кристалічного тіла в газ і навпаки, а також *плавлення і кристалізація* – взаємообернені переходи твердого тіла в рідину і навпаки.

*Фазовий перехід другого типу* відбувається без зміни густини та внутрішньої енергії, тому теплота за такого переходу не виділяється і не поглинається, натомість процес супроводжується стрибкоподібною зміною теплофізичних характеристик: теплоємності, коефіцієнта стискуваності, коефіцієнта термічного розширення.

До фазових переходів другого роду належать, наприклад, переходи між кристалічними модифікаціями, коли відбувається зміна симетрії кристалічної ґратки. *Термодинамічні параметри системи, за яких відбувається фазовий перехід, називаються точкою фазового переходу.*

### **2.7.1. Фазові діаграми**

Як уже зазначалося, перехід речовини з однієї фази в іншу за заданого тиску відбувається завжди за певної температури. Наприклад, якщо нагрівати лід за нормального атмосферного тиску, він почне плавитися за температури  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , і ця температура, незважаючи на підведення теплоти, буде залишатися незмінною доти, доки весь лід не перетвориться на воду. У процесі плавлення фази льоду і води існують одночасно, перебуваючи в тепловій рівновазі одна з одною. Якщо

припинити підведення теплоти, то лід і вода будуть співіснувати за цієї температури як завгодно довго.

Якщо змінити тиск, зміниться й температура фазового переходу. Інакше кажучи, співіснування двох фаз у рівновазі є можливим лише за певного співвідношення між тиском і температурою. Цю залежність зображують графічно у вигляді кривої на діаграмі  $P-T$ , яка називається *кривою фазового переходу*, а сама діаграма – *фазовою діаграмою*.

Для прикладу розглянемо фазову діаграму переходу між рідиною та її паром. На діаграмі  $P-V$  (рис. 2.31) рівновагу між рідиною та парою відображають горизонтальні ділянки експериментальних ізотерм Ван дер Ваальса. Горизонтальний характер ізотерми на цих ділянках зумовлений тим, що за даної температури незалежно від об'єму рівновага між рідиною та її парою можлива тільки за певного тиску. Тому для одержання кривої рівноваги рідини й пари на діаграмі  $P-T$  потрібно на осі абсцис відкласти значення температури для кожної ізотерми, а на осі ординат – тиск відповідно до її горизонтальної ділянки. У результаті вийде крива, зображена на рисунку 2.40. Тиск, за якого рідина і пара можуть перебувати в рівновазі, зростає у міру підвищення температури.

Крива рівноваги двох фаз закінчується в критичній точці: на діаграмі  $P-V$  видно, що в міру підвищення температури горизонтальна ділянка ізотерм стає дедалі коротшою і зникає за критичної температури – за температури, вищої від критичної, рідина існувати не може. У міру наближення до критичної температури густина насиченої пари зростає; за  $T = T_K$  вона дорівнює густині рідини і пара взагалі перестає відрізнятися від рідини.

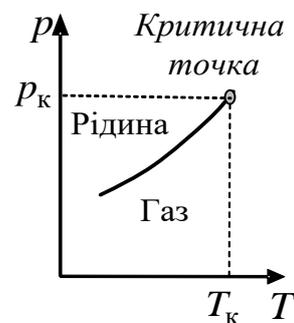


Рис. 2.40

### 2.7.2. Рівняння Клапейрона – Клаузіуса

Як зазначалось, перехід речовини з однієї фази в іншу пов'язаний з виділенням або поглинанням певної кількості теплоти, яка називається *теплотою фазового переходу*.

У разі переходу речовини із рідкого в газоподібний стан (і навпаки), виділяється теплота, яка визначається за формулою:

$$Q = rm,$$

де  $r$  – питома теплота пароутворення є кількістю теплоти, потрібної для випаровування 1 кг речовини при температурі випаровування (в СІ вимірюється в Дж/кг).

При перетворенні твердої речовини у рідку йдеться про теплоту кристалізації (плавлення), яка визначається за формулою:

$$Q = \lambda t,$$

де  $\lambda$  – питома теплота кристалізації є кількістю теплоти, яка потрібна для розплавлення 1 кг речовини при температурі плавлення (в СІ вимірюється в Дж/кг).

Під час фазового переходу із фази 1 у фазу 2 теплота поглинається, тоді як зворотний перехід супроводжується виділенням теплоти:

$$Q_{12} = -Q_{21}.$$

Наприклад, у процесі плавлення і пароутворення теплота поглинається, під час кристалізації і конденсації – виділяється. Це окремі випадки в межах загального правила, згідно з яким *фазовий перехід, який відбувається в процесі нагрівання, завжди супроводжується поглинанням теплоти.*

Кут нахилу фазової кривої на діаграмі  $P-T$  (величина  $dp/dT$ ) є важливою характеристикою фазового переходу (рис. 2.41), оскільки дає змогу передбачити характер фазового переходу речовини внаслідок зміни зовнішніх умов, у яких вона перебуває. Кут нахилу залежить від теплоти фазового переходу та зміни об'єму при переході. Для виведення цієї формули виконаємо цикл Карно, робочим тілом якого є деяка речовина, фазові переходи якої ми досліджуємо. Як відомо (див. п.2.4.2), цикл Карно складається з двох ізотерм та двох адіабат. Ізотермічними процесами є перехід речовини з фази 2 в фазу 1 за постійного тиску  $p$  і зворотний перехід за тиску  $p+dp$ .

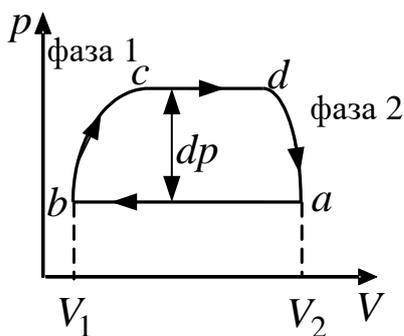


Рис. 2.41

Ці переходи зображено на фазовій діаграмі  $p-V$  (рис. 2.41) відрізками  $ab$  та  $cd$ . Сторони  $bc$  та  $da$  в загальному випадку не є адіабатами, однак у випадку нескінченно вузького циклу відмінність між цими сторонами і адіабатами не суттєва.

Робота такого циклу Карно, як відомо, визначається площею фігури, яка обмежується відрізками  $ab$ ,  $cd$ ,  $bc$  та  $da$  і дорівнює  $(V_2 - V_1) dp$ . З другого боку, ця робота повинна

дорівнювати добутку ККД циклу Карно на кількість затраченої теплоти  $Q_{12}$  (на ізотермі  $cd$ ). Величина  $Q_{12}$  є не чим іншим, як теплотою фазового переходу з фази 1 у фазу 2, а ККД нескінченно вузького циклу, згідно з першою теоремою Карно, дорівнює  $dT/T$ , де  $dT$  – різниця температур між ізотермами. Таким чином,

$$\frac{dT}{T} Q_{12} = (V_2 - V_1) dp.$$

Введемо поняття питомого об'єму речовини, величину, яка чисельно дорівнює об'єму одиниці маси речовини  $v = V/m$ , згадаємо також, що  $Q_{12} = q_{12} m$ , де  $q_{12}$  – питома кількість теплоти фазового переходу. Остаточно матимемо:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{12}}{T(v_2 - v_1)}. \quad (2.62)$$

Ця формула називається *рівнянням Клапейрона – Клаузіуса*.

У процесі пароутворення та сублімації крива фазового переходу має додатний нахил, оскільки під час цих фазових переходів теплота поглинається ( $Q_{12} > 0$ ), окрім того, питомий об'єм речовини зростає  $v_2 - v_1 > 0$ , оскільки питомий об'єм газу завжди більший за питомий об'єм рідини чи твердого тіла. Тоді згідно з рівнянням (2.62)  $dp/dT > 0$ .

Щодо плавлення, то крива фазового переходу зазвичай має додатний нахил. Для більшості речовин питомий об'єм рідкої фази є більшим за питомий об'єм кристалічної фази, тобто  $v_2 - v_1 > 0$ , тому  $dp/dT > 0$ . Однак, у деяких речовин, які дістали назву *аномальних*,  $v_2 - v_1 < 0$ . До них належать вода, вісмут, германій, деякі сорти чавуну. Для них  $dp/dT < 0$  і крива плавлення має від'ємний нахил.

Криві плавлення мають більший нахил, ніж криві пароутворення та сублімації, оскільки за цих переходів зміна питомого об'єму набагато перевищує зміну об'єму під час плавлення.

### 2.7.3. Критична та потрійна точки

Наявність критичної точки на кривій рівноваги рідини й пари свідчать про відсутність принципової різниці між рідким і газоподібним станами речовини. Пояснимо це на прикладі.

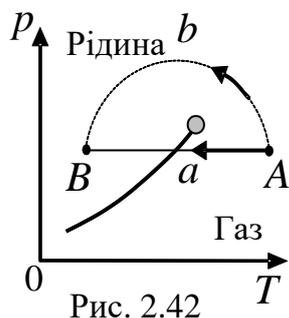


Рис. 2.42

Візьмемо пару в деякому стані  $A$  (рис. 2.42) і переведемо її в рідину в стан, який позначимо точкою  $B$ . Таке перетворення можна здійснити різними шляхами. Можна, наприклад, охолоджувати газ за постійного тиску доти, доки температура не дорівнюватиме  $T_B$ . У процесі ізобарного охолодження шлях  $a$  перетинає криву рівноваги, і в

цій точці система розшаровується на дві фази, оскільки відбувається конденсація пари в рідину.

Можна перевести систему зі стану  $A$  в стан  $B$  шляхом  $b$  (рис. 2.42). При цьому не відбуватиметься стрибкоподібної зміни стану й речовина увесь час залишатиметься однорідною. Здійснюючи перехід у такий спосіб, ми ніде не побачили б конденсації, отже, не змогли б сказати, що речовина перестала бути газом і стала рідиною. Проте й у цьому випадку ми досягнемо того самого кінцевого стану, за якого розглянуту систему вважаємо рідиною.

За звичайних умов фази газу й рідини так сильно відрізняються одна від одної за густиною, що не знайти відмінностей між ними важко. Очевидно, що відмінність між цими станами насправді не принципова, а радше кількісна. Відмінність у густині позначається на інтенсивності взаємодії молекул і на характері теплового руху. Але згідно з рівнянням Ван дер Ваальса газ за температур, вищих від критичної, можна стиснути настільки, що його густина стане більш характерною для рідини.

Як ми вже знаємо, дві фази речовини можуть перебувати в рівновазі одна з одною вздовж кривих співіснування на  $P$ - $T$ -діаграмі станів. Три фази тієї самої речовини можуть одночасно перебувати в рівновазі одна з одною лише в одній певній точці на діаграмі  $P$ - $T$ . У цій точці сходяться разом криві фазової рівноваги трьох фаз, така точка називається *потрійною точкою*. Наприклад, одночасне перебування в рівновазі льоду, води й пари можливе тільки за тиску 4,62 мм рт. ст. (615,8 Па) і температури +0,01 °С.

Потрійна точка води є дуже зручною як стандартна точка температурної шкали, тому що її відтворення, на відміну від точки кипіння або плавлення, не потребує спеціальної підтримки певного тиску.

Схематичну діаграму станів для речовини, що має три фази – тверду, рідку та газоподібну, відтворено на рис. 2.43. На відміну від кривої пароутворення, що закінчується в критичній точці температури, крива плавлення простягається у нескінченність. Крива сублімації



починається на початку координат, оскільки за абсолютного нуля температури речовина за будь-якого тиску перебуває в кристалічному стані. Дійсно, згідно із законами класичної механіки унаслідок наближення температури до абсолютного нуля тепловий рух припиняється. Нерухомі атоми розміщуються так, що потенціальна енергія взаємодії є мінімальною. Таке розміщення являє собою регулярну просторову ґратку. Тому за абсолютного нуля температури будь-яка речовина з погляду класичної механіки має бути кристалічною. В природі, однак є винятки: гелій після зрідження залишається рідким за будь-якої температури аж до абсолютного нуля. Це пояснюється тим, що за низьких температур проявляються квантові властивості речовини.

#### 2.7.4. Кристалічні модифікації

Фазові діаграми зазвичай мають декілька потрійних точок. Це пов'язано з *поліморфізмом* речовини, тобто наявністю в неї кількох кристалічних модифікацій.

Явище поліморфізму є дуже поширеним. Майже всі речовини – як елементи, так і сполуки – мають декілька модифікацій (у випадку елементів ці модифікації називають також *алотропними*). Широко відомими є модифікації вуглецю (графіт і алмаз), сірки (яка утворює ромбічні та моноклінні кристали), кремнезему (різні мінерали – кварц, триміт, кристобаліт) тощо.

Як і будь-які фази, різні модифікації можуть перебувати в рівновазі одна з одною лише вздовж певних ліній на діаграмі *P-T*, тоді як

перехід однієї модифікації в іншу (інакше це називають поліморфним перетворенням) супроводжується поглинанням або виділенням теплоти. Наприклад, перетворення так званого  $\alpha$ -заліза (з об'ємноцентрованою кубічною граткою) в  $\beta$ -залізо (кубічна гранецентрована гратка) відбувається за атмосферного тиску і температурі  $910\text{ }^{\circ}\text{C}$  та супроводжується поглинанням теплоти – близько  $1600\text{ Дж/моль}$ .

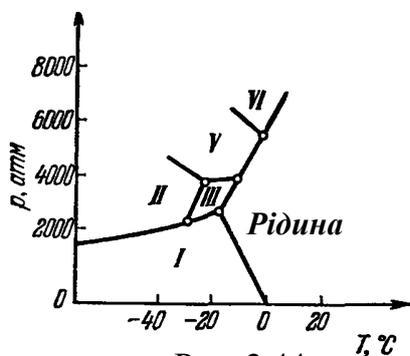


Рис. 2.44

На рис. 2.44 схематично представлена діаграма станів води. П'ять кристалічних модифікацій льоду позначені на діаграмі цифрами I, II, III, V, VI. Звичайному льоду відповідає ділянка I, інші модифікації проявляються лише за тиску, що вимірюється тисячами атмосфер. Ділянка пари відповідає настільки малому тиску, що її важко зобразити на тій же діаграмі.

Поліморфне перетворення полегшується, якщо в попередній фазі були вкраплення, які відіграють роль «зародків» нової фази. Відомим прикладом є перетворення звичайного білого олова (з тетрагональною структурою) у порошкоподібне сіре олово (модифікація з кубічною граткою). За умов атмосферного тиску ці модифікації перебувають у рівновазі за  $18\text{ }^{\circ}\text{C}$ , причому за вищої температури це – стійке біле олово, а за нижчої – сіре. Біле олово може існувати й на морозі, однак якщо вилучити з нього крупинки сірої модифікації, розсиплеться, перетворившись на сірий порошок.

Складність перебудови гратки за низьких температур може призвести й до таких модифікацій, які за будь-яких умов не є стійкими фазами; такі модифікації взагалі не фігурують на фазовій діаграмі, що відображує стійкі стани речовини. Таке явище спостерігається, наприклад, у процесі загартування сталі. Твердий розчин вуглецю в  $\gamma$ -залізі (так званий аустеніт) є стійким лише за температур  $700\text{--}900\text{ }^{\circ}\text{C}$  (залежно від вмісту вуглецю), а за нижчих температур повинен розпастися. Однак у разі дуже швидкого охолодження (*гартування*) аустеніту в металі відбувається утворення голчастих кристалів нової фази – твердого розчину з тетрагональною решіткою (так званий мартенсит), що характеризується великою твердістю. Ця проміжна фаза завжди є метастабільною, розпадається за повільного нагрівання до  $250\text{--}300\text{ }^{\circ}\text{C}$  (*відпуску сталі*).

## **2.8. ТЕЛОПЕРЕДАЧА**

Теплота може передаватися з одного місця тіла в інше трьома різними способами: за допомогою теплопровідності, конвекції та випромінювання. В реальних ситуаціях можуть одночасно відбуватися будь-які два з цих процесів (або навіть усі три) одночасно.

Передача теплоти завдяки теплопровідності відбувається внаслідок поширення пружних хвиль структурних елементів речовини, що коливаються, тобто йдеться про молекулярний процес передавання теплоти. У металах цей процес пов'язаний з переміщенням вільних електронів. Теплопровідність, як й інші способи передавання теплоти, зумовлена різницею температур між різними частинами тіла й у чистому вигляді притаманна лише твердим тілам.

Конвекція відбувається тільки в рідинах і газах. Цей спосіб передачі теплоти здійснюється в процесі переміщення рідини або газу в просторі й тією чи іншою мірою супроводжується теплопровідністю. На основі конвекції працює, наприклад, центральне опалення в приміщеннях. Одночасна передача теплоти завдяки конвекції й теплопровідності називається конвективним теплообміном.

Теплове випромінювання являє собою процес поширення теплоти в просторі за допомогою електромагнітних хвиль.

### **2.8.1. Теплопровідність**

Коли один з кінців будь-якого матеріалу помістити в середовище з вищою температурою, то згодом температура другого кінця матеріалу теж підвищиться, тобто тепло передається (або переноситься) від нагрітого кінця предмета до його холодного кінця. Явище теплопровідності можна уявляти собі як результат зіткнень молекул. Унаслідок нагрівання одного з кінців предмета молекули в ньому починають рухатися швидше. Під час зіткнень, молекули, що швидко рухаються, передають частину своєї енергії сусіднім молекулам, які рухаються повільніше, у результаті чого швидкість останніх збільшується. Молекули, рух яких прискорився, передають частину своєї енергії в процесі зіткнень наступним молекулам, що перебувають далі від нагрітого кінця.

Таким чином, можна сказати, що відбувається передавання (або перенесення) теплоти, тобто передача енергії теплового руху через об'єм

тіла внаслідок зіткнення молекул. Явище теплопровідності відбувається тільки за наявності різниці температур між різними частинами тіла. Експериментально встановлено, що кількість теплоти, яка переноситься за одиницю часу з однієї частини тіла в іншу (ця величина називається тепловим потоком), пропорційна різниці температур на його кінцях. Ми розглянемо це питання кількісно на прикладі теплового потоку в однорідному симетричному тілі. Експериментально визначено, що тепловий потік, зумовлений кількістю теплоти  $dQ$ , що проходить через поперечний переріз тіла площею  $dS$  за проміжок часу  $dt$ , визначається виразом, який називається законом Фур'є:

$$\frac{dQ}{dSdt} \vec{n} = -\chi \text{grad}T, \quad (2.64)$$

де  $\vec{n}$  – вектор додатної нормалі до площі  $dS$ , через яку переноситься теплота, його напрямок збігається з напрямком переносу тепла;  $\text{grad}T$  – градієнт температури, спрямований у бік найбільш швидкого зростання температури,  $\chi$  – коефіцієнт теплопровідності.

Знак мінус указує на те, що тепловий потік спрямований в бік, протилежний градієнту температури.

Коефіцієнт теплопровідності  $\chi$  чисельно дорівнює потоку тепла за одиничного градієнта температури і характеризує властивості речовини:

$$\chi = \left| \frac{dQ/dSdt}{|\text{grad}T|} \right|.$$

Одиницею вимірювання коефіцієнта теплопровідності в СІ є Вт/(м·К).

Коефіцієнт залежить від агрегатного стану речовини, температури, тиску, пористості і вологості. Визначається коефіцієнт теплопровідності дослідним шляхом, його чисельне значення наводиться в довідниках.

Речовини, у яких  $\chi$  малий (наприклад, азбест або дерево), погано проводять тепло, їх називають теплоізоляторами. Речовини з великими значеннями коефіцієнта теплопровідності легко проводять тепло й називаються провідниками тепла. До них належить більшість металів. Причому практично в усіх металів унаслідок підвищення температури коефіцієнт теплопровідності зменшується, а у сплавів – зростає. У твердих діелектриків унаслідок підвищення температури коефіцієнт теплопровідності зазвичай зростає.

Чисельні значення  $\chi$  для рідин знаходяться в діапазоні від 0,1 до 0,7 Вт/(м·К), унаслідок підвищення температури вони зменшуються (за винятком води і гліцерину). Найнижчі значення  $\chi$  у газів (в діапазоні приблизно від 0,006 до 0,1 Вт/(м·К)), причому у разі зростання температури  $\chi$  зростає пропорційно  $\sqrt{T}$ .

Коефіцієнти теплопровідності пористих та порошкоподібних речовин залежать від їхньої густини (чим більша густина, тим більший коефіцієнт теплопровідності). Це пояснюється тим, що теплопровідність повітря, яке заповнює пори речовини, є значно меншою, ніж теплопровідність твердої речовини.

У вологих пористих матеріалів коефіцієнт теплопровідності значно вищий, ніж у взятих окремо тих самих сухих матеріалів і води.

Теплопровідність буває стаціонарною, коли градієнт температури залишається постійним, і нестаціонарною, якщо градієнт температури змінюється. Нестационарна теплопровідність приводить до вирівнювання температури різних частин газу.

Для одновимірного випадку  $gradT = \frac{dT}{dx} \vec{i}$ , коли перенос речовини відбувається вздовж осі  $x$  декартової системи координат, рівняння (2.64) може бути переписане за умови, що напрямки векторів  $\vec{n}$  і  $\vec{i}$  збігаються. у вигляді:

$$\frac{dQ}{dSdt} = -\chi \frac{dT}{dx}. \quad (2.65)$$

Розглянемо стаціонарну теплопровідність в одновимірному випадку крізь однорідне тіло товщиною  $d$ , площею поперечного перерізу  $S$ , один кінець якого підтримується за температури  $T_1$ , інший – за температури  $T_2$ . В цьому випадку градієнт температури однаковий в усіх точках тіла і дорівнює:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{d},$$

тоді тепловий потік  $q = \frac{dQ}{dSdt}$  за законом Фур'є визначатиметься за формулою:

$$q = -\chi \frac{T_2 - T_1}{d}.$$

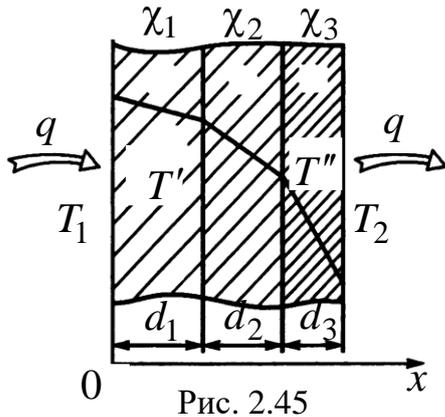


Рис. 2.45

Наприклад, для стінки, яка складається з кількох шарів матеріалів завтовшки  $d_1, d_2, d_3$  з коефіцієнтами теплопровідності  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  (рис. 2.45), тепловий потік за стаціонарної теплопровідності виражається формулою:

$$q = - \frac{(T_2 - T_1)}{\sum_i \frac{d_i}{\chi_i}}. \quad (2.66)$$

В будівельно-інженерній практиці величину  $R = d/\chi$  називають термічним опором стінки, тому рівняння (2.66) можна переписати у вигляді:

$$q = - \frac{(T_2 - T_1)}{R}, \quad (2.67)$$

де величина

$$R = \sum_i \frac{d_i}{\chi_i} \quad (2.68)$$

називається загальним *термічним опором стінки*.

*Приклад 1.* Тришарову плоску стінку (рис. 2.45) виготовлено з матеріалів, що мають коефіцієнти теплопровідності  $\chi_1 = 1,5$  Вт/(м·К),  $\chi_2 = 0,2$  Вт/(м·К) та  $\chi_3 = 0,8$  Вт/(м·К). Товщина шарів дорівнює 250, 125 та 250 мм відповідно. Температура зовнішніх поверхонь стінки становить:  $T_1 = 1800$  К та  $T_2 = 340$  К. Необхідно знайти густину теплового потоку і температуру на межах шарів стінки.

Густину теплового потоку знаходимо за рівнянням (2.66):

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{d_1}{\chi_1} + \frac{d_2}{\chi_2} + \frac{d_3}{\chi_3}} = \frac{1800 - 340}{\frac{0,25}{1,5} + \frac{0,125}{0,2} + \frac{0,25}{0,8}} = 1322,3 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Оскільки тепловий потік крізь шари в стаціонарному режимі є однаковим, температуру на межах шарів можна знайти з рівняння (2.67):

$$T' = T_1 - q \frac{d_1}{\chi_1} = 1800 - 1322,3 \cdot \frac{0,25}{1,5} = 1579,6 \text{ К},$$

$$T'' = T_2 + q \frac{d_3}{\chi_3} = 340 + 1322,3 \cdot \frac{0,25}{0,8} = 753,2 \text{ К}.$$

Приклад 2. Плоска стінка, яка складається з шару червоної цегли товщиною  $d_1 = 100$  мм, коефіцієнтом теплопровідності  $\chi_1 = 0,768$  Вт/(м·К), дерев'яної обшивки товщиною  $d_2 = 13$  мм, коефіцієнтом теплопровідності  $\chi_2 = 0,207$  Вт/(м·К), повітряним прошарком товщиною  $d_3 = 90$  мм, коефіцієнтом тепло-провідності  $\chi_3 = 0,026$  Вт/(м·К) та гіпсокартоном завтовшки  $d_4 = 13$  мм, коефіцієнтом теплопровідності  $\chi_4 = 0,01$  Вт/(м·К).

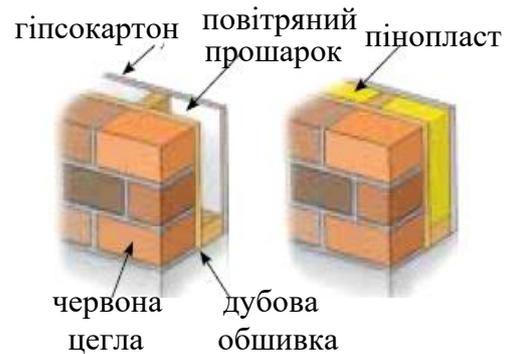


Рис. 2.46

Потрібно розрахувати термічний опір стінки: у скільки разів збільшиться термічний опір стінки, якщо в повітряний прошарок помістити шар пінопласту коефіцієнтом теплопровідності  $0,002$  Вт/(м·К).

Розрахуємо термічний опір кожного шару окремо:

$$R_1 = \frac{0,1}{0,768} = 0,13 \frac{\text{м}^2\text{К}}{\text{Вт}}; R_2 = \frac{0,013}{0,207} = 0,06 \frac{\text{м}^2\text{К}}{\text{Вт}};$$

$$R_3 = \frac{0,09}{0,026} = 3,46 \frac{\text{м}^2\text{К}}{\text{Вт}}; R_4 = \frac{0,013}{0,01} = 1,30 \frac{\text{м}^2\text{К}}{\text{Вт}}.$$

Знайдемо загальний термічний опір згідно з рівнянням (2.68):

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 0,13 + 0,06 + 3,46 + 1,30 = 4,95 \frac{\text{м}^2\text{К}}{\text{Вт}}.$$

Якщо в повітряний прошарок помістити шар пінопласту, термічний опір якого згідно з рівнянням (2.63), то:

$$R_3 = \frac{0,09}{0,002} = 45 \frac{\text{м}^2\text{К}}{\text{Вт}}.$$

У цьому випадку загальний термічний опір дорівнюватиме:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 0,13 + 0,06 + 45 + 1,30 = 46,49 \frac{\text{м}^2\text{К}}{\text{Вт}},$$

тобто термічний опір зростає у 9,4 рази, якщо у повітряний прошарок помістити пінопласт.

### Запитання для самоперевірки

1. Що є предметом вивчення молекулярної фізики?
2. Сформулюйте основні положення молекулярно-кінетичної теорії.
3. У чому полягають статистичний та термодинамічний методи дослідження?
4. Що таке термодинамічні параметри стану та рівняння стану газу?
5. Запишіть рівняння Менделєєва – Клапейрона.
6. Скільки молекул міститься в одному молі речовини?
7. Наведіть формулу, що пов'язує тиск, концентрацію молекул й абсолютну температуру.
8. Наведіть формулу зв'язку середньої кінетичної енергії молекули та температури.
9. Що таке температура?
10. Яка енергія припадає на кожну ступінь свободи молекули ідеального газу?
11. Запишіть і поясніть закон розподілу молекул за швидкостями (розподіл Максвелла).
12. Як змінюється концентрація молекул повітря відповідно до висоти над рівнем моря?
13. Сформулюйте поняття і наведіть формулу середньої довжини вільного пробігу молекули.
14. Від чого залежить внутрішня енергія ідеального газу? Наведіть формулу.
15. Запишіть і сформулюйте перше начало термодинаміки.
16. Як вимірюється робота ідеального газу за довільної зміни об'єму?
17. Що таке теплоємність, питома та молярна теплоємності газу? Назвіть одиниці вимірювання.
18. Що таке ізопроцеси?
19. Застосуйте перше начало термодинаміки до ізопроцесів.
20. Що таке адіабатичний процес? Запишіть рівняння Пуассона.
21. Зобразіть, як в координатах залежності тиску від об'єму проходять ізотерма та адіабата.
22. Сформулюйте друге начало термодинаміки.
23. З яких процесів складається цикл Карно?

24. Як визначити ККД ідеальної теплової машини?
25. Назвіть принцип дії теплової та холодильної машин.
26. Ентропія та її статистичне тлумачення. Формула *Больцмана*.
27. Наведіть графіки залежності сил та потенціальної енергії міжмолекулярної взаємодії.
28. Що таке агрегатні стани речовини? Наведіть приклади.
29. Запишіть рівняння *Ван дер Ваальса* для реальних газів.
30. Що таке критична точка? Побудуйте ізотерми *Ван дер Ваальса*.
31. Що таке абсолютна та відносна вологість повітря?
32. Запишіть рівняння *Фур'є* для явища теплопровідності.
33. Що таке коефіцієнт дифузії?
34. Що таке ближній порядок розташування молекул?
35. Які властивості рідин ви знаєте?
36. Що таке поверхнева енергія та сила поверхневого натягу?
37. Як залежить коефіцієнт поверхневого натягу від температури?
38. У чому полягають капілярні явища?
39. Що називають колоїдними розчинами?
40. Наведіть типи кристалічних ґраток.
41. Які дефекти кристалічних ґраток Вам відомі?
42. Що таке анізотропія кристалів?
43. Що таке фаза та фазові переходи?
44. Запишіть рівняння *Клапейрона – Клаузіуса*.
45. Дайте визначення поняття потрійної точки.

## Розділ 3. ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ

### 3.1. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

Вивчення розділу “Електрика і магнетизм” у курсі фізики студентами вищих будівельних навчальних закладів спрямоване на подальше сприйняття і засвоєння основ електротехніки, електроніки, мікропроцесорної техніки, автоматизованих систем управління у будівництві тощо. Викладання цих дисциплін, окрім отримання студентами знань фундаментально-базового характеру, спрямоване на вивчення процесів, що відбуваються в електричних колах постійного і змінного струму та здійснення електричних вимірювань у них; вивчення більшості електротехнічних пристроїв, таких як електротрансформатори, електричні апарати і машини постійного і змінного струму, електровимірювальні прилади, та ознайомлення з характерними режимами їхньої роботи; вивчення напівпровідникових приладів та електронної схемотехніки, що є складовими різноманітних електронних пристроїв; вивчення систем автоматизованого контролю і алгоритмів управління процесами у виробничій та експлуатаційній сфері будівельної галузі; вивчення систем електроживлення виробничого, транспортного, монтажного і побутового призначення.

Інженер-будівельник має розуміти особливості будови, принципи роботи і способи експлуатації електрообладнання будівельних машин та майданчиків, підприємств будівельної індустрії, інженерних систем будівель та питань електробезпеки. Окреслимо основні **складові частини, елементи та види електрообладнання будівельних машин, майданчиків, підприємств і будівель**, які є досить різноманітними за своїм призначенням і сферою застосування:

- вимірювання фізичних величин з високою точністю у ручному й автоматичному режимах забезпечують *електровимірювальні прилади* (амперметри, вольтметри, ватметри, омметри, електролічильники тощо), *вимірювальні перетворювачі* (шунти, дільники напруги, вимірювальні трансформатори, терморезистори, термопари, тензорезистори, ємнісні й індуктивні перетворювачі та ін.), *електровимірювальні установки та вимірювальні інформаційні системи*;

- для перетворення електричної енергії одного класу напруги або струму на інший клас напруги або струму використовують *трансформатори*, для взаємоперетворення механічної та електричної енергії – *електричні машини* (генератори та електродвигуни);
- *засобами автоматизації і контролю виробничих процесів* є напівпровідникові прилади, які широко застосовуються у різних пристроях, зокрема в системах керування електроприводами будівельних машин і механізмів (регулювання швидкості у димососах котелень, ліфтах, підйомних і транспортних механізмах тощо). До напівпровідникових приладів належать напівпровідникові діоди, тиристори і транзистори, що застосовуються у випрямлювачах, підсилювачах, інверторах, згладжувальних фільтрах, електричних приводах;
- ручне або автоматичне зварювання контактним або електродуговим методом у повітряному чи інертногазовому середовищах здійснюється за допомогою *електрообладнання зварювальних установок*;
- у будівництві та на підприємствах будівельної індустрії найчастіше використовують *вантажопідйомні машини*: стрілові, баштові, козлові, мостові й інші види кранів, а також підйомники різного призначення;
- серед *електричних ручних машин*, що використовуються у будівництві, розрізняють свердлильні, шліфувальні машини, машини для розпилювання деревини, гайко- та шуруповерти, машини ударної дії, вібратори;
- у виготовленні залізобетонних виробів важливе значення мають *електропрогрів бетону і ґрунту* електродним, індукційним, інфрачервоним методами або непрямим методом теплової обробки та методом електропропарювання;
- *електроосвітлювальні установки* (лампи розжарювання, газорозрядні, люмінесцентні та ртутні лампи, освітлювальна арматура, світильники) є засобами організації електричного освітлення на будівельному майданчику та мають важливе значення для виконання будівельно-монтажних робіт, особливо в осінньо-зимовий період та нічний час;

- ефективна експлуатація промислових і житлових об'єктів забезпечується *електрообладнанням інженерних систем будівель*. Сучасні житлові, громадські та промислові будинки насичені такими основними компонентами інженерних систем будинків, як електро-, тепло- і водопостачання, водопідготовка, каналізація, вентиляція, кліматичне обладнання, установки кондиціонування, електрообігрівання, охоронно-пожежні системи, установки для очищення стоків, іонізації та очищення повітря, освітлення тощо;
- найсучаснішими системами устаткування приватного житла є системи типу “розумний будинок”, у яких передбачено утримання будинку за допомогою програмовано-автоматизованих систем керування освітленням, опаленням, кондиціонуванням, вентиляцією, водопостачанням холодної та гарячої води, водовідведенням, охоронними і протипожежними комплексами у раціонально-економних режимах.

За такого рівня електрифікації усіх сфер будівельної індустрії, виробничо-монтажні та експлуатаційні процеси у будівництві мають характеризуватися великим ступенем електробезпеки. Практичне вирішення цього завдання досягається технічними способами і засобами (захисне заземлення, вирівнювання потенціалів, ізоляція струмоведучих частин, попереджувальна сигналізація, блокування, знаки безпеки, засоби захисту тощо). Освоєння різноманіття будівельного обладнання і техніки є необхідною умовою успішної професійної діяльності інженера будівельної галузі.

### ***3.1.1. Електричний заряд. Закон збереження електричного заряду***

*Електричний заряд – одна з фундаментальних властивостей матерії, що не існує окремо від носіїв заряду та кількісно характеризує здатність носіїв заряду вступати в електромагнітну взаємодію.*

Експериментально встановлено, що в природі є всього два види електричних зарядів – *позитивні і негативні*. Однойменні заряди відштовхуються, а різнойменні притягуються. Носієм найменшого негативного елементарного заряду є одна з найпоширеніших елементарних частинок – електрон  ${}_{-1}^0e$ , а найменшого позитивного – протон  ${}_{1}^1p$ .

Величину найменшого елементарного заряду  $|q_e| = |q_p| = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл визначив дослідним шляхом Р. Міллікен. Одиниця електричного заряду в системі СІ – кулон,  $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с}$ .

Однією з важливих властивостей елементарного заряду є незалежність його числового значення від стану інерціальних систем відліку, в яких він визначається, – *інваріантність елементарного заряду*.

Спостереження й дослідження свідчать, що в усіх процесах взаємоперетворень повний електричний заряд замкненої системи є величиною постійною, яка дорівнює алгебраїчній сумі її позитивних та негативних зарядів, – **закон збереження електричного заряду**. Це твердження вперше висловив Б. Франклін, сформулював М. Фарадей. У теоретичній фізиці закон збереження заряду є наслідком інваріантності рівнянь електродинаміки.

### **3.1.2. Закон Кулона**

Дослідження взаємодії двох нерухомих точкових зарядів виконали незалежно один від одного Г. Кавендіш у 1772 р., результати досліджень якого були опубліковані лише у 1879 р., і Ш. Кулон у 1785 р.

Закон взаємодії нерухомих точкових зарядів у вакуумі називається **законом Кулона**: сила взаємодії двох нерухомих точкових зарядів у вакуумі прямо пропорційна добуткові величин цих зарядів  $q_1$  і  $q_2$ , обернено пропорційна квадратові відстані  $r$  між ними та спрямована вздовж прямої, що сполучає ці заряди:

$$F_0 = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2},$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності, в СІ  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ (Н} \cdot \text{м}^2)/(\text{Кл}^2)$ ;

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  – електрична стала.

Після вміщення двох точкових зарядів у будь-яке непровідне середовище сила їхньої взаємодії зменшується через явище поляризації діелектричного середовища. Явище поляризації полягає у відносному зміщенні заряджених частинок атомів молекул (електронів і ядер) під впливом електричного поля зарядів, вміщених у діелектричне

середовище. Кількісний вплив середовища на взаємодію між зарядами враховують введенням *відносної діелектричної проникності середовища*  $\varepsilon$  – величини, що відображає, в скільки разів сила взаємодії точкових електричних зарядів у вакуумі більша, ніж сила їхньої взаємодії у середовищі, що є безрозмірною величиною:

$$\varepsilon = \frac{\vec{F}_0}{\vec{F}}.$$

Закон Кулона щодо взаємодії двох точкових зарядів у середовищі у векторній формі має вигляд:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{\varepsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (3.1)$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений до того заряду, на який визначається дія з силою  $\vec{F}$ .

### ***3.1.3. Електричне поле. Напруженість електростатичного поля, принцип суперпозиції електростатичних полів***

Експериментально встановлено, що взаємодія між нерухомими зарядами здійснюється не миттєво (теорія далекодії), а зі скінченною швидкістю  $3 \cdot 10^8$  м/с згідно з концепцією близькодії через особливий вид матерії – електричне поле.

*Електричне поле – особливий вид матерії, що є складовою загального електромагнітного поля, зумовлений зарядженими частинками і тілами або змінним у часі магнітним полем, через яке відбувається електрична взаємодія.*

*Електростатичне поле – це електричне поле, що утворюється нерухомими зарядами, тобто не змінюється з часом. Має дві характеристики: силову – напруженість  $\vec{E}$  та енергетичну – потенціал  $\varphi$ .*

*Напруженість електростатичного поля – векторна фізична величина, що є силовою характеристикою електричного поля, чисельно дорівнює силі, з якою електричне поле в певній точці простору діє на одиничний позитивний пробний заряд:*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}.$$

Одиницею вимірювання напруженості є 1 В/м, про це свідчать такі перетворення:  $1 \text{ Н/Кл} = 1 (\text{Н}\cdot\text{м})/(\text{Кл}\cdot\text{м}) = 1 \text{ Дж}/(\text{Кл}\cdot\text{м}) = 1 \text{ В/м}$ .

*Пробним зарядом* називають позитивний точковий, досить малий заряд, значення якого не буде спотворювати початкового характеру поля своїм власним полем.

Спираючись на закон Кулона та визначення напруженості, одержимо формулу напруженості електростатичного поля точкового заряду  $q$  на відстані  $r$ :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (3.2)$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений від заряду  $q$  до певної точки простору, в якій визначається вектор  $\vec{E}$ .

Для графічного зображення картини поля навколо заряду чи системи зарядів використовують *силові лінії* (або *лінії напруженості*) електростатичного поля – лінії, дотичні до яких у кожній точці збігаються з напрямком вектора напруженості  $\vec{E}$ , їхня густина характеризує модуль  $|\vec{E}|$ . Найпростіший вигляд має картина силових ліній електростатичного поля точкових зарядів, силові лінії завжди беруть початок на позитивних зарядах і закінчуються на негативних (рис. 3.1, а), та системи двох точкових рівновеликих зарядів, різних за знаками (рис. 3.1, в).

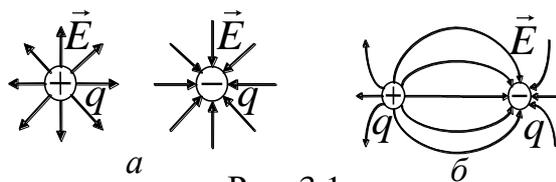


Рис. 3.1

Для визначення конфігурації та напруженості електростатичного поля системи точкових нерухомих зарядів застосовують **принцип суперпозиції електростатичних полів**: напруженість електростатичного поля системи зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей, створених у цій точці поля окремими точковими зарядами системи:

$$\vec{E}_{\text{сум}} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (3.3)$$

Окремим випадком електростатичного поля є *однорідне електростатичне поле* – поле, величина й напрям вектора напруженості

якого  $\vec{E}$  однакові в кожній точці поля, тобто  $\vec{E} = \text{const}$ . Прикладом однорідного електростатичного поля є поле плоского зарядженого конденсатора, картина силових ліній якого має вигляд паралельних прямих (рис. 3.2). Густина ліній напруженості однорідного електростатичного поля є сталою, якщо вони прямі і паралельні.

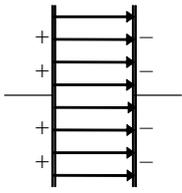


Рис. 3.2

### 3.1.4. Теорема Гаусса для електростатичних полів та її застосування

Потоком вектора напруженості електростатичного поля  $d\Phi_E$  через елементарну поверхню  $dS$  називають скалярну фізичну величину, яка чисельно дорівнює скалярному добутку вектора напруженості  $\vec{E}$  на елемент цієї поверхні:

$$d\Phi_E = (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = E \cdot dS \cdot \cos \left( \hat{\vec{E}}, \hat{\vec{n}} \right),$$

де  $\vec{n}$  – одиничний вектор нормалі до поверхні  $dS$ .

Якщо поле неоднорідне і поверхня не плоска, то її уявно поділяють на елементи  $dS$ , які наближено можна вважати плоскими, а поле в її межах – однорідним. Тоді повний потік вектора  $\vec{E}$  через поверхню  $S$  обчислюється як поверхневий інтеграл:

$$\Phi_E = \int_S E \cdot dS \cdot \cos \left( \hat{\vec{E}}, \hat{\vec{n}} \right) = \int_S E_n \cdot dS, \quad (3.4)$$

де  $E_n$  – проекція вектора напруженості  $\vec{E}$  на нормаль  $\vec{n}$ .

Іноді застосування принципу суперпозиції (3.3) для визначення напруженості електростатичного поля системи великої кількості точкових нерухомих зарядів потребує громіздких математичних розрахунків, у таких випадках доцільно використовувати **теорему Гаусса**: потік вектора напруженості електростатичного поля через довільну замкнену поверхню в однорідному непровідному діелектрику дорівнює алгебраїчній сумі електричних зарядів, обмежених цією поверхнею, поділений на  $\epsilon\epsilon_0$ :

$$\hat{O}_E = \oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i. \quad (3.5)$$

Теорема Гаусса може бути сформульована і доведена для вектора електричного зміщення (індукції електростатичного поля)  $\vec{D}$ , яка є такою самою силовою характеристикою електростатичного поля, але, на відміну від напруженості  $\vec{E}$ , індукцію  $\vec{D}$  створюють лише вільні електричні заряди. Зв'язок між векторами  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  має вигляд:  $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$ , отже, математичний запис теореми Гаусса через вектор електричного зміщення має такий вигляд:

$$\oint_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = \sum_{i=1}^N q_i.$$

Найчастіше теорему Гаусса застосовують для розрахунку напруженості  $\vec{E}$  систем зарядів з певною симетрією у їхньому відносному розташуванні. Розглянемо кілька прикладів розрахунку напруженості електростатичного поля  $\vec{E}$  із застосуванням теореми Гаусса.

*Приклад 1. Електричне поле точкового заряду.* Для обчислення  $\vec{E}$  із застосуванням теореми Гаусса в електричному полі необхідно обрати таку замкнену поверхню, щоб розв'язати задачу якнайпростіше. Як видно на рис. 3.3, для поля точкового заряду такою поверхнею є сфера. Обрана сферична поверхня радіуса  $\vec{r}$  із центром у точці розміщення заряду охоплює заряд  $q$ . Потік вектора напруженості  $\vec{E}$  через сферичну поверхню з (3.4):

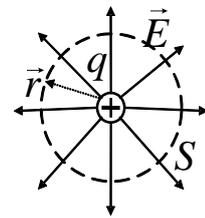


Рис. 3.3

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = E(r) \oint_{4\pi r^2} dS = 4\pi r^2 E(r).$$

За теоремою Гаусса з (3.5) отримаємо:

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Прирівняємо праві частини наведених рівнянь:  $4\pi r^2 E(r) = q/\epsilon\epsilon_0$ . Звідси напруженість поля точкового заряду  $q$  на відстані  $r$ :

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2},$$

що збігається з виразом, обчисленим за (3.2).

*Приклад 2. Електричне поле рівномірно зарядженої нескінченної площини.* Площину можна вважати нескінченною, якщо відстанню від точки, в якій визначають напруженість електростатичного поля, до площини можна нехтувати з огляду на її геометричні розміри. Нехай дана площина заряджена рівномірно з поверхневою густиною заряду

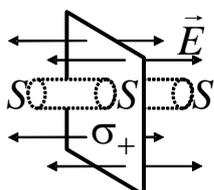


Рис. 3.4

$\sigma = dq/dS$ . Для обчислення  $\vec{E}$  за теоремою Гаусса раціонально обрати замкнену поверхню у вигляді прямого циліндра, розміщеного симетрично відносно зарядженої площини, з основами, що мають площу  $S$ , паралельними їй (рис. 3.4).

Потік вектора напруженості  $\vec{E}$  через циліндричну поверхню (3.4):

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \oint_{S_{\text{бічн. пов.}}} EdS \underbrace{\cos(\vec{E}, \vec{n})}_{=0} + 2 \oint_{S_{\text{основи}}} EdS \underbrace{\cos(\vec{E}, \vec{n})}_{=1} = 2ES.$$

За теоремою Гаусса (3.5):

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Прирівняємо праві частини останніх рівнянь:  $2ES = \sigma S/\epsilon\epsilon_0$ .

Напруженість поля поблизу рівномірно зарядженої нескінченної площини визначають як:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}.$$

Отже, для напруженості поля двох рівномірно заряджених площин (поля плоского конденсатора)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}.$$

*Приклад 3. Електричне поле рівномірно зарядженого нескінченного провідника.* Нехай нескінченний провідник заряджений рівномірно з лінійною густиною заряду  $\tau = dq/dS$ . Для обчислення

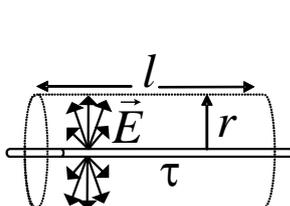


Рис. 3.5

напруженості поля  $\vec{E}$  провідника оберемо замкнену поверхню у вигляді прямого циліндра довжиною  $l$  і радіусом  $r$ , розміщеного концентрично відносно зарядженого провідника (рис. 3.5).

Потік вектора напруженості  $\vec{E}$  через

циліндричну поверхню (3.4):

$$\Phi_E = \oint_{S_{\text{бічн.пов.}}} E dS \underbrace{\cos(\vec{E}, \vec{n})}_{=1} + 2 \oint_{S_{\text{основи}}} E dS \underbrace{\cos(\vec{E}, \vec{n})}_{=0} = ES_{\text{бічн.пов.}} = E \cdot 2\pi r l.$$

За теоремою Гаусса (3.5):

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\tau l}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Прирівняємо праві частини останніх рівнянь:  $2\pi r l E = \frac{\tau l}{\epsilon\epsilon_0}$ .

Напруженість поля на відстані  $r$  від рівномірно зарядженого нескінченного провідника дорівнюватиме:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

### 3.1.5. Потенціал електростатичного поля, екіпотенціальні поверхні

**Потенціалом** називають скалярну фізичну величину, що є енергетичною характеристикою електростатичного поля, чисельно рівну потенціальній енергії одиничного позитивного заряду, розміщеного в даній точці поля:

$$\varphi = \frac{W_{\text{п}}}{q_0}. \quad (3.6)$$

Практичне використання формули (3.6) ускладнене невизначеністю потенціальної енергії, але якщо зумовити вибір нуля потенціальної енергії на нескінченності  $W_{\text{п}}(\infty) = 0$ , то отримаємо більш практичне визначення.

**Потенціал** у даній точці поля  $\varphi(r)$  чисельно дорівнює роботі сил поля при переміщенні пробного одиничного позитивного заряду із даної точки поля у нескінченність:

$$\varphi(r) = \frac{W_{\text{п}}(r) - W_{\text{п}}(\infty)}{q_0} = \frac{A_{r\infty}}{q_0}. \quad (3.7)$$

Відповідно до визначення потенціалу за одиницю його вимірювання взято 1 В (вольт): 1 В = 1 Дж/1 Кл.

*Потенціал* – величина *адитивна*, тобто потенціал поля, створеного системою зарядів, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, створених у цій точці кожним зарядом окремо:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i.$$

*Різниця потенціалів між двома точками поля 1 і 2 визначається роботою сил електричного поля з переміщення пробного одиничного позитивного заряду між ними:*

$$\Delta\varphi_{12} = \frac{A_{12}}{q_0}. \quad (3.8)$$

Визначимо потенціал поля точкового позитивного заряду  $q$  на відстані  $r$  від нього (рис. 3.6). Згідно з визначенням помістимо в точці на відстані  $r$  від заряду  $q$  позитивний пробний заряд  $q_0$  і визначимо роботу сил кулонівського відштовхування зарядів  $F_{\text{Кл}}$  вздовж радіус-вектора  $\vec{r}$ :

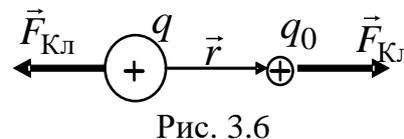


Рис. 3.6

$$A_{r\infty} = \int_r^{\infty} (\vec{F}_K \cdot d\vec{r}) = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_r^{\infty} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (3.9)$$

Якщо врахувати рівняння (3.7), то потенціал поля точкового позитивного заряду  $q$  на відстані  $r$  від нього становитиме:

$$\varphi_r = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}, \quad (3.10)$$

тобто потенціал поля точкового заряду залежить від відстані і величини заряду, а також діелектричних властивостей середовища.

Різниця потенціалів між двома точками 1 і 2 поблизу точкового заряду дорівнюватиме:

$$\Delta\varphi_{12} = \frac{A_{12}}{q_0} = \frac{A_{1\infty} - A_{\infty 2}}{q_0} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

З цієї формули випливає, що різниця потенціалів не залежить від форми траєкторії переміщення заряду силами поля між точками 1 – 2, а визначається лише початковим і кінцевими положенням точок. Таку властивість мають *потенціальні поля* (див. п.1.4.3), тому електростатичне поле теж є потенціальним.

Графічно картину електростатичного поля можна зобразити за допомогою системи екіпотенціальних поверхонь. *Еквіпотенціальною поверхнею* називають геометричне місце точок поля, потенціали яких є однаковими:

$$\varphi(r) = \text{const}.$$

Для прикладу розглянемо найпростіший випадок – електростатичне поле точкового заряду  $q$  (3.10):

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \text{const}.$$

тобто  $r = \text{const}$ . Таким чином, екіпотенціальними поверхнями точкового заряду є концентричні сфери з центром у точці розміщення заряду (рис. 3.7). Силві лінії напруженості завжди перпендикулярні до екіпотенціальних поверхонь.

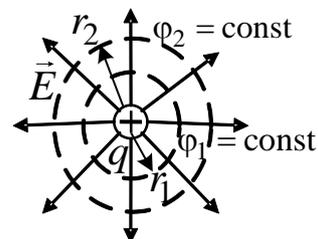


Рис. 3.7

### 3.1.6. Теорема про циркуляцію вектора напруженості електричного поля

Повна робота з переміщення точкового заряду в електричному полі з точки 1 у точку 2:

$$A_{12} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (3.11)$$

На підставі рівняння (3.11) можна дійти висновку, що робота з переміщення точкового заряду в електричному полі вздовж довільного замкненого контуру ( $r_1 = r_2$ ) дорівнює нулеві. Математично цю умову можна записати так:

$$A = \oint_L (\vec{F}_{\text{еє}} \cdot d\vec{r}) = \oint_L q_0 E \cdot \underbrace{dl \cos \alpha}_{dr} = q_0 \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Оскільки  $q_0 \neq 0$ , то

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (3.12)$$

Лінійний інтеграл  $\oint_L \vec{E} d\vec{l}$ , обчислений за довільним замкненим контуром  $L$ , називають *циркуляцією вектора напруженості  $\vec{E}$  електричного поля*.

Цей запис потенціальності електростатичного поля (3.12) є одним з фундаментальних рівнянь електростатики, яке відображає той факт, що силові лінії електростатичного поля є незамкненими: вони починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних або спрямовуються в нескінченність (для позитивних зарядів) чи з нескінченності (для негативних). Під час переміщення пробного точкового заряду в такому полі по замкненому контуру на одних ділянках шляху виконана робота буде додатною, на інших – від’ємною, але повна робота завжди дорівнюватиме нулеві.

*Теорема про циркуляцію вектора напруженості електричного поля (умова потенціальності електростатичного поля):* векторне поле напруженості  $\vec{E}$  називається потенціальним, якщо циркуляція вектора  $\vec{E}$  по довільно замкненому контуру дорівнює нулеві.

### 3.1.7. Зв’язок між напруженістю і потенціалом електростатичного поля

Оскільки напруженість і потенціал за фізичним змістом є різними характеристиками тих самих точок поля, між ними має бути зв’язок. Для цього визначимо роботу з перенесення пробного заряду  $q_0$  між точками 1 і 2 однорідного електростатичного поля двома різними способами.

З одного боку, елементарна робота з переміщення заряду визначається різницею потенціалів (3.8):

$$dA_{12} = -q_0 \cdot d\varphi,$$

з іншого боку – напруженістю поля:

$$dA_{12} = F_{\text{кл}} \cdot dr = q_0 E \cdot dr.$$

Прирівнявши праві частини останніх рівнянь  $-q_0 \cdot d\varphi = q_0 E \cdot dr$ , матимемо:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr},$$

або у векторному вигляді:  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\varphi$  (3.13),

де  $\overrightarrow{\text{grad}} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$  – оператор градієнта.

Знак мінус у (3.13) означає, що вектор напруженості електростатичного поля спрямований у бік зменшення потенціалу.

З формули (3.13) отримаємо формулу для визначення різниці потенціалів електростатичного поля між двома точками:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}_{\text{кл}} d\vec{l}). \quad (3.14)$$

Для однорідного поля напруженість за абсолютним значенням визначається так:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \frac{U}{d}, \quad (3.15)$$

де  $d$  – відстань між точками з потенціалами  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ ;  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  – напруга між точками 1 і 2.

### 3.1.9. Електричний диполь

Електричним диполем називають одну з найпростіших систем точкових зарядів, що складається з двох однакових за абсолютним значенням і протилежних за знаком точкових зарядів  $+q$  і  $-q$ , розміщених на деякій відстані  $\vec{l}$ . Величину  $\vec{l}$  називають плечем диполя.

Основною характеристикою диполя є електричний дипольний момент  $\vec{p}$  – векторна фізична величина, що чисельно дорівнює добутку заряду на плече диполя. Вектор  $\vec{p}$  направлений від негативного заряду до позитивного, тобто за напрямом  $\vec{l}$  (рис. 3.8):

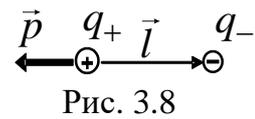


Рис. 3.8

$$\vec{p} = q\vec{l}.$$

Одиницею вимірювання електричного дипольного моменту є 1 Кл·м.

Диполь – електрично нейтральна система, але навколо нього є електричне поле. Обчислимо напруженість електричного поля диполя  $E_{\text{д}}$  у довільній точці простору на відстані від центру диполя  $r \gg l$  (рис. 3.9). Згідно з принципом суперпозиції електростатичних полів (3.3):

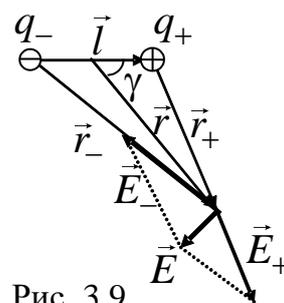


Рис. 3.9

$$E_{\partial} = |\vec{E}_+ + \vec{E}_-| = \left| \frac{kq\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{kq\vec{r}_-}{r_-^3} \right| = kq \left| \frac{\vec{r} - \vec{l}/2}{(\vec{r} - \vec{l}/2)^3} - \frac{\vec{r} + \vec{l}/2}{(\vec{r} + \vec{l}/2)^3} \right| = kq \left| \frac{2\left(\vec{l} + 3\vec{r} \cos \frac{\gamma}{2}\right)}{r^3} \right|$$

$$E_{\partial} = \frac{p\sqrt{1 + 3\cos^2 \gamma}}{r^3},$$

де  $\gamma$  – кут між віссю диполя і напрямом на обрану точку в просторі, або кут між векторами  $\vec{l}$  і  $\vec{r}$ .

### Диполь у зовнішньому електричному полі

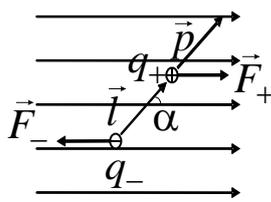


Рис. 3.10

Розмістимо диполь в *однорідному* полі (рис. 3.10). Сили, що діють на позитивний і негативний заряди диполя, є однаковими за значенням  $|\vec{F}_+| = |\vec{F}_-|$  і протилежними за напрямом, тобто утворюють пару сил. Їхня рівнодійна дорівнює нулеві, тому переміщення диполя вздовж поля ці сили не викликають. Орієнтація диполя вздовж ліній напруженості поля зумовлюється дією моменту пари сил:

$$M = \left( F_+ \frac{l}{2} + F_- \frac{l}{2} \right) \sin \alpha = qEl \sin \alpha,$$

або у векторній формі:

$$\vec{M} = [\vec{p} \times \vec{E}].$$

Отже, в однорідному електричному полі на диполь діє пара сил, яка намагається повернути диполь так, щоб кут між векторами  $\vec{p}$  та  $\vec{E}$  зменшився і диполь встановився у напрямі поля.

Якщо момент сил дорівнює нулеві, то диполь перебуває у рівновазі. Існує два положення рівноваги диполя: стійка рівновага (диполь паралельний лініям напруженості  $\alpha = 0$ ) і нестійка рівновага (диполь антипаралельний лініям напруженості  $\alpha = \pi$ ).

Потенціальна енергія диполя в однорідному електричному полі напруженістю  $\vec{E}$  дорівнює:

$$W_{\Pi} = q_+\varphi_+ + q_-\varphi_- = q\Delta\varphi = qEl \cos \alpha,$$

де  $\varphi_+$  і  $\varphi_-$  – потенціали точок поля, в яких знаходяться позитивний і негативний заряди відповідно.

В загальній формі потенціальна енергія диполя дорівнює скалярному добутку:

$$W_{\Pi} = -(\vec{p} \cdot \vec{E}).$$

Якщо поле *неоднорідне* (рис. 3.11), то сили за значенням є різними  $|\vec{F}_-| > |\vec{F}_+|$  і їхня рівнодійна не дорівнює нулеві:

$$F = F_- - F_+ = qE - q\left(E - \frac{dE}{dx}l\right) = q \frac{dE}{dx}l,$$

або у векторному вигляді:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}W_n \text{ чи } \vec{F} = \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}).$$

Знак “-” вказує на те, що рівнодійна сил спрямована у бік зменшення потенціальної енергії.

Таким чином, у неоднорідному полі на диполь, окрім моменту пари сил, діє ще сила у напрямі зростання напруженості поля, яка прагне втягнути диполь в сильнішу ділянку поля. Цим

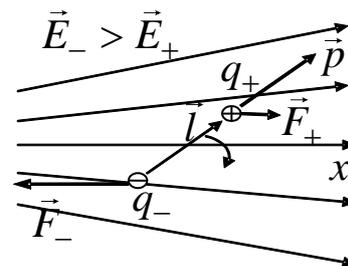


Рис. 3.11

пояснюється притягання до наелектризованих тіл дрібних предметів, на яких виникають індуковані заряди, які наближено можна вважати диполями.

### 3.1.9. Поляризація діелектриків

*Діелектриком* називають речовину, яка не проводить електричний струм за певних умов через те, що немає вільних носіїв заряду. Діелектрики відповідно до впливу на них електричного поля, поділяють на три групи:

- *неполярні* – діелектрики, молекули яких до внесення в електричне поле не мають дипольного моменту, оскільки центри позитивних та негативних зарядів молекул збігаються (молекули мають певну симетрію).

Після внесення в електричне поле „центри ваги” зарядів протилежного знаку зміщуються, неполярні молекули діелектрика стають диполями, тобто виникає дипольний момент, направлений

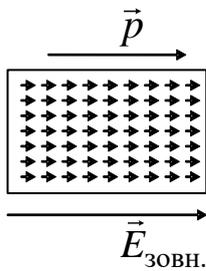


Рис. 3.12

вдovж силових ліній поля (рис. 3.12). Набуття діелектриком дипольного моменту під дією поля називається *поляризацією*  $\vec{D}$ .

Для характеристики поляризації діелектриків в електричному полі вводять *вектор поляризації*:

$$\vec{D} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V},$$

де  $\sum_i \vec{p}_i$  – сумарний наведений дипольний момент діелектрика,  $\Delta V$  –

об'єм поляризованого діелектрика.

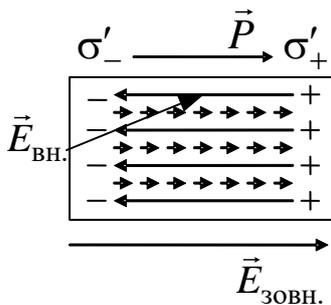


Рис. 3.13

Вектор поляризації пов'язаний із напруженістю зовнішнього поля формулою

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E},$$

де  $\chi$  – *діелектрична сприйнятливість діелектрика*.

Оскільки в електричному полі зміщуються переважно електрони через малу масу порівняно з масою ядер молекул, то механізм поляризації неполярних діелектриків називають електронним (іноді індукційним, оскільки дипольний момент наводиться, індукується зовнішнім полем).

Зовнішнє електростатичне поле напруженістю  $\vec{E}_{\text{зовн.}}$  сприяє наведенню надлишкового заряду поверхневою густиною  $\sigma'_+$  на одному боці діелектрика і  $\sigma'_-$  на протилежному (рис. 3.13). Всередині діелектрика встановлюється власне електростатичне поле напруженістю  $\vec{E}_{\text{вн.}}$ , що послаблює зовнішнє поле, тому напруженість електричного поля всередині неполярного діелектрика внесеного у зовнішнє поле:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{вн.}} + \vec{E}_{\text{вн.}} < \vec{E}_{\text{зовн.}}, \quad \frac{\vec{E}}{\vec{E}_{\text{зовн.}}} = \epsilon > 1$$

До таких діелектриків належать  $\text{N}_2$ ,  $\text{H}_2$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{CH}_4$  тощо;

- *полярні* – діелектрики, молекули яких за відсутності зовнішнього електричного поля мають дипольний момент, відмінний від нуля, оскільки характеризуються асиметричним розподілом заряду в об'ємі молекули через те, що не збігаються центри позитивних і

негативних зарядів. Але внаслідок теплового хаотичного руху молекул їхній сумарний дипольний момент дорівнює нулю (рис. 3.14, а).

У разі внесення полярного діелектрика в електричне поле відбувається орієнтація диполів вздовж поля (рис. 3.14, б), що призводить до появи сумарного дипольного моменту діелектрика, відмінного від нуля, такий механізм поляризації називають *дипольною*, або *орієнтаційною поляризацією*.

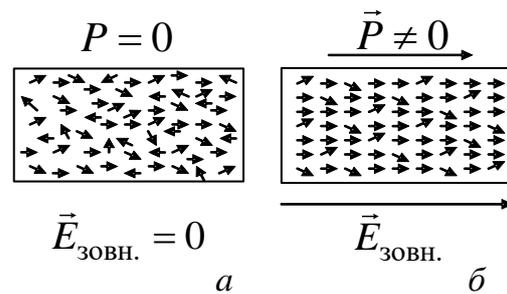


Рис. 3.14

Зовнішнє поле аналогічно, як і в неполярних діелектриках, сприяє наведенню надлишкового поверхневого заряду, тому всередині діелектрика встановлюється власне поле. Напруженість електричного поля всередині полярного діелектрика, внесеного у зовнішнє поле описується такими ж формулами, як і для неполярних діелектриків.

До таких діелектриків належать  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{CO}$  та інші;

- *спонтанно поляризовані* діелектрики – це кристалічні діелектрики, що мають кубічні іонні кристалічні ґратки (наприклад,  $\text{NaCl}$ ,  $\text{KCl}$ ,  $\text{KBr}$  та інші). Під дією електричного поля всі позитивні іони зміщуються у напрямку вектора напруженості поля  $\vec{E}_{\text{зовн.}}$ , а всі негативні іони – у протилежному напрямку. При цьому всередині кристала у кожній одиниці об'єму знаходиться однакова кількість позитивних і негативних іонів, а на кожній із двох протилежних граней обмеженого кристала, перпендикулярних вектору  $\vec{E}_{\text{зовн.}}$ , знаходяться іони якого-небудь одного знака. Такий вид поляризації називають іонною поляризацією. До спонтанно поляризованих діелектриків належать так звані:

- *піроелектрики* – кристалічні діелектрики, на поверхні яких виникають електричні заряди під час їхнього нагрівання або охолодження. Широко використовуються як індикатори і приймачі випромінювання у пристроях теплового бачення, наприклад, для визначення теплоємності і тепловтрат стін та стель будівель;

- *п'єзоелектрики* – діелектрики, на поверхні яких виникають електричні заряди внаслідок їхньої механічної деформації;

використовуються для виготовлення п'єзодатчиків, призначених для перетворення механічних коливань в електричні, й акустичних генераторів – для перетворення електричних змін у звукові коливання. З них виготовляють адаптери для відтворення звуку, різноманітні прилади для вимірювання частоти й амплітуди вібрацій двигунів, генераторів, будівельних конструкцій тощо; елементи п'єзоелектричних сейсмографів для реєстрації коливань земної кори в геодезичних дослідженнях, датчики для реєстрації коливань під час використання ударно-вібраційних будівельних механізмів; датчики акселерометрів (пристроїв вимірювання прискорень) для фіксації та регулювання швидкості підйомних механізмів; п'єзоелектричні манометри (датчики тиску) – використовують у процесі зведення й експлуатації мостових конструкцій, а також у лабораторних експертизах будівель;

– сегнетоелектрики – кристали, які виявляють макроскопічну поляризованість, навіть якщо немає зовнішнього електричного поля.

Макроскопічні ділянки кристала, в межах яких спостерігається поляризація з однаковою орієнтацією диполів називають доменами (від фр. «domains» – ділянки однорідної спонтанної поляризації). У межах домену молекули мають однакову орієнтацію дипольних моментів.

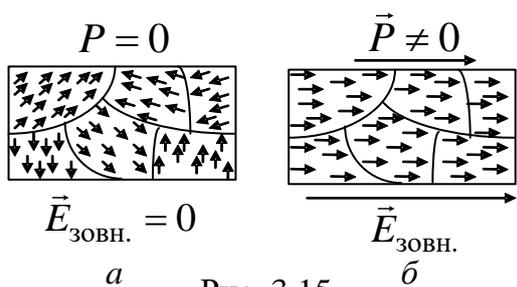


Рис. 3.15

Дипольний момент окремого домену відмінний від нуля  $\vec{p}_i \neq 0$ , але сумарний дипольний момент сегнетоелектрика дорівнює нулю

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n p_i = 0 \quad (\text{рис. 3.15, а}), \quad \text{оскільки}$$

орієнтація  $\vec{p}_i$  у просторі є хаотичною. У разі внесення в електричне поле спонтанно поляризованого діелектрика відбувається переорієнтація дипольних моментів кожного диполя вздовж вектора напруженості зовнішнього поля поляризації діелектрика внаслідок деформації кристалічної решітки (рис. 3.15, б). Надлишкові заряди, що утворюються на поверхні сегнетоелектрика, мають густину значно більшу, ніж у звичайних діелектриків. Власне поле напруженістю  $\vec{E}_{\text{вн}}$  значно послаблює зовнішнє поле напруженістю  $\vec{E}_{\text{зовн}}$  (рис. 3.16):

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{вн}} + \vec{A} \ll E_{\text{вн}}, \quad \frac{\vec{A}}{\vec{A}} = \epsilon \gg 1,$$

$$\epsilon = 10^3 \div 10^4.$$

До сегнетоелектриків належать сегнетова сіль  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ , яка дала назву всій групі, кварц, титанат барію  $\text{BaTiO}_3$  та ін.

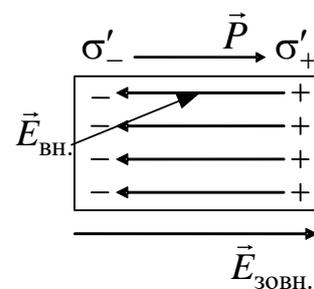


Рис. 3.16

*Особливі властивості* сегнетоелектриків експериментально дослідили ще у 1931 році І. В. Курчатов і П. П. Кобеко. А саме:

- сегнетоелектрики мають нелінійну залежність  $\epsilon$  від величини напруженості поля  $E$  (рис. 3.17).

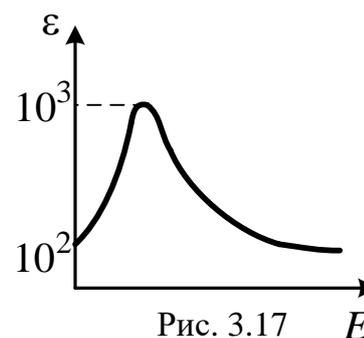


Рис. 3.17

- залежність вектора поляризації сегнетоелектрика від вектора напруженості зовнішнього електричного поля  $\vec{P} = f(\vec{E})$  є нелінійною і залежить від напруженості поля у попередній момент (рис. 3.18) – *явище діелектричного гістерезису* (від грец. “запізнювання”).

Із збільшенням напруженості зовнішнього поля  $\vec{E}_{\text{зовн}}$ , поляризованість сегнетоелектрика  $\vec{P}$  зростає і досягає насичення у т. А.

Зменшення  $\vec{P}$  із зменшенням зовнішнього поля здійснюється по кривій АС, і за  $E = 0$

сегнетоелектрик зберігає залишкову поляризованість 0-В.

Для її усунення треба прикласти електричне поле зворотного напрямку.

Напруженість  $E_k$  за  $P = 0$  називається коерцитивною силою (з лат. – “утримання”)

– напруженість поля, необхідна для ліквідації залишкової поляризованості.

Криву ОАВСДА називають *петлею гістерезису*.

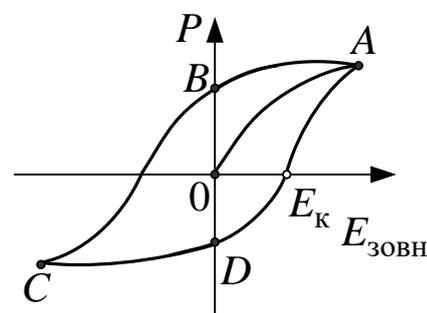


Рис. 3.18

### 3.1.10. Провідники в електростатичному полі

*Провідники* – це речовин, які проводять електричний струм завдяки наявності вільних носіїв заряду (електронів).

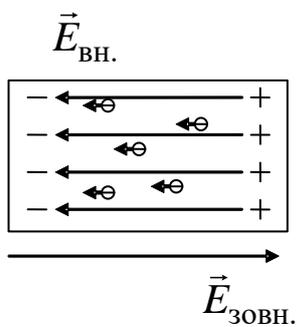


Рис. 3.19

Після внесення провідника в електричне поле вільні заряди переміщуються під дією сил поля (рис. 3.19). Переміщення відбуватиметься доти, доки напруженість внутрішнього поля, створеного зміщеними зарядами, не дорівнюватиме напруженості зовнішнього поля, тобто не настане рівновага і результуюче поле у провіднику не дорівнюватиме нулеві  $\vec{E}_{\text{вн}} + \vec{E}_{\text{зовн}} = 0$ .

Надлишковий заряд у провіднику, як і наведені заряди в діелектрику, завжди знаходиться у дуже тонкому поверхневому шарі товщиною порядку міжатомної відстані. Це можна легко довести, застосовуючи теорему Гаусса до будь-якого нескінченно малого об'єму провідника, враховуючи, що напруженість у ньому тотожно дорівнює нулеві  $\vec{E} = 0$ .

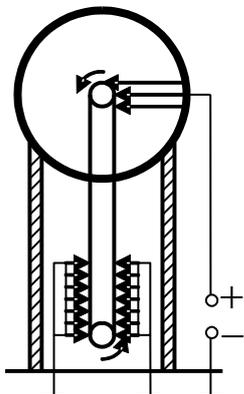


Рис. 3.20

Всередині провідника електричного поля немає  $\vec{E} = 0$ . Враховуючи зв'язок напруженості поля з його потенціалом (3.13), матимемо:  $\phi = \text{const}$ . Це означає, що весь провідник, зокрема і його поверхня, має однаковий потенціал. Провідник являє собою еквіпотенціальну поверхню, тому вектор напруженості електричного поля провідника спрямований перпендикулярно до його поверхні.

Властивість зарядів розміщуватися на зовнішній поверхні провідника використовується в *електростатичних генераторах* (генераторах Ван-де-Граафа) – пристроях, призначених для накопичення великих зарядів й отримання різниці потенціалів у декілька мільйонів вольт. Схематично електростатичний генератор є великою металевою сферою (рис. 3.20), всередину якої заходить частина рухомої замкнутої діелектричної стрічки. Одна система щіток надає стрічці заряду, а через іншу систему щіток цей заряд стікає на сферу.

Оскільки у стані електростатичної рівноваги всередині провідника зарядів немає, то утворення всередині нього порожнини не вплине на конфігурацію розміщення зарядів і тим самим – на електростатичне поле. Усередині порожнини поля не буде.

Якщо провідник з порожниною заземлити, то потенціал у всіх точках порожнини дорівнюватиме нулю, тобто порожнина повністю

ізолювана від впливу зовнішніх електростатичних полів. На цьому принципі засноване явище *електростатичного захисту* об'єктів – екранування тіл від впливу зовнішніх електростатичних полів. На практиці суцільні провідники замінює щільна металева сітка, яка є ефективною для захисту не лише статичних, а й змінних електричних полів. Електростатичного захисту потребують чутливі електроприлади та проводка, тому приміщення, в яких вони будуть знаходитись (щитові, лабораторії тощо), на стадії будівництва додатково армують добре провідними заземленими сітками. Електростатичним захистом забезпечують висотні крани, місця виконання електрозварювальних, висотних монтажних та оздоблювальних робіт.

### **3.1.11. Електроємність провідника і конденсатора**

Якщо провіднику надати заряд  $q_1$ , заряд розподілиться по поверхні провідника і створить електричне поле з потенціалом  $\phi_1$ . За зміни заряду провідника до  $q_i$  потенціал провідника зміниться до  $\phi_i$ , але для даного провідника відношення його заряду до потенціалу є величиною сталою:

$$\frac{q_1}{\Delta\phi_1} = \frac{q_i}{\Delta\phi_i} = \text{const}.$$

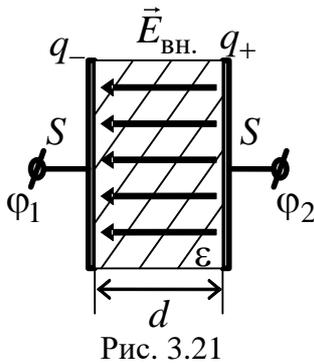
**Електричною ємністю провідника** називають скалярну фізичну величину, що характеризує здатність провідника накопичувати на своїй поверхні заряд і чисельно рівну заряду, який потрібно надати провіднику, щоб змінити потенціал його поверхні на одиницю:

$$C = \frac{dq}{d\phi}. \quad (3.16)$$

Одиницею ємності є 1 Ф (*фарад*), тобто ємність такого провідника, надання якому заряду в 1 Кл змінює потенціал поверхні на 1 В. Ємність окремих тіл є невеликою, наприклад, у Землі  $C = 6,4 \cdot 10^4$  Ф, тому на практиці використовують 1 мкФ =  $10^{-6}$  Ф, 1 пФ =  $10^{-12}$  Ф тощо.

Для сферичного провідника радіусом  $R$ , що знаходиться у середовищі з діелектричною проникністю  $\epsilon$ , враховуючи (3.10) та (3.16), ємність визначатиметься

$$C = \frac{dq}{d\phi} = \frac{dq}{dq/4\pi\epsilon\epsilon_0 R} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R.$$



Для накопичення і зберігання електричних зарядів використовують систему близько розташованих провідників, розділених діелектриком, яку називають **конденсатором**.

Ємність конденсатора (або взаємна електроємність провідників) чисельно дорівнює заряду, який треба перенести з одного провідника на інший, щоб змінити різницю потенціалів між провідниками на одиницю:

$$C = \frac{q}{\Delta\phi}. \quad (3.17)$$

*Плоским конденсатором* називають систему, що складається з двох паралельних металевих пластин площею  $S$  кожна, простір між якими товщиною  $d$  заповнено діелектриком з проникністю  $\epsilon$  (рис. 3.21). Ємність плоского конденсатора можна обчислити за його параметрами:

$$C = \frac{q}{\Delta\phi} = \frac{q}{E \cdot d} = \frac{\sigma S}{(\sigma/\epsilon\epsilon_0) \cdot d} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}.$$

Ємність системи паралельно або послідовно з'єднаних конденсаторів визначають за формулами:

$$\tilde{N}_{\text{іаđ}} = \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 + \dots + \tilde{N}_n = \sum_{i=1}^n C_i;$$

$$\frac{1}{C_{\text{ііñë}}} = \frac{1}{\tilde{N}_1} + \frac{1}{\tilde{N}_2} + \dots + \frac{1}{\tilde{N}_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}.$$

### 3.1.12. Енергія електричного поля

Процес зарядки конденсатора можна представити у вигляді процесу послідовного перенесення нескінченно малих порцій заряду  $dq$  з однієї пластини на іншу, в результаті чого одна пластина конденсатора буде заряджатися позитивно, а друга – негативно і між ними буде виникати різниця потенціалів  $\Delta\phi = q/C$ . Робота, яку потрібно буде виконати у наступний момент проти сил поля, дорівнюватиме:

$$dA = \phi dq = \frac{1}{C} q dq.$$

Повна робота із зарядження пластин конденсатора від 0 до заряду  $q$ :

$$A = \int_0^q \frac{1}{C} q dq = \frac{q^2}{2C}.$$

Виконана робота змінює енергію системи. Перерозподіл заряду утворює появу електричного поля, тобто енергія системи збільшується на значення енергії електричного поля, що виникло у конденсаторі.

Таким чином, енергія поля зарядженого конденсатора:

$$W_{\text{конд}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{C\Delta\varphi^2}{2}. \quad (3.18)$$

Об'ємну густину енергії електростатичного поля  $\varpi$  можна обчислити, взявши до уваги, що поле конденсатора однорідне і зосереджене між його обкладками:

$$\varpi = \frac{W}{V} = \frac{C\Delta\varphi^2}{2 \cdot Sd} \cdot \frac{d}{d} = \frac{Cd}{2S} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{d}\right)^2 = C \cdot \frac{d}{2S} \cdot E^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \cdot \frac{d}{2S} \cdot E^2,$$

отже:

$$\varpi = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (3.19)$$

Якщо відома напруженість поля в кожній точці, то повну енергію електричного поля системи зарядів знаходять інтегруванням по об'єму, який займає поле:

$$W_e = \int_V \varpi dV = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} V \int E^2 dV.$$

Очевидно, що повна енергія поля завжди є величиною додатною, оскільки  $E^2 \geq 0$ .

На відміну від повної енергії поля, енергія взаємодії окремих зарядів може бути як додатною, так і від'ємною. Розглянемо систему двох зарядів  $q_1$  і  $q_2$ , що знаходяться на відстані  $r_{12}$ . Потенціальну енергію взаємодії визначимо через роботу розведення зарядів на нескінченність:

$$W_{12} = A_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}}.$$

Очевидно, що у випадку різнойменних зарядів  $W_{12}$  є від'ємною.

Окрім енергії взаємодії між зарядами, кожен з них має власну енергію, затрачену зовнішніми джерелами на створення цього заряду. Енергія зарядженого тіла (провідника):

$$W = \frac{q\Phi}{2}. \quad (3.20)$$

## 3.2. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

### 3.2.1. Електричний струм та його характеристики

*Електричним струмом* називають *направлений рух електричних заряджених частинок (носіїв заряду)*. У цьому розділі розглядатимемо струми провідності. *Струмом провідності* називають *направлений рух вільних носіїв заряду у провідному середовищі*. Струми, які утворюються у процесі руху заряджених тіл, називають *конвекційними*, а короточасні електричні струми, що виникають у діелектричних середовищах внаслідок зміщення зв'язаних зарядів під дією зовнішнього електричного поля – *струмами поляризації*. За напрям струму вважають напрям руху позитивних зарядів. У металах напрям струму є протилежним до напрямку направлено руху електронів.

Основними умовами виникнення струму у провіднику є:

- 1) наявність вільних носіїв заряду,
- 2) створення і підтримання у провіднику електричного поля.

Кількісною мірою електричного струму є сила струму і його густина.

*Сила струму* – скалярна фізична величина, яка чисельно дорівнює електричному заряду, що переноситься через поперечний переріз провідника за одиницю часу:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (3.21)$$

Сила струму вимірюється в А (амперах).

*Густина струму* – векторна фізична величина, що чисельно дорівнює електричному заряду, який переноситься через перпендикулярний до напрямку руху носіїв переріз одиничної площі провідника за одиницю часу:

$$\vec{j} = \frac{d^2 q}{dt \cdot dS} \vec{n} = \frac{dI}{dS} \vec{n}, \quad (3.22)$$

або ж:

$$\vec{j} = \frac{d^2 q}{dt \cdot dS} \vec{n} = \frac{e \cdot dN}{dt \cdot dS} \vec{n} = \frac{e \cdot n_0 \cdot dV}{dt \cdot dS} \vec{n} = \frac{e \cdot n_0 \cdot v_{др} \cdot dt \cdot dS}{dt \cdot dS} \vec{n} = en_0 v_{др} \vec{n},$$

де  $dS$  – площа перерізу провідника;  $n_0$  – концентрація носіїв електричного заряду;  $v_{др}$  – дрейфова (спричинена електричним полем) швидкість носіїв електричного заряду;  $\vec{n}$  – одиничний вектор нормалі до поверхні перерізу провідника.

Густина струму вимірюється в амперах на метр квадратний (А/м<sup>2</sup>).

*Постійним електричним струмом* називають такий струм, значення і напрям якого не змінюються, тобто  $\vec{j} = \text{const}$ . Створити постійний електричний струм можна у замкненому провідному колі, що містить джерело постійного електричного струму (наприклад, гальванічний елемент, генератор електричного струму, термопару, сонячну батарею).

### 3.2.2. Сторонні сили. Електрорушійна сила і напруга

Переміщення позитивних і негативних зарядів у зовнішній частині електричного кола відбувається завдяки кулонівським силам поля у напрямі їхньої компенсації, тобто негативно заряджені частинки рухаються до позитивного полюсу джерела струму, а позитивні – до негативного (рис. 3.22). Всередині джерела струму (внутрішній частині кола) негативні частинки потрібно перемістити від позитивного полюсу до негативного, а позитивні – від негативного до позитивного, що здійснюється завдяки стороннім силам.

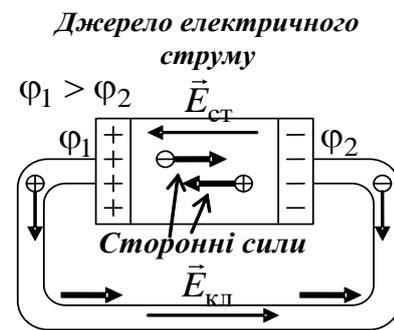


Рис. 3.22

*Сторонніми силами* називають сили неелектростатичної природи, що діють на заряди всередині джерела струму, підтримуючи на його кінцях сталу різницю потенціалів.

Природа і механізми виникнення сторонніх сил є різними у різних джерелах струму – механічна (генератори постійного струму), хімічна

(гальванічні елементи), дифузія носіїв заряду у провідниках (термопара), освітлення поверхні речовин (сонячна батарея) тощо.

Таким чином, у колі постійного струму, окрім електростатичного поля зовнішнього кола напруженістю  $\vec{E}_{\text{кл}}$ , існує електростатичне поле сторонніх сил напруженістю  $\vec{E}_{\text{ст}}$  всередині джерела струму. Значення напруженості поля сторонніх сил визначається силою, що діє з боку сторонніх сил на позитивний одиничний заряд у колі:

$$\vec{E}_{\text{ст}} = \frac{\vec{F}_{\text{ст}}}{q_0}.$$

Результуюча сила, що діє на заряд у колі постійного струму:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{кл}} + \vec{F}_{\text{ст}} = q_0 (\vec{E}_{\text{кл}} + \vec{E}_{\text{ст}}) = q_0 \vec{E}.$$

Якщо напруженість результуючого поля  $\vec{E}$  у провіднику дорівнюватиме нулю, настане рівновага, тобто направленої руху зарядів не буде і струм дорівнюватиме нулю.

Сторонні сили характеризуються роботою, яку вони виконують під час переміщення зарядів по колу або на ділянці кола. **Електрорушійною силою (ЕРС) джерела струму  $\varepsilon$  називають скалярну фізичну величину, що чисельно дорівнює роботі сторонніх сил з переміщення одиничного позитивного заряду по колу:**

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{ст}}}{q_0}, \quad (3.23)$$

де

$$A_{\text{ст}} = q_0 \oint_L (\vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l}). \quad (3.24)$$

З формул (3.23) та (3.24) випливає, що значення ЕРС, яка діє у замкненому колі, дорівнює циркуляції вектора напруженості сторонніх сил по замкненому колу  $L$ :

$$\varepsilon = \oint_L (\vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l}).$$

Тоді на ділянці кола між довільними точками 1 і 2 ЕРС:

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 (\vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l}). \quad (3.25)$$

Напругою  $U$  на ділянці кола 1–2 називають скалярну фізичну величину, що чисельно дорівнює роботі, яку виконують кулонівські і

сторонні сили в процесі переміщення одиничного позитивного заряду із точки 1 у точку 2, відповідно до (3.14) та (3.25):

$$U = \frac{A_{\text{eë}} + A_{\text{ñò}}}{q_0} = q_0 \oint_L (\vec{E}_{\text{eë}} \cdot d\vec{l}) + q_0 \oint_L (\vec{E}_{\text{cò}} \cdot d\vec{l}), \quad (3.26)$$

або напруга на неоднорідній ділянці кола є сумою різниці потенціалів та ЕРС на даній ділянці кола:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12} \quad (3.27)$$

Неоднорідною ділянкою кола називають таку ділянку кола, яка містить джерело струму.

### 3.2.3. Опір провідників

Електричний опір провідника – це скалярна фізична величина, яка є властивістю провідника щодо перешкоджання направленому рухові носіїв заряду вздовж нього. Наявність опору у металевих провідників першого роду пов’язана із розсіюванням енергії електронів провідності на теплову енергію коливань кристалічної ґратки або неоднорідності її структури (домішки, дефекти). Цей опір інакше називають активним, або омичним, оскільки розрізняють ще реактивний (індуктивний і ємнісний) опір у колах змінного струму.

Опір провідника залежить від матеріалу, параметрів (довжини, площі поперечного перерізу) та температури. Для провідника циліндричної форми:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.28)$$

де  $\rho$  – питомий опір матеріалу, з якого виготовлений провідник, вимірюється в Ом·м;  $l$  – довжина провідника;  $S$  – площа поперечного перерізу провідника.

Матеріали з низьким питомим опором широко використовують в електротехніці, оскільки вони є добрими провідниками електричного струму – срібло ( $1,6 \cdot 10^{-8}$  Ом·м), мідь ( $1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м), алюміній ( $2,6 \cdot 10^{-8}$  Ом·м). Через економічні чинники срібло використовують лише для виготовлення високоточних приладів. За радянських часів у будівництві промислових і житлових будівель використовували переважно алюмінієву проводку. Упродовж останніх десятиліть через значне збільшення енергоспоживання побутовою, аудіо-, відео- і

комп'ютерною технікою, вентиляційно-кліматичними, охоронними, автоматизовано-управлінськими, ліфтопідйомних системами фінансово обґрунтованими стало використання мідної проводки з огляду на зменшення енерговитрат та збільшення енергопропускних спроможностей за сталих перерізів провідників.

Величину, обернено пропорційну питомому опору, називають *питомою електричною провідністю матеріалу*  $\sigma = 1/\rho$ , вимірюється вона у сименсах на метр ( $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} = \text{См/м}$ ).

Опір провідника за температури  $t$  °С визначається за формулою:

$$R_{t,^{\circ}\text{C}} = R_{0^{\circ}\text{C}}(1 + \alpha t), \quad (3.29)$$

де  $R_{0^{\circ}\text{C}}$  – опір провідника за 0 °С;  $\alpha$  – температурний коефіцієнт опору (величина, стала для даного матеріалу).

Залежність опору провідників від температури (3.29) пояснюється тим, що у міру підвищення температури збільшуються амплітуда і частота коливань вузлів кристалічної ґратки провідника (основної фізичної причини опору), що зумовлює збільшення ймовірності зіткнень носіїв заряду з ними. За дуже низьких температур, нижчих за критичну

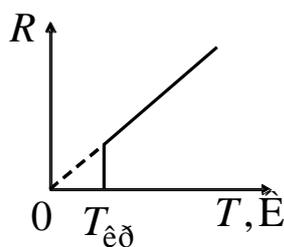


Рис. 3.23

(див. п.2.7.1) ( $\dot{O} \leq \dot{O}_{\epsilon\delta}$ ) спостерігається явище надпровідності – повне зникнення опору матеріалів (рис. 3.23), виявлене вперше Г. Камерлінг-Оннесом для ртуті у 1911 р. Пояснення механізму виникнення явища надпровідності дає квантова фізика.

Явище зміни електричного опору металів залежно від температури є основою для створення *термометрів опору*, які дають змогу вимірювати температуру з точністю до тисячних часток кельвіна. Використання в ролі робочої речовини термометрів опору напівпровідників, виготовлених за спеціальною технологією – *термісторів*, дає можливість фіксувати зміни температури на мільйонні частки кельвіна.

Опір системи паралельно або послідовно з'єднаних провідників визначається за формулами:

$$\frac{1}{R_{i \text{ à } \delta}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}, \quad R_{i \text{ à } \delta} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i.$$

### 3.2.3. Закони Ома

**Закони Ома** дають змогу визначати силу струму в нерозгалужених колах або на їхніх ділянках. Закони названо на честь німецького фізика Г. Ома, який експериментально виявив залежність сили струму в однорідному провіднику від напруги на кінцях цього провідника. Розглянемо закони Ома для різних частин електричного кола.

**Закон Ома для неоднорідної ділянки кола** (рис. 3.24), тобто ділянки, яка містить джерело струму: сила струму прямо пропорційна напрузі на кінцях ділянки кола (3.27) та обернено пропорційна сумарному опору цієї ділянки:

$$I = \frac{U}{R+r} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 \pm \varepsilon}{R+r}, \quad (3.30)$$

де  $\varphi_1 - \varphi_2$  – різниця потенціалів на кінцях ділянки кола,  $\varepsilon$  – електрорушійна сила джерела струму (знак ЕРС залежить від знака роботи, яку виконують сторонні сили. Якщо ЕРС сприяє руху позитивно заряджених частинок в обраному напрямку 1–2, то  $\varepsilon > 0$ . Якщо ЕРС перешкоджає руху позитивно заряджених частинок у цьому напрямку, то  $\varepsilon < 0$ );  $R$  – зовнішній опір, тобто опір всіх інших елементів ділянки кола;  $r$  – внутрішній опір, тобто опір джерела струму.

**Закон Ома для однорідної ділянки кола** (рис. 3.25), тобто ділянки, яка не містить джерела струму, ( $\varepsilon = 0$ ,  $r = 0$ ) в інтегральній формі:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}. \quad (3.31)$$

**Закон Ома замкненого (повного) кола** (рис. 3.26), тобто:

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r}. \quad (3.32)$$

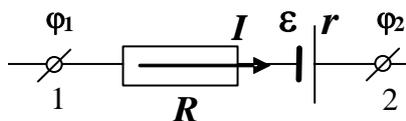


Рис. 3.24

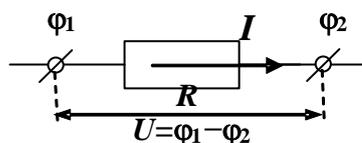


Рис. 3.25

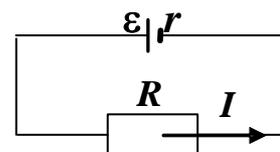


Рис. 3.26

**Закон Ома у диференціальній формі** для однорідної ділянки кола можна вивести з (3.31), (3.28), (3.22) та (3.15):

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}_{\hat{e}\hat{e}} \quad (3.33)$$

де  $j$  – густина струму;  $\sigma$  – питома електропровідність провідника;  $E_{\hat{e}\hat{e}}$  – напруженість електричного поля.

Отже, закон Ома у диференціальній формі для неоднорідної ділянки кола:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E}_{\hat{e}\hat{e}} + \vec{E}_{\hat{n}\hat{o}}) \quad (3.34)$$

Закони Ома в інтегральній формі (3.30), (3.31) та (3.32) застосовуються для розрахунку струму у всьому колі, тоді як закони Ома в диференціальній формі (3.33), (3.34) визначають величини в будь-якій точці електричного кола.

### 3.2.5. Правила Кірхгофа

**Правила Кірхгофа** – закони, за допомогою яких можна визначати силу струму, опір або ЕРС джерела струму на окремих ділянках розгалужених електричних кіл.

Під електричним колом розуміють систему, яка складається із джерел струму (з електрорушійною силою  $\varepsilon$ , опором  $r$ ) і споживачів електричної енергії (з опором  $R$ ), з'єднаних між собою провідниками. Розгалуженим колом називають коло, в якому є точки з'єднання трьох і більше провідників. Точки, в яких сходяться три або більше провідників зі струмами, називають вузлами. Ділянкою розгалуженого кола називають частину контуру між двома вузлами, яка містить джерела струму, резистори або інші елементи кола. По різних ділянках одного контуру проходять різні струми.

**Перше правило Кірхгофа (правило вузлів)** виражає закон збереження заряду і стосується вузлів розгалуженого кола: алгебраїчна сума сил струмів, які сходяться у вузлі, дорівнює нулеві:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0,$$

де  $n$  – кількість ділянок, що сходяться у вузлі.

**Правило знаків:** струми, які входять до вузла, записують зі знаком “+”, а струми, які виходять із нього – зі знаком “-”, тобто сума сил струмів, що входять у вузол, дорівнює сумі сил струмів, що виходять з нього.

**Друге правило Кірхгофа (правило контурів)** є узагальненням закону Ома для довільного контуру розгалуженого електричного кола

(3.32): у замкненому контурі алгебраїчна сума спадів напруг (добутків сил струмів на опори провідних ділянок) дорівнює алгебраїчній сумі електрорушійних сил, які діють у цьому контурі:

$$\sum_{k=1}^n I_k R_k + \sum_{k=1}^m I_k r_k = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k ,$$

де  $n$  – кількість ділянок у контурі;  $m$  – кількість ЕРС у контурі.

*Правила знаків:*

1) якщо обхід контуру відбувається за довільно обраним напрямком, доданки спадів напруг  $\sum_{k=1}^n I_k R_k$  і  $\sum_{k=1}^m I_k r_k$  беруться зі знаком “+”, якщо напрямок обходу контуру збігається з напрямком струму, зі знаком “-”, якщо напрямок обходу контуру протилежний напрямку струму;

2) доданки  $\sum_{k=1}^m \varepsilon_k$  беруться зі знаком “+”, якщо обходити контур за довільно обраним напрямком, тобто джерело струму проходимо від негативного полюсу до позитивного, і зі знаком “-”, якщо джерело проходимо від позитивного полюсу до негативного.

Розв’язуючи задачі, в яких розглядають розгалужені кола, варто дотримуватись певної послідовності дій.

1. На всіх ділянках схеми розгалуженого кола довільно позначити стрілками напрям струму.

2. Записати за першим правилом Кірхгофа кількість  $n-1$  рівнянь відповідно до правила знаків.

3. Довільно обрати напрям кожного простого контуру, наприклад, за рухом годинникової стрілки.

4. Записати за другим правилом Кірхгофа кількість  $p-(n-1)$  рівнянь відповідно до правила знаків, де  $p$  – кількість ділянок кола. Обійти кожен контур треба двічі, перший раз – записуючи ліву частину рівняння відповідно до правила знаків, а другий раз – праву частину рівняння.

5. Перевірити, щоб усі електрорушійні сили й опори входили в отриману систему рівнянь, а кількість рівнянь дорівнювала кількості різних сил струмів у розгалуженому колі. Якщо внаслідок обчислення деякі сили струмів матимуть знак “-”, то це означає, що їхні справжні напрями протилежні напрямам, позначеним на схемі.

### 3.2.6. Робота і потужність електричного струму.

#### Закон Джоуля – Ленца

Під час перенесення заряду  $dq$  ділянкою однорідного провідника виконується елементарна робота  $dA$  (3.8):

$$dA = Udq.$$

З (3.12) можна отримати  $dq = Idt$ , тоді:

$$dA = I \cdot U \cdot dt.$$

За постійного струму силою  $I$  за скінченний проміжок часу  $t$  робота електричного струму на зовнішній ділянці кола:

$$A = IU \int_0^t dt = IUt.$$

На підставі закону Ома для однорідної ділянки кола (3.31) робота електричного струму на зовнішній ділянці кола:

$$A = IUt = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (3.35)$$

Якщо струм з часом змінюється,  $I = f(t)$ , то робота струму за час  $t$ :

$$A = \int_0^t I^2(t) R dt.$$

Оскільки ЕРС джерела струму чисельно дорівнює роботі, що виконується в процесі перенесення одиничного заряду по замкненому колу, то за постійного струму силою  $I$  за час  $t$  повна робота дорівнюватиме:

$$A_{\text{всього}} = \varepsilon \cdot q = \varepsilon \cdot It = \frac{\varepsilon^2 t}{R + r}.$$

**Потужністю електричного струму** називають скалярну фізичну величину, що чисельно дорівнює роботі, яку виконує струм за одиницю часу:

$$P = \frac{A}{t}.$$

Корисна потужність у зовнішній частині кола з опором  $R$  за постійного струму з (3.35) становитиме:

$$P = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}, \quad (3.36)$$

або відповідно до закону Ома для замкненого кола (3.32) *повна потужність* на зовнішній і внутрішній частинах електричного кола:

$$P_{i\hat{a}} = \varepsilon \cdot I = \frac{\varepsilon^2}{R + r}.$$

Потужністю в 1 *ват* (1 Вт) характеризують такий струм, під час проходження якого через провідник щосекунди виділяється енергія в 1 *Дж* – 1 *Вт* = 1 *Дж*/1 *с*.

На практиці використовують також позасистемні одиниці роботи струму: ват-година (*Вт·год*) і кіловат-година (*кВт·год*). 1 *Вт·год* – це робота електричного струму потужністю 1 *Вт* протягом 1 *год*.

*Коефіцієнт корисної дії джерела струму* визначають відношенням корисної потужності до загальної потужності джерела:

$$\eta = \frac{P}{P_{i\hat{a}}} = \frac{R}{R + r}.$$

У разі проходження струму по нерухомому провіднику, в якому не відбуваються хімічні перетворення, робота струму перетворюється у внутрішню енергію провідника. Це положення експериментально виявив Дж. Джоуль у 1841 р. і на дослідах підтвердив Е. Ленц у 1842 р., тому воно формулюється як *закон Джоуля – Ленца*: *кількість теплоти, що виділяється у провіднику під час проходження по ньому постійного електричного струму, прямо пропорційна добуткові квадрата сили струму, опору провідника і часу проходження струму*:

$$Q = I^2 R t. \quad (3.37)$$

Якщо струм змінюється з часом, то

$$Q = \int_0^t I^2(t) R dt.$$

Ці формули виражають сумарну (інтегральну) кількість теплоти, що виділяється у провіднику опором *R*.

Виразимо кількість теплоти, яка виділяється на окремих ділянках провідника через локальні характеристики провідника та електричного поля в ньому, виділивши всередині провідника елементарний об'єм у вигляді циліндра, відповідно до (3.37), (3.22), (3.28):

$$dQ = I^2 dR dt = (j dS)^2 \rho \frac{dl}{dS} dt = j^2 \rho dV dt.$$

Кількість теплоти, що виділяється в одиниці об'єму провідника за одиницю часу, називають питомою потужністю струму:

$$\bar{\omega} = \frac{dQ}{dV dt}.$$

Використовуючи закон Ома для однорідної ділянки кола у диференціальній формі (3.33), одержимо вираз закону Джоуля – Ленца у диференціальній формі:

$$\bar{\omega} = \sigma \vec{E}_{\text{е}}^2$$

Тепловий ефект електричного струму використовується у лампах розжарювання, побутових нагрівних приладах (нагрівачах води, обігрівачах, плитах, прасках, чайниках, пральних машинах), запобіжниках, промислових муфельних пічках, під час контактного електрозварювання.

### 3.3. МАГНІТОСТАТИКА

#### 3.3.1. Магнітне поле. Вектор індукції магнітного поля.

##### *Силі лінії магнітного поля*

Магнітні властивості речовини були відомі людству давно, ще понад 2000 років до нашої ери. Стародавні китайці використовували магніти як компас. Глибоке фізичне дослідження магнітів та їхніх властивостей відбулося лише в XIX столітті. Дослідним шляхом виявлено, що магніти мають два неподільні полюси  $N$  і  $S$ , однойменні полюси відштовхуються, а різнойменні притягуються. Взаємодія магнітів відбувається через магнітне поле. У 1820 році датський фізик Х. Ерстед довів, що магнітне поле виникає також навколо провідника, по якому протікає електричний струм. Магнітна стрілка, розміщена поряд з провідником, під час пропускання по ньому електричного струму повертається і намагається установитися перпендикулярно до провідника. Унаслідок зміни напрямку струму у провіднику на протилежний, змінюється напрям дії сили на стрілку. У міру віддалення від провідника орієнтуюча дія зменшується. У цьому ж році А. Ампер встановив, що два паралельні провідники, по яких течуть

струми одного напрямку, притягуються один до одного, різного напрямку – відштовхуються. Слід відзначити, що на відміну від електричного поля, яке діє як на нерухомі, так і на рухомі електрично заряджені частинки і тіла розташовані в ньому, магнітне поле діє лише на рухомі електрично заряджені частинки і тіла.

*Магнітне поле* – це складова електромагнітного поля, що є особливою формою матерії, через яку відбувається магнітна взаємодія, виникає навколо рухомих заряджених частинок, провідників зі струмом, магнітів або тіл, що мають магнітні властивості, діє на ці об'єкти, а також спричиняється змінним у часі електричним полем.

Силовою характеристикою магнітного поля є вектор індукції магнітного поля  $\vec{B}$ . Визначення вектора індукції магнітного поля може бути дане трьома рівноправними способами (див. п.п. 3.3.2, 3.3.5, 3.3.7):

- 1) за дією магнітного поля на елемент струму;
- 2) за оберտальною дією магнітного поля на рамку зі струмом;
- 3) за дією магнітного поля на рухоми заряджену частинку.

Отже, *індукція магнітного поля*  $\vec{A}$  – це векторна фізична величина, що є силовою характеристикою магнітного поля, чисельно рівна силі з якою магнітне поле діє на провідник одиничної довжини, по якому тече струм силою в 1 А, коли він розташований перпендикулярно до лінії індукції магнітного поля:

$$|\vec{B}| = \frac{F}{I \cdot \sin \alpha},$$

Або *індукція магнітного поля*  $\vec{B}$  – це векторна фізична величина, що є силовою характеристикою магнітного поля, чисельно рівна силі з якою магнітне поле діє на одиничний позитивний заряд, що рухається з одиничною швидкістю перпендикулярно до лінії індукції магнітного поля:

$$|\vec{B}| = \frac{F}{q v \cdot \sin \alpha}$$

Або ж *індукція магнітного поля*  $\vec{B}$  – це векторна фізична величина, що є силовою характеристикою магнітного поля, чисельно рівна максимальному обертальному моменту, що діє на рамку одиничної площі по якій тече струм одиничної силою:

$$|\vec{B}| = \frac{I_{\max}}{IS}$$

Одиницею індукції магнітного поля є 1 Тл (тесла):  
 1 Тл = 1 Н/(1 А·1 м).

Для графічного зображення магнітного поля користуються лініями магнітної індукції. **Лініями магнітної індукції (силовими лініями магнітного поля)** називають криві, дотичні до яких у кожній точці збігаються з напрямом вектора  $\vec{B}$  у цих точках. Числове значення вектора визначає щільність ліній магнітної індукції на одиницю площі. Силкові лінії постійного магніту беруть початок на північному полюсі і закінчуються на південному полюсі (рис.3. 27). Силкові лінії провідника зі струмом мають вигляд концентричних кіл (рис. 3.28).

Напрямок ліній магнітної індукції (вектора індукції магнітного поля  $\vec{B}$ ) визначають за **правилом “правого” гвинта (свердлика)**: якщо поступальний рух гвинта з правою нарізкою збігається з напрямом струму, то напрям обертального руху ручки гвинта вкаже напрям ліній магнітної індукції (рис. 3.29).

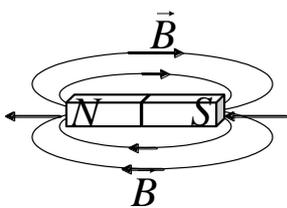


Рис. 3.27

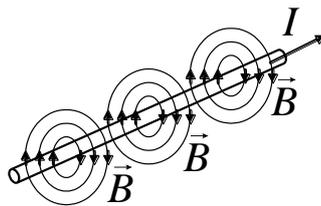


Рис. 3.28

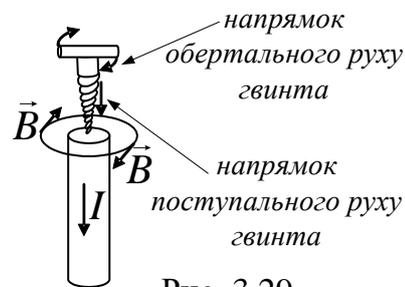


Рис. 3.29

Найчастіше розглядають однорідні поля. **Однорідним магнітним полем** називають таке поле, індукція якого постійна за значенням і напрямом у кожній точці простору ( $\vec{B} = \text{const}$ ). Силкові лінії такого поля мають вигляд паралельних прямих з однаковою щільністю.

Розділ магнетизму, що вивчає стаціонарні (незмінні з часом) магнітні поля, називають **магнітостатикою**.

### 3.3.2. Закон Ампера

Основні принципи побудови теорії стаціонарних магнітних полів подібні до принципів побудови електростатики. За аналогією з пробним зарядом  $dq$  в електростатиці, під час вивчення магнетизму вводять абстрактне поняття – пробний елемент струму.

Елементом струму називають векторну величину  $I d\vec{l}$ , що чисельно дорівнює добуткові сили струму  $I$  в провіднику на вектор елемента провідника  $d\vec{l}$ , направлений уздовж напрямку струму. Елемент струму не лише утворює у просторі навколо себе магнітне поле, а й зазнає силового впливу з боку зовнішніх магнітних полів.

Основним експериментальним законом магнетизму є **закон Ампера**: сила  $d\vec{F}_A$ , з якою зовнішнє магнітне поле діє на розміщений у ньому елемент провідника зі струмом, дорівнює векторному добутку елемента струму  $I d\vec{l}$  на вектор індукції магнітного поля  $\vec{A}$  (рис. 3.30):

$$d\vec{F}_A = [I d\vec{l} \cdot \vec{B}]. \quad (3.38)$$

Напрямок сили визначають за правилом векторного добутку. Але для зручності часто використовують **правило лівої руки**: якщо ліву руку розмістити так, щоб лінії індукції магнітного поля входили в долоню, а чотири випрямлених пальці збігалися з технічним напрямом струму в провіднику, то відхилений під прямим кутом великий палець вкаже напрям сили Ампера.

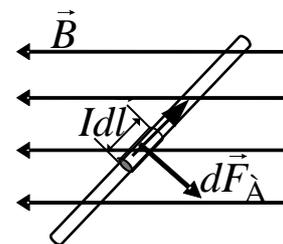


Рис. 3.30

Сила, з якою магнітне поле впливатиме на розміщений у ньому провідник, буде визначатись інтегруванням виразу значення сили Ампера по всій довжині провідника:

$$\vec{F}_A = \int_0^l d\vec{F}_A.$$

### 3.3.3. Закон Біо – Савара – Лапласа. Магнітне поле прямого та колового провідників зі струмом. Взаємодія струмів

Досліджуючи магнітне поле провідників зі струмом заданої конфігурації, французькі вчені Ж. Біо і Ф. Савар експериментально визначили, що індукція магнітного поля  $\vec{B}$  складним чином залежить від розмірів і конфігурації провідника, завжди пропорційна силі струму  $I$ , що протікає у ньому та зменшується у міру віддалення точки спостереження від провідника. Французький астроном, математик і

фізик П. Лаплас теоретично узагальнив ці експериментальні факти і вивів математичні формули, розрахунки за якими завжди збігалися з емпіричними вимірюваннями індукції магнітного поля  $\vec{B}$ .

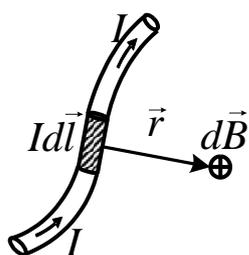


Рис. 3.31

Закон, що дає змогу визначити величину індукції магнітного поля  $d\vec{B}$ , яку створює у деякій точці простору елемент провідника  $d\vec{l}$  із постійним струмом  $I$  (рис. 3.31), дістав назву **закону Біо – Савара – Лапласа**:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}, \quad (3.39)$$

або у скалярному вигляді:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2},$$

де  $r$  – відстань від елемента провідника зі струмом  $I dl$  до точки простору, у якій визначається індукція магнітного поля;  $\alpha$  – кут між векторами  $I d\vec{l}$  та  $\vec{r}$ ,  $\mu_0$  – магнітна стала ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м);  $\mu$  – магнітна проникність середовища, яка показує, у скільки разів індукція магнітного поля у середовищі більша, ніж у вакуумі.

За цим законом можна розрахувати індукцію магнітного поля провідника зі струмом довільної конфігурації, застосувавши **принцип суперпозиції магнітних полів**: вектор індукції магнітного поля  $\vec{B}$ , створений провідником у вибраній точці простору, дорівнює векторній сумі індукцій  $d\vec{B}$ , що створюються окремими елементами цього струму в даній точці:

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B}. \quad (3.40)$$

Інтегрування здійснюється вздовж усього провідника.

Для розрахунку індукції магнітного поля  $\vec{B}$  провідників зі струмом різних конфігурацій у довільних точках простору використовують формулу, що об'єднує закон Біо Савара Лапласа (3.39) та принцип суперпозиції магнітних полів (3.40):

$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} \quad \text{або} \quad \vec{H} = \int_L \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}, \quad (3.41)$$

де  $\vec{H}$  – *напруженість магнітного поля* – характеристика, що не залежить від магнітних властивостей середовища, в якому знаходиться провідник:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}.$$

Одиницею вимірювання напруженості магнітного поля є 1 А/м.

Розглянемо приклади застосування закону Біо Савара Лапласа для розрахунку індукції магнітного поля провідників конфігурацій, що трапляються найчастіше.

*Приклад 1.* Визначимо індукцію магнітного поля у центрі колового провідника радіуса  $R$ , по якому проходить струм силою  $I$ .

Зважаючи на те, що всі ділянки провідника у центрі колового витка створюватимуть елементарні значення індукції магнітного поля  $d\vec{B}$  одного напрямку (рис .3.32), запишемо (3.41) у скалярному вигляді:

$$B = \int_L \frac{\mu\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2},$$

де  $r$  – відстань від елемента провідника до точки визначення індукції магнітного поля, дорівнює радіусу кола  $r = R$ ;  $L$  – довжина колового витка,  $L = 2\pi R$ ;  $\alpha$  – кут між елементом провідника  $dl$  і радіусом кола, тому  $\alpha = \pi/2$ , а  $\sin\alpha = 1$ .

Тоді:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R.$$

Отже, індукція магнітного поля у центрі колового провідника дорівнюватиме:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}.$$

*Приклад 2.* Визначимо індукцію магнітного поля на відстані  $a$  від прямолінійного провідника, по якому тече струм силою  $I$ .

Щоб визначити індукцію магнітного поля провідника зі струмом у точці  $O$ , розіб'ємо провідник на нескінченно малі ділянки довжиною  $d\vec{l}$ . Вектори індукції магнітного поля у точці  $O$ , що створює кожна елементарна ділянка провідника, спрямовані в один бік вздовж однієї прямої

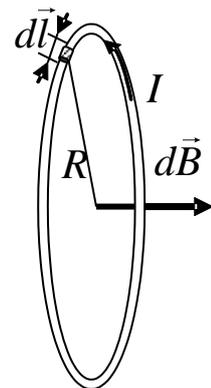


Рис. 3.32

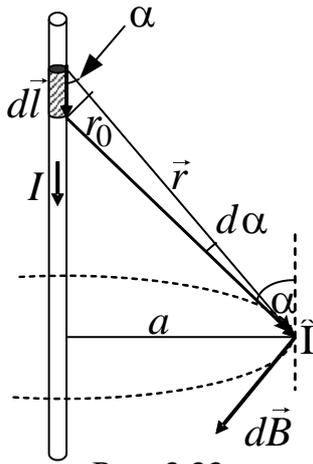


Рис. 3.33

перпендикулярно до площини рис. 3.33 до нас. Тому результуюча індукція магнітного поля всіх елементів струму  $I dl$  (3.41) у точці O буде:

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0^2 dl \sin \alpha}{4\pi r^2}. \quad (3.42)$$

Оскільки відстань від елемента провідника  $r$  до точки O залежить від кута  $\alpha$ , перейдемо до однієї змінної (рис. 3.33):

$$r = \frac{a}{\sin \alpha} \quad \text{та} \quad dl = \frac{r_0}{\sin \alpha}.$$

Відстань  $r_0$  замінимо елементом дуги радіуса  $r$ , яка спирається на нескінченно малий центральний кут  $d\alpha$  ( $r_0 \approx r d\alpha$ ):

$$dl \approx \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{\sin \alpha}.$$

Підставимо отримані значення  $r$  і  $dl$  у (3.42):

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0^2 \left( \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{\sin \alpha} \right) \sin \alpha}{4\pi \left( \frac{a}{\sin \alpha} \right)^2} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \sin \alpha d\alpha.$$

Після інтегрування маємо, що індукція магнітного поля на відстані  $a$  від прямолінійного провідника зі струмом скінченної довжини дорівнює:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Якщо провідник нескінченно довгий, тобто  $\alpha_1 \rightarrow 0$ , а  $\alpha_2 \rightarrow \pi$ , то індукція магнітного поля нескінченно довгого прямолінійного провідника із струмом на відстані  $a$  дорівнюватиме:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi a}. \quad (3.43).$$

Провідники, по яких проходять електричні струми, взаємодіють один з одним через власні магнітні поля. Цю силу взаємодії можна визначити, поєднуючи закон Ампера (3.38) із законом Біо – Савара – Лапласа (3.39). Нехай елемент струму  $I_1 dl_1$  у точці O, що знаходиться на відстані  $r$ , створює магнітне поле індукцією:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 [d\vec{l}_1 \times \vec{r}]}{r^3}. \quad (3.44)$$

З іншого боку, на елемент струму  $I_2 dl_2$ , поміщений у точку О, за законом Ампера, діятиме сила з боку магнітного поля, що створюється елементом струму  $I_1 dl_1$ :

$$d\vec{F}_{12} = [I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}]. \quad (3.45)$$

Підставимо (3.44) у (3.45) та отримаємо загальний закон Ампера у векторній формі:

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[I_2 d\vec{l}_2 \times [I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}]]}{r^3}.$$

Застосовуючи закон Ампера для двох нескінченно довгих прямолінійних паралельних провідників, можна отримати силу взаємодії, що припадає на одиницю їхньої довжини:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{r}, \quad (3.46)$$

де  $r$  – відстань між провідниками.

Застосовуючи правило свердлика та правило лівої руки, можна визначити, що провідники з однаковим напрямом струмів взаємно притягуються, а з різним – відштовхуються.

Вивчення взаємодії двох прямих паралельних провідників зі струмом сталої величини (3.46) дає можливість визначити одиницю сили струму, яка є однією з основних одиниць системи СІ. *1 Ампер* – це сила постійного електричного струму, який тече по двох нескінченно довгих провідниках малого перерізу, розміщених у вакуумі на відстані 1 м один від одного та спричиняє взаємодію між ними силою  $2 \cdot 10^{-7}$  Н/м.

### 3.3.4. Закон повного струму, магнітне поле соленоїду.

#### **Вихровий характер магнітного поля**

Циркуляцією вектора індукції магнітного поля називається інтеграл по замкненому контуру  $L$  скалярного добутку  $\vec{B}$  на елемент його довжини  $d\vec{l}$ :

$$\varepsilon_m = \oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \oint_L B \cdot dl \cdot \cos \alpha, \quad (3.47)$$

де  $\alpha$  – кут між вектором  $\vec{B}$  і напрямком елемента  $d\vec{l}$ .

Знайдемо циркуляцію вектора індукції магнітного поля прямого провідника зі струмом  $I$  (рис. 3.34) вздовж замкненої лінії – кола радіусом  $R$ . Підставимо (3.43) у (3.47):

$$\oint_L B dl \cos \alpha = \oint_L \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R} dl.$$

Оскільки  $\cos \alpha = \cos(\vec{r}; d\vec{l}) = \cos 0^\circ = 1$  (рис. 3.34), то

$$\oint_L B dl = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} dl \quad \text{або} \quad \oint_L B dl = \frac{\mu\mu_0 I 2\pi R}{2\pi R}.$$

Отже: 
$$\oint_L B dl = \mu\mu_0 I. \quad (3.48)$$

Вираз (3.48) справедливий для провідників будь-якої конфігурації незалежно від природи струму та форми замкненого контуру, який охоплює струм. Із виразу (3.48) випливає, що:

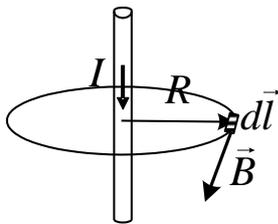


Рис. 3.34

$$\oint_L B dl \neq 0. \quad (3.50)$$

Силоне поле, напруженість якого задовольняє умову (3.50), називається *не потенціальним*, або *вихровим*. Лінії напруженості магнітного поля не мають ні початку, ні кінця – вони завжди замкнені. Цим пояснюється те, що в природі немає магнітних зарядів. У цьому полягає істотна відмінність магнітного поля від електростатичного.

З електродинаміки відомо (див. п. 3.1.7), що циркуляція вектора сторонніх сил дорівнює ЕРС джерела. Тому циркуляцію вектора напруженості магнітного поля вздовж замкненого контуру називають (3.47) *магніторушійною силою*  $\varepsilon_m$ .

Якщо контур довжиною  $L$  охоплює  $n$  провідників зі струмом, то для них можна сформулювати **закон повного струму**, або **теорему про циркуляцію вектора індукції магнітного поля по замкненому контуру**: циркуляція вектора індукції магнітного поля постійних струмів по довільному замкненому контуру дорівнює алгебраїчній сумі

сил струмів, які охоплюються цим контуром, помноженій на магнітну сталу і магнітну проникність середовища:

$$\oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \mu\mu_0 \sum_{z=1}^n I_z, \quad (3.51)$$

де  $\sum_{z=1}^n I_z$  – алгебраїчна сума струмів, які охоплюються цим контуром.

Застосовуючи закон повного струму потрібно брати до уваги *правило знаків*: якщо напрямок обходу контуру збігається з напрямком обертального руху свердлика (правого гвинта), то охоплені контуром струми, напрями яких збігаються із напрямком поступального руху свердлика, записують із знаком «+», а ті, що не збігаються – із знаком «-».

Закон повного струму (3.51) і закон Біо – Савара – Лапласа (3.41) застосовують для обчислення індукції магнітного поля, яку створюють провідники зі струмом. Закон Біо – Савара – Лапласа застосовують у тому випадку, коли поле створене провідником довільної форми і легко провести інтегрування вздовж провідника довжиною  $l$ . Для розрахунку індукції магнітного поля системи декількох провідників зі струмом застосовують закон повного струму, довільно обираючи контур симетричної форми з метою спрощення інтегрування.

Прикладом застосування закону повного струму є розрахунок індукції магнітного поля на осі довгого соленоїда довжиною  $L$  з кількістю  $N$  витків, по яких тече струм силою  $I$  (рис. 3.35). Напрямок струму в соленоїді позначено точками – «до нас», хрестики – «від нас».

Оберемо замкнений контур інтегрування 12341 і запишемо вираз для циркуляції вектора  $\vec{B}$  з (3.51):

$$\oint_{12341} \vec{B} d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum_{k=1}^N I_k. \quad (3.52)$$

Циркуляцію вектора  $\vec{B}$  по замкненому контуру можна подати у вигляді чотирьох доданків:

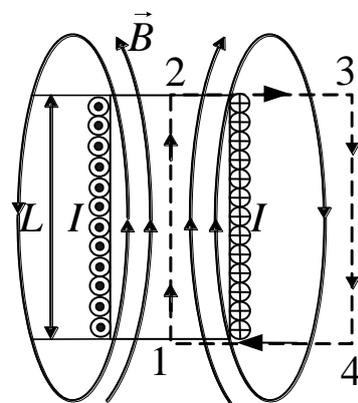


Рис. 3.35

$$\oint_{12341} \vec{B} d\vec{l} = \int_{12} B dl \cos \underbrace{\left( \vec{B}, d\vec{l} \right)}_{=0} + \int_{23} B dl \cos \underbrace{\left( \vec{B}, d\vec{l} \right)}_{\approx 90^\circ} + \int_{34} B dl \cos \left( \vec{B}, d\vec{l} \right) + \int_{41} B dl \cos \underbrace{\left( \vec{B}, d\vec{l} \right)}_{\approx 90^\circ},$$

$$\oint_{12341} \vec{B} d\vec{l} = \int_{12} B dl = B \int_L dl = BL. \quad (3.53)$$

Оскільки обраний контур охоплює  $N$  витків, по кожному з яких

тече струм силою  $I$ , то:

$$\sum_{k=1}^N I_k = NI.$$

Підставляючи у закон повного струму (3.52) отримані вирази циркуляції вектора  $\vec{B}$  (3.53) і суми сил струмів, матимемо:

$$B = \mu\mu_0 \frac{NI}{L} = \mu\mu_0 nI, \quad (3.45)$$

де  $n$  – кількість витків соленоїда на одиницю довжини.

Явище виникнення магнітного поля навколо провідників зі струмом використовують для виготовлення *електромагнітів* – пристроїв, здатних створювати власні магнітні поля під час проходження електричного струму у витках обмотки. Звичайно електромагніт складається з обмотки і феромагнітного осердя, який набуває властивостей магніту під час проходження по обмотці струму. На рис. 3.36 наведено найпростіший електромагніт – електропровід в ізоляції, намотаний навколо феромагнітного осердя). В електромагнітах, призначених, насамперед, для створення механічного зусилля, є також якір (рухома частина магнітопроводу), що передає зусилля.

Широкого застосування електромагніти набули в електромагнітних механізмах, що здійснюють поступально-поворотні рухи чи гальмувальні процеси це вантажопідйомні електромагніти (рис. 3.37), металорізальні верстати, магнітні замки, релейні та пускові



Рис. 3.36



Рис. 3.37

пристрої, механізми автоматичного вимикання, гальмові пристрої тощо.

Електромагніти використовуються там, де потрібне магнітне поле, яке можна швидко і легко

змінити, наприклад, у побутових приладах (телевізор, магнітофон, електробритва), у пристроях техніки зв'язку (телефон, телеграф, радіо), в електричних машинах (електрогенератори та електродвигуни), у пристроях промислової автоматики (пускачі, перемикачі, реле та інше), в електромагнітних сепараторах для очищення механічних сумішей від магнітних предметів.

### 3.3.5. Контур зі струмом у магнітному полі

*Контуром зі струмом* називають замкнений провідник, по якому тече електричний струм.

Розглянемо прямокутний контур з постійним струмом  $I = \text{const}$ , розміщений в однорідному магнітному полі паралельно лініям індукції (рис. 3.38). Магнітне поле діє на кожну сторону рамки, напрями сил Ампера показано на рис. 3.38. Оскільки сторони 2 і 4 розміщені паралельно до ліній індукції магнітного поля, то  $\vec{F}_2 = 0$  і  $\vec{F}_4 = 0$ , а сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_3$  утворюють пару сил, які створюють обертальний момент навколо вертикальної осі, що проходить через центр рамки. Тоді з (3.38) маємо:

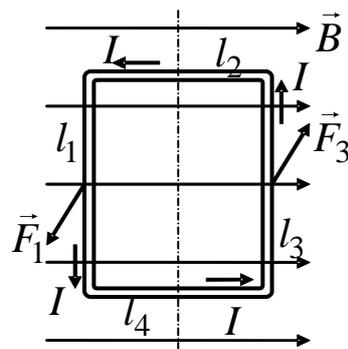


Рис. 3.38

де  $l_1 = l_2$  – довжина бічних сторін рамки (рис. 3.38).

Обертальний момент сил, що діють на контур зі струмом:

$$M = 2F_1 \frac{l_2}{2} \sin \varphi = IB l_1 l_2 \sin \varphi, \quad M = IB S \sin \varphi,$$

де  $S = l_1 l_2$  – площа рамки;  $\varphi$  – кут між напрямком сили  $\vec{F}_1$  й елементом струму.

*Магнітним моментом контуру зі струмом* (рис. 3.39) називають векторну фізичну величину, чисельно рівну добутку сили струму в контурі на площу рамки і на одиничний вектор нормалі, проведений до площини рамки (напрям вектора  $\vec{n}$  визначають за правилом правого гвинта відносно напрямку струму у контурі):

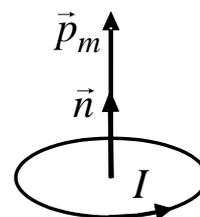


Рис. 3.39

$$\vec{P}_m = IS \vec{n}. \quad (3.46)$$

Тоді в загальному вигляді обертальний момент сил, що діють на контур зі струмом:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]. \quad (3.47)$$

Обертальний момент сил максимальний, якщо  $\vec{p}_m \perp \vec{B}$  (площина рамки розміщена вздовж ліній індукції магнітного поля) і дорівнює нулю, коли  $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$ . Вміщений у магнітне поле контур зі струмом під дією обертального моменту буде намагатися прийняти таке положення, щоб вектори  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$  стали паралельними й однаково направленними. Таке положення відповідає стійкій рівновазі.

Якщо площина контуру зі струмом перпендикулярна лініям індукції магнітного поля, то  $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$  (на рис. 3.40 точками позначено напрям вектора  $\vec{B}$  на нас). Сила Ампера, яка у цьому разі діє на кожну сторону контуру зі струмом, лежить у площині контуру і, залежно від взаємного напрямлення  $\vec{B}$  та  $I$ , буде спрямована назовні або всередину контуру. Тобто контур зі струмом під дією цих сил або розтягуватиметься, або стискуватиметься, але обертальний момент дорівнюватиме нулю.

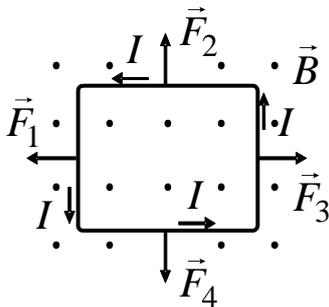


Рис. 3.40

Плоский контур зі струмом у неоднорідному магнітному полі, окрім обертальної дії та деформації, зазнає ще й додаткових дій, що зумовлюють переміщення контуру в бік збільшення або зменшення

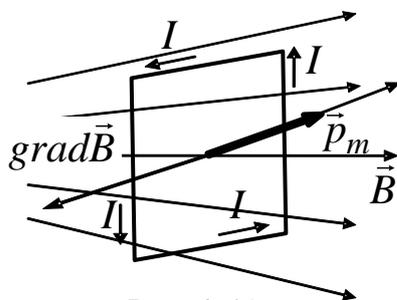


Рис. 3.41

магнітної індукції  $\vec{B}$  залежно від напрямку струму  $I$ . У випадку, зображеному на рис. 3.41, контур втягуватиметься в ділянку збільшення індукції  $\vec{B}$  магнітного поля (переміщуватиметься ліворуч). Результуюча сила, з якою магнітне поле втягує або виштовхує контур зі струмом:

$$\vec{F} = \text{grad} (\vec{p}_m \cdot \vec{B}) = -\text{grad} W_i,$$

де  $W_i = -(\vec{p}_m \cdot \vec{B})$  – потенціальна енергія контуру зі струмом у магнітному полі.

Контури зі струмом використовують у приладах для вимірювання індукції  $\vec{B}$  магнітного поля за відомим значенням обертального моменту сил, застосовуючи формулу (3.47).

### 3.3.6. Робота під час переміщення провідника і контуру зі струмом у магнітному полі

На незакріпленій провідник довжиною  $l$ , по якому тече струм силою  $I$  (наприклад, одна із сторін контуру може ковзати по двох сусідніх, рис. 3.42), однорідне магнітне поле індукцією  $\vec{B}$  діє із силою Ампера (3.38).

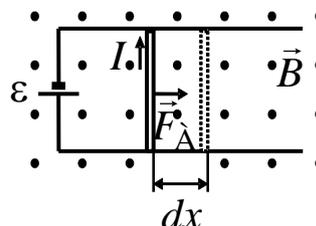


Рис. 3.42

Магнітне поле, переміщуючи провідник під дією сили  $\vec{F}$  на відстань  $dx$ , виконає елементарну роботу:

$$dA = F dx \underbrace{\cos \left( \vec{F}, \hat{d\vec{x}} \right)}_{=1} = IlB_n dx = IB_n dS = Id\hat{O},$$

де  $d\hat{O}$  – зміна магнітного потоку, що перетинає контур.

Магнітним потоком, або потоком вектора індукції магнітного поля, називають скалярну фізичну величину, що дорівнює скалярному добутку вектора індукції магнітного поля на площу контуру, яку пронизують лінії індукції:

$$\hat{O} = (\vec{B} \cdot \vec{S}) = BS \cos \alpha, \quad (3.48)$$

де  $\alpha$  – кут між вектором нормалі до поверхні  $\vec{n}$  і вектором  $\vec{B}$ .

Одиницею вимірювання магнітного поля є 1 Вб (вебер):  
 $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$ .

У разі довільного переміщення провідника зі струмом у магнітному полі повна робота обчислюється за формулою:

$$A = \int_{\hat{O}_1}^{\hat{O}_2} Id\hat{O} = I(\hat{O}_2 - \hat{O}_1) = I\Delta\hat{O},$$

тобто чисельно дорівнює добуткові сили струму на зміну магнітного потоку крізь площу поверхні, яку описує провідник, переміщуючись у

магнітному полі.

Обертаючи контур зі струмом  $I$  під дією пари сил на кут  $d\varphi$ , магнітне поле виконує елементарну роботу

$$dA = (\vec{M} \cdot d\vec{\varphi}) = -M \cdot d\varphi,$$

де  $\vec{M}$  – обертальний момент сил, з яким магнітне поле діє на контур зі струмом (3.40), намагаючись зменшити кут  $d\varphi$  між вектором нормалі контуру  $\vec{n}$  і вектором індукції магнітного поля  $\vec{B}$ ; знак “–” вказує на зменшення кута за повернення контуру у положення стійкої рівноваги.

Повна робота щодо повороту контуру від кута  $\varphi_1$  до кута  $\varphi_2$ :

$$\begin{aligned} A &= - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot d\varphi = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p_m B \sin \varphi d\varphi = -p_m B (-\cos \varphi) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \\ &= -ISB (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) = I (BS \cos \varphi_2 - BS \cos \varphi_1) = I \Delta \hat{O}. \end{aligned}$$

Тобто робота під час переміщення провідника або контуру зі струмом у магнітному полі завжди може бути обчислена як

$$A = I \Delta \hat{O}. \quad (3.49)$$

Якщо магнітний потік, що пронизує замкнений провідник зі струмом, зростає, то  $\Delta \hat{O} > 0$ , відповідно  $A > 0$ , тобто робота виконується за рахунок джерела струму контуру – на цьому явищі ґрунтується принцип дії електродвигунів. Якщо  $\Delta \hat{O} < 0$ ,  $A < 0$ , це означає, що робота виконується завдяки зовнішнім силам і джерело може накопичувати енергію – принцип дії генераторів струму.

*Електродвигуни* – пристрої, що перетворюють електричну енергію у механічну. Складаються з обертової частини (ротора) та нерухомої (статора). Причиною обертання ротора електродвигуна є обертальний момент, що виникає внаслідок взаємодії магнітного поля статора з обмоткою ротора, по якій тече струм.

Розрізняють електродвигуни постійного та змінного струму. Електродвигуни постійного струму застосовують в електротягових і підіймальних пристроях, в електроприводі з широким діапазоном регулювання швидкості (електрозварювальні установки, електропривод баштових кранів тощо). Електродвигуни змінного струму поділяють на синхронні та асинхронні. Синхронні електродвигуни застосовують у нерегульованому електроприводі промислових установок (насосів,

компресорів, повітродувок, млинів різного призначення, прокатних станів, дизель-генераторних установок та ін.). На асинхронні двигуни припадає близько 90-95% від загальної кількості електродвигунів через їхню простоту, високу надійність в експлуатації, малі габаритні розміри і низьку вартість. За функціональним призначенням асинхронних електродвигунів розрізняють загальнопромислові, кранові, вибухобезпечні, ліфтові, екскаваторні. Вони є частиною електроприводу побутових приладів, електроінструменту, металорізальних верстатів, ковальсько-пресових машин, насосів, вентиляторів, компресорів, транспортних та підйимально-транспортних засобів (конвеєрів, ескалаторів, будівельних розвантажувальних і навантажувальних машин, кранів, підйомників і люльок, шахтних та ліфтових підйимальних установок тощо). Потужність електродвигунів становить від десятих часток до десятків мегават.

На рис. 3.43 зображено електродвигуни різної потужності – у порівнянні з батарейкою «Крона». Електродвигуни мають значну перевагу порівняно з іншими видами двигунів (паровими, внутрішнього згорання). Вони екологічно чисті – під час роботи не виділяють шкідливих газів, диму або пари; економічні – не потребують запасу палива і води, легко встановлюються у будь-якому доступному місці (на стіні, під підлогою електротранспорту, у корпусі електроінструментів тощо).

*Електричні генератори* – це пристрої, призначені для перетворення енергії механічного руху в енергію електричного струму (рис. 3.44). Джерелом механічної енергії електрогенератора можуть бути парова турбіна, потік води, вітер, двигун внутрішнього згорання або навіть сила людини.



Рис. 3.43



Рис. 3.44

Електрогенератори поділяють на генератори постійного і змінного струму. Генератори постійного струму використовуються у різноманітних зарядних пристроях, в автомобілях. Бензинові та дизельні генератори змінного струму застосовують для електрифікації будівель, забезпечення електроживленням будівельних майданчиків (під час дорожніх або зварювальних робіт, алмазного різання, буріння свердловин, для освітлювання, обігрівання, а також ремонту приміщень) у районах, де

немає магістрального енергопостачання; окремих виробничих систем у промисловості, у сільському господарстві, на повітряних і водних суднах воєнного та цивільного флоту; на об'єктах, де обов'язковою є наявність безперебійного електроживлення (на аеродромах, в медичних закладах, фінансових установах тощо). Вітро- та гідрогенератори використовують як альтернативні джерела енергії в гірській місцевості.

### 3.3.7. Сила Лоренца. Рух заряджених частинок у магнітному полі

Елемент струму – це провідник довжиною  $dl$ , всередині якого за час  $dt$  через поперечний переріз переноситься  $dN$  електронів. На елемент струму  $dl$  з боку магнітного поля індукцією  $\vec{B}$  діє елементарна сила Ампера (3.38), яка у скалярному вигляді відповідно до (3.21) дорівнює:

$$dF_A = \frac{dq}{dt} dl \cdot B \cdot \sin \alpha = \frac{dN \cdot e \cdot dl \cdot B \cdot \sin \alpha}{dt} = dN \cdot e \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha,$$

де  $dq = e \cdot dN$  – перенесений заряд;  $v$  – швидкість направлено руху електронів уздовж провідника;  $e$  – заряд електрона.

Поділивши ліву і праву частини останнього рівняння на кількість носіїв струму  $dN$ , отримаємо числове значення сили, з якою магнітне поле індукцією  $\vec{B}$  діє на окремий електрон:

$$F = \frac{dF_A}{dN} = e \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha.$$

Силу, з якою магнітне поле індукцією  $\vec{B}$  діє на окрему частинку зарядом  $q$ , що рухається зі швидкістю  $\vec{v}$ , називають **силою Лоренца**:

$$\vec{F}_{\vec{E}} = q [\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (3.50)$$

Напрямок сили Лоренца визначають за **правилом лівої руки**: якщо ліву руку розмістити так, щоб лінії індукції магнітного поля входили в долоню, а чотири випрямлених пальці збігалися з напрямом руху позитивно зарядженої частинки, то відхилений під прямим кутом великий палець вкаже напрям сили Лоренца. Для визначення напрямку дії сили Лоренца на негативно заряджену частинку, напрям сили, отриманий за правилом лівої руки, змінюють на протилежний або використовують праву руку.

Оскільки сила Лоренца завжди направлена перпендикулярно до

напрямку швидкості руху зарядженої частинки, то магнітне поле не виконує роботи з її переміщення, а лише змінює напрям швидкості частинки. Абсолютне значення швидкості зарядженої частинки і, відповідно, кінетична енергія при цьому не змінюється.

Якщо на рухому заряджену частинку, окрім магнітного поля з індукцією  $\vec{B}$ , діє й електричне поле з напруженістю  $\vec{E}$ , то результуюча сила, прикладена до частинки, дорівнює векторній сумі сил – сили, що діє з боку електричного поля, і сили Лоренца:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}].$$

Цей вираз називають *формулою Лоренца*.

Швидкість  $\vec{v}$  у цій формулі – це швидкість зарядженої частинки відносно магнітного поля, оскільки в процесі переходу від однієї інерціальної системи до іншої змінюються не лише швидкість частинки, але й силові характеристики полів  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$ .

Поведінка зарядженої частинки в однорідному постійному магнітному полі залежить від орієнтації швидкості її руху відносно ліній вектора індукції:

1. Якщо вектор швидкості руху частинки збігається з напрямом вектора індукції магнітного поля  $\vec{v} \parallel \vec{B}$ , то частинка буде надалі рухатися прямолінійно й рівномірно, оскільки ніщо не впливатиме на її рух ( $\vec{F}_{\vec{E}} = 0$ ).

2. Якщо вектор швидкості руху частинки перпендикулярний до напрямку вектора індукції магнітного поля  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , то сила Лоренца спрямована перпендикулярно до траєкторії руху частинки ( $\vec{F}_{\vec{E}} \perp \vec{v}$ ) і виконуватиме роль доцентрової сили:

$$F_{\vec{E}} = F_{\text{дц}}; qBv = ma_{\text{дц}}; qBv = \frac{mv^2}{r},$$

тобто частинка буде рухатися по колу радіусом

$$r = \frac{mv}{qB}$$

та з періодом обертання, який не залежить від швидкості руху частинки:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

3. Якщо заряджена частинка влітає у магнітне поле під кутом  $\alpha$

до силових ліній,  $0 < \alpha < \pi/2$ , то вектор її швидкості  $\vec{v}$  можна розкласти на дві складові: паралельну до вектора  $\vec{B}$  ( $v_{\parallel}$ ) і перпендикулярну до нього ( $v_{\perp}$ ). Тобто частинка одночасно буде здійснювати поступальний рух вздовж ліній індукції магнітного поля зі сталою швидкістю  $v_{\parallel}$  і рух по колу зі швидкістю  $v_{\perp}$ , описуючи гвинтову траєкторію (рис. 3.45):

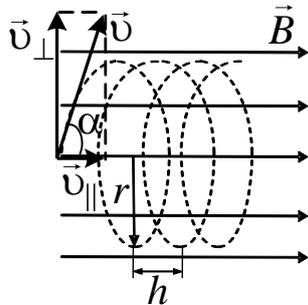


Рис. 3.45

$$v_{\parallel} = v \cdot \cos \alpha, \quad v_{\perp} = v \cdot \sin \alpha.$$

Радіус витків гвинтової лінії:

$$r = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \cdot \sin \alpha}{qB},$$

а крок гвинтової лінії руху зарядженої частинки:

$$h = v_{\parallel} T = v \cdot \cos \alpha \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi m v \cdot \cos \alpha}{qB}.$$

4. Складнішою є траєкторія руху зарядженої частинки у неоднорідному магнітному полі. Якщо, наприклад, заряджена частинка рухається вздовж напрямку зростання індукції магнітного поля, то з останніх формул видно, що  $r$  і  $h$  будуть пропорційно зменшуватись, тобто частинка рухатиметься по спіралі, що скручується. На цьому явищі побудований принцип магнітного фокусування пучків заряджених частинок.

Галузь фізики і техніки, в якій досліджується формування, фокусування і відхилення пучків заряджених частинок, отримання за їхньою допомогою зображень під впливом електричних і магнітних полів у вакуумі, називають *електронною оптикою*.

До електронно-оптичних елементів і приладів належать:

- *магнітні і електронні лінзи*, призначені для створення магнітних та електричних полів з певною симетрією і для керування крізь них потоками заряджених частинок. Магнітні та електронні лінзи застосовують для одержання зображень за допомогою електронних та іонних пучків, формування, фокусування і відхилення яких відбувається за допомогою електронних і магнітних полів. Застосовуються в електронно-променевих трубках, електронних мікроскопах, електронних прискорювачах, аналоговому телебаченні та радіолокації;

- *електронні мікроскопи*, призначені для спостереження та фотографування збільшених до  $10^6$  разів зображень об'єктів, в яких замість світлових променів використовують електронні пучки, прискорені і в умовах глибокого вакууму до енергії 30 – 100 кеВ. Дають можливість отримувати зображення окремих молекул і важких атомів, досліджувати мікрорельєф поверхонь, розподіл хімічного складу речовини на поверхні об'єкта, здійснювати структурний аналіз;
- *мас-спектрометри* – прилади, призначені для розділення іонізованих молекул й атомів за їхніми масами. Використовують в ядерній енергетиці, геології, геохімії для елементарного і структурного молекулярного аналізу тощо;
- *прискорювачі заряджених частинок* – установки, призначені для одержання заряджених частинок (електронів, протонів, атомних ядер, іонів тощо) великих енергій внаслідок їхнього прискорення електричними і магнітними полями. За типом заряджених частинок, які підлягають прискоренню, розрізняють протонні, електронні та іонні прискорювачі. За формою траєкторій, уздовж яких розганяють частинки, розрізняють лінійні і циклічні прискорювачі (синхрофазотрон, синхротрон, фазотрон, циклотрон, мікротрон, бетатрон). Використовуються у наукових дослідженнях з атомної та ядерної фізики елементарних частинок, у хімії, біофізиці, геофізиці, а також у деяких прикладних галузях (дефектоскопії, променевої терапії тощо).

### ***3.3.8. Магнітне поле в речовині. Характеристики намагніченого стану. Магнетики. Феромагнетики та їхнє застосування***

Єдиними джерелами магнітного поля у вакуумі є рухомі вільні електричні заряди або струми у провідниках. Оскільки атоми і молекули речовини складаються із заряджених частинок (ядер атомів і електронів), що здійснюють поступальний й обертальний рухи, то саме вони створюють магнітне поле всередині речовини.

За сучасними поглядами *магнітні властивості речовини* зумовлені трьома причинами:

- *орбітальним магнітним моментом електронів*, який виникає внаслідок їхніх рухів навколо ядер;

- *спіновим магнітним моментом електронів*, який перебуває у певному співвідношенні з їхнім власним механічним моментом імпульсу, пов'язаним із обертальним рухом електронів навколо власних осей – спіном електрона;
- *власним магнітним моментом атомних ядер*.

Магнітний момент атома  $\vec{d}_{m\grave{a}o}$  (або молекули) речовини визначається векторною сумою:

$$\vec{d}_{m\grave{a}o} = \vec{P}_{m\grave{y}} + \vec{P}_{me_o} + \vec{P}_{me_s},$$

де  $\vec{P}_{m\grave{y}}$  – власний магнітний момент атомного ядра;  $\vec{P}_{me_o}$  – орбітальний магнітний момент електрона;  $\vec{P}_{me_s}$  – спіновий магнітний момент електрона.

*Магнетиками* називають речовини, які під впливом зовнішнього магнітного поля набувають магнітних властивостей, тобто стають джерелами власного магнітного поля. Набуття магнітних властивостей речовиною під дією зовнішнього магнітного поля називається *намагнічуванням магнетика*. Здатність речовини намагнічуватись у зовнішньому магнітному полі характеризується *магнітною сприйнятливістю*  $\chi$ .

Сумарний магнітний момент одиниці об'єму речовини є *вектором намагніченості*:

$$\vec{j} = \frac{\sum \vec{P}_m}{V}, [j] = \left[ \frac{1 \text{ \AA}}{\text{і}} \right].$$

Вектор намагніченості  $\vec{j}$  пов'язаний з вектором індукції магнітного поля  $\vec{B}$  (або  $\vec{H}$ ) співвідношенням:

$$\vec{j} = \chi \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0} \quad \text{або} \quad \vec{j} = \chi \vec{H}.$$

Магнетики поділяються на три основних класи:

- *діамагнетиками* – речовини, атоми яких не мають власних магнітних моментів, оскільки орбітальні і спінові магнітні моменти електронів цих атомів, якщо немає зовнішнього магнітного поля, скомпенсовані. Після внесення діамагнетика у зовнішнє магнітне поле виникають індуквані колові струми (електрони в атомах змінюють свій обертальний рух внаслідок впливу на них зовнішнього магнітного поля), які створюють додаткові магнітні

моменти атомів, спрямовані у бік, протилежний напрямку зовнішнього магнітного поля. Властивість речовини намагнічуватись протилежно напрямку зовнішнього магнітного поля ( $\mu < 1$ ) називають *діамагнетизмом*. Абсолютне значення магнітної сприйнятливості для діамагнетиків є малим – близько  $\chi_a = 10^{-5} \div 10^{-6}$ . До діамагнетиків належать: інертні гази, вода, мідь, цинк, ртуть, свинець, срібло, золото тощо, багато органічних і неорганічних сполук;

- *парамагнетики* – речовини, структурні елементи (атоми, молекули, іони) яких, якщо немає зовнішнього магнітного поля, мають власний магнітний момент. Після внесення у зовнішнє магнітне поле парамагнетик намагнічується. Властивість речовини намагнічуватись за напрямком зовнішнього магнітного поля ( $\mu > 1$ ) називають *парамагнетизмом*. Абсолютне значення магнітної сприйнятливості парамагнетиків є на декілька порядків більшим за значення магнітної сприйнятливості діамагнетиків за кімнатної температури  $\chi_i = 10^{-3} \div 10^{-4}$ . До діамагнетиків належать: магній, алюміній, кальцій, хром, марганець, кисень, літій, уран та інші;
- *феромагнетики* – речовини, атоми яких мають некомпенсовані власні магнітні моменти, котрі завдяки внутрішнім взаємодіям можуть набувати певної впорядкованої просторової орієнтації, внаслідок чого речовина намагнічується. Зовнішнє магнітне поле всередині феромагнетиків підсилюється в сотні раз ( $\mu \gg 1$ ). Магнітна сприйнятливість феромагнетиків може досягати значень  $\chi_\delta = 10^2 \div 10^5$ . Намагнічування феромагнетиків пояснюється підтвердженою експериментально гіпотезою Вейса, згідно з якою внаслідок наявності внутрішнього молекулярного поля в стані повного розмагнічення, феромагнетики розпадаються на велику кількість малих за розмірами ділянок спонтанного намагнічення, кожна з яких намагнічена до насичення – *доменів* (або *ділянок Вейсса*). Якщо немає зовнішнього магнітного поля, магнітні моменти різних доменів направлені в просторі хаотично.

Магнітом'які феромагнітні матеріали (хімічно чисте залізо, електротехнічна сталь та ін.), які майже втрачають намагніченість після видалення із зовнішнього поля, використовують в тих електротехнічних пристроях, у яких відбувається неперервне перемагнічування осердь, магнітопроводів та інших частин трансформаторів, генераторів змінного

струму, електродвигунів. Магнітожорсткі матеріали (вуглецева і хромиста сталь, спеціальні сплави) використовують здебільшого для виготовлення постійних магнітів. У радіотехніці ферити – феромагнітні матеріали, що не проводять електричного струму, – використовують для виготовлення осердь котушок індуктивності, внутрішніх антен малогабаритних приймачів тощо. Через явище магнітного гістерезису, яке полягає у властивості магніту зберігати "пам'ять" про минуле, став можливим запис звуку в магнітофонах та інформації в ЕОМ на магнітних носіях пам'яті. Широкого застосування феромагнетики набули також у медицині як основа нанокомпозитів – систем спрямованого транспортування, утримування та керованого виділення ліків та лікувальних засобів в організмі хворого; як рентгеноконтрастні речовини; в експериментальній цитології та гістології; для вибіркової сорбції на клітинах з метою їхньої стимуляції, розкладу або виділення; у феромагнітній терапії для руйнування пухлин тощо.

### 3.3.8. Явище електромагнітної індукції. Правило Ленца

Результати дослідів Х. Ерстеда (здатність електричного поля породжувати навколо себе магнітне поле) та А. Ампера (пондемоторна дія магнітного поля на провідники зі струмом), здійснених у 1920 році, стали підставою для припущень щодо можливості одержання електричного поля завдяки магнітному полю. Для перевірки цієї гіпотези проводились різноманітні експерименти, такі як, наприклад, безрезультатні спроби виявлення струму у замкненому провіднику, розміщеному біля іншого провідника, по якому проходив постійний електричний струм. Лише у 1931 році англійський фізик і хімік М. Фарадей звернув увагу на те, що до виникнення короткочасних струмів у замкненому провіднику (коло А на рис. 3.46) призводить до розмикання або замикання ключа електричного кола В з постійним струмом. Подальші дослідження виявили, що у замкненому провіднику електричний струм виникає також тоді, коли до нього підносять

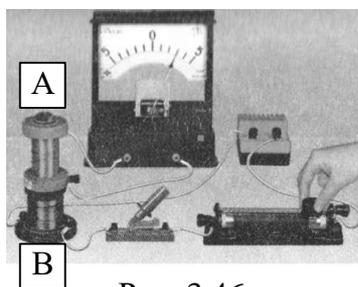


Рис. 3.46

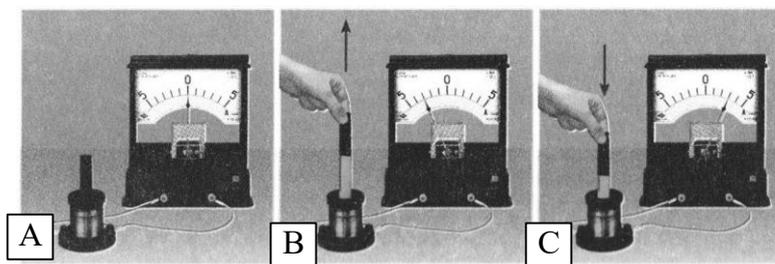


Рис. 3.47

постійний магніт (рис. 3.47) або змінюють величину струму в провіднику, що знаходиться поряд.

Відкриття М. Фарадея полягало у тому, що електричний струм у замкненому контурі може виникнути під час руху провідного контуру в полі магніту, під час руху магніту відносно замкненого провідного контуру і під час зміни струму в котушці, яка створює магнітне поле.

Експериментальні спостереження М. Фарадея сприяли відкриттю нового закону про зв'язок електричного і магнітного полів: у тих ділянках, де змінюється магнітне поле, виникає електричне поле, яке спричинює направлений рух електронів у провідному контурі, тобто зумовлює виникнення електрорушійної сили за будь-якої зміни магнітного потоку.

**Електромагнітна індукція** – це явище виникнення електрорушійної сили (що спричинює індукційний струм) у замкненому провіднику внаслідок зміни магнітного потоку з часом через даний контур.

Кількісно описується **законом Фарадея для явища електромагнітної індукції**: будь-яка зміна магнітного потоку через площу замкненого контуру викликає (індукує) в ньому ЕРС індукції, що пропорційна швидкості зміни магнітного потоку:

$$\varepsilon_z = -\frac{d\hat{O}}{dt}, \quad (3.51)$$

де  $\varepsilon_z$  – електрорушійна сила індукції;  $\hat{O}$  – потік вектора індукції магнітного поля (3.48).

Знак “–” у формулі (3.51) пояснюється тим, що індукційний струм у контурі завжди має такий напрямок, що його власне магнітне поле протидіє зміні магнітного потоку, який збудив цей струм – **правило Ленца** (рис. 3.48).

Принцип правила Ленца нині реалізують у транспортно-будівельній галузі для міжміських пасажирських перевезень. Це потяги на так званій магнітній подушці (рис. 3.49). Під днищем вагона такого потяга змонтовано потужні

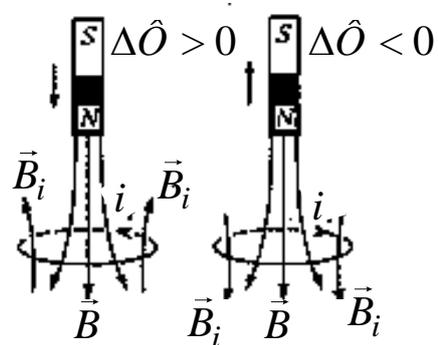


Рис. 3.48

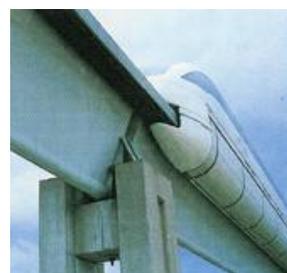


Рис. 3.49

магніти, розташовані за кілька сантиметрів від сталевго полотна. Під час руху потяга магнітний потік, що проходить через контур полотна, постійно змінюється і в ньому виникають сильні індукційні струми, що створюють потужне магнітне поле, яке відштовхує магнітну підвіску потяга. Ця сила настільки велика, що, досягаючи певної швидкості, потяг у буквальному розумінні відривається від полотна на 10-15 см і фактично летить у повітрі. Потяги на магнітній подушці здатні досягати швидкості понад 500 км/год, завдяки чому вони є ідеальним засобом міжміського сполучення середньої дальності.

Більш загальне тлумачення явища електромагнітної індукції дав Дж. К. Максвелл. Якщо М. Фарадей уявляв електромагнітну індукцію як збудження електричного струму в замкненому провіднику під дією змінного магнітного поля, то, на думку Дж. К. Максвелла, суть явища електромагнітної індукції зводиться до виникнення вихрового електричного поля скрізь, де є змінне магнітне поле, отже для явища електромагнітної індукції наявність провідників не є обов'язковою. Виникнення індукційного струму в замкненому провідному контурі – це лише один із проявів виникнення вихрового електричного поля під дією змінного в часі магнітного поля. Вихрове поле напруженістю  $\vec{E}$  може спричинювати й інші дії, наприклад, поляризувати діелектрик, викликати пробій діелектрика між обкладинками конденсатора, прискорювати або гальмувати заряджені частинки тощо.

Для вихрового електричного поля циркуляція вектора напруженості  $\vec{E}$  по довільно обраному замкненому контуру  $L$  дорівнює електрорушійній силі, тобто:

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = \varepsilon. \quad (3.52)$$

Тоді згідно з (3.48), (3.51) та (3.52) можна вивести закон електромагнітної індукції в узагальненому Максвеллом інтегральному вигляді:

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = -\frac{d}{dt} \int_S (\vec{B} d\vec{S}), \quad (3.53)$$

або в диференціальній формі (використовуючи теорему Стокса):

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.54)$$

Уперше спосіб практичного використання явища електромагнітної індукції запропонував Фарадей. Пристрої, що працюють за принципом явища електромагнітної індукції та призначені для перетворення енергії механічного руху в енергію електричного струму, називають *електричними генераторами*. Принципову схему генератора змінного струму зображено на рис. 3.50: між полюсами постійного магніту відносно осі, перпендикулярної до напрямку ліній магнітної індукції, рівномірно обертається рамка, у якій, згідно із законом М. Фарадея, виникає електрорушійна сила.

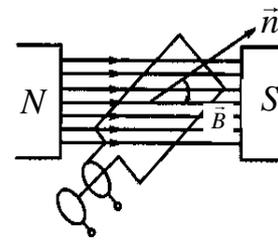


Рис. 3.50

Для передачі енергії індукovanого у рамці електричного струму до кола споживача до кінців провідника рамки прикріплюють контактні кільця, з'єднані з контактними щіточками кола навантаження. Якщо кільця замінити двома півкільцями, то у зовнішній частині кола утвориться пульсуючий струм одного напрямку. Зазначимо, що описану конструкцію генератора змінного струму використовують рідко, тільки в малопотужних генераторах. Оскільки за допомогою ковзних контактів практично неможливо відвести від генератора потужний струм високої напруги. Крім того, теплова дія струму та виникнення іскрового розряду на контактах зумовлюють їхнє швидке руйнування.

Практично генератори конструюють так, що змінний струм індукується в нерухомій обмотці (її вкладають у пази на внутрішній поверхні пластинчастого феромагнітного статора), а обертальною складовою (ротором) є дво- або багатополісний електромагніт (з чергуванням полюсів). Останній живиться порівняно слабким постійним струмом, що подається через контактні кільця КК (рис. 3.51). Обмотку електромагніта, в якій індукується ЕРС, називають *якорем*, а рухому магнітну систему – *індуктором*.

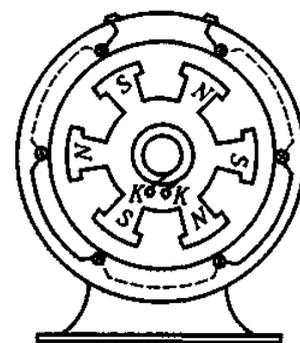


Рис. 3.51

Час одного оберту ротора двополюсного індуктора дорівнює періоду ЕРС в обмотці статора. Отже, за  $n$  обертів протягом 1 хвилини індуктора з  $P$  парами полюсів частота індукваного

$$\nu = p \frac{n}{60} \tilde{n}^{-1}$$

ЕРС становить:

Види та межі застосування генераторів електричного струму описано у п. 3.3.6

В Україні для технічних цілей використовують змінний струм частотою 50 Гц (з періодом 0,02 с). Щоб отримати такий струм за допомогою двополюсного індуктора, його приводять в обертання з частотою 3000 об/хв (розміщуючи безпосередньо на валу паротурбіни). Згідно з формулою кількість обертів ротора можна зменшувати, збільшуючи кількість пар полюсів індуктора (рис. 3.51). Це використовують в гідрогенераторах, де відповідно до кількості полюсів у статорі вкладають таку саму кількість активних провідників (кружечки на рис. 3.51). Провідники якоря з'єднують послідовно. З'єднувальні провідники, ближчі до нас, на рис. 3.51 показано суцільними лініями, в тильній частині – штриховими, індуковані в них ЕРС додаються.

Якщо в тонких провідниках зі зміною магнітного потоку, що їх пронизує, індукується струм провідності, то в масивних провідниках індукується замкнений електричний струм, який називають *вихровим*, або *струмом Фуко*. Струми Фуко, як і індукційні струми в лінійних провідниках, підпорядковуються правилу Ленца: їхнє магнітне поле спрямоване так, щоб протидіяти зміні магнітного потоку, що індукував вихрові струми. Так, наприклад, швидко гасяться коливання масивних металевих маятників, розміщених між полюсами магнітів, це явище використовують для заспокоєння (демпфування) рухомих частин приладів. Якщо в описаному маятнику зробити радіальні вирізи, то вихрові струми слабшають і гальмування майже не відбувається. Вихрові струми також зумовлюють нагрівання провідників. Для зменшення втрат на нагрівання якорі генераторів та осердя трансформаторів виготовляють не суцільними, а з тонких пластин, відокремлених одна від одної шарами ізолятора, і встановлюють так,



Рис. 3.52

щоб вихрові струми були направлені упоперек пластин. Джоулеве тепло, що виділяється струмами Фуко, у промисловості використовують в індукційних пічках (рис. 3.52). Індукційна піч (тремоліт) являє собою тигель, який вводять всередину котушки з

високочастотним струмом. У металі виникають інтенсивні вихрові струми, здатні розігріти його до плавлення. Такий спосіб дає змогу

плавити метали у вакуумі, в результаті чого отримують надчисті матеріали.

Індукційні плавильні пічки використовуються для розплавлення та отримання сталевих, чавунних відливок високої якості, а також для лиття феросплавів, легувальних та нержавіючих сплавів. Застосовуються у ливарних цехах металургійних заводів, а також у цехах точної виливки, зокрема, для виливки кольорових металів (бронзи, латуні, алюмінію, міді тощо).

У побуті використовують індукційні плити для приготування їжі (рис. 3.53). Головна їхня відмінність від електричних і газових плит полягає у тому, що тепло генерується



Рис. 3.53

безпосередньо на посуді, в якому готують їжу, а не на поверхні самої плити. Відмінність індукційних плит від традиційних полягає в їхній енергоефективності, скороченні часу приготування, безпечності щодо опіків, значному зменшенні нагрівання навколишнього середовища.

Вихрові струми виникають й у провідниках, по яких тече змінний струм. Напрямок цих струмів можна визначити за правилом Ленца. На рис.3.54, *a* показано напрями вихрових струмів під час зростання первинного струму у провіднику, а на рис. 3.54, *b* – під час його зменшення. В обох випадках напрями вихрових струмів такі, що вони протидіють зміні первинного струму всередині провідника і сприяють його зміні поблизу провідника. Таким чином,

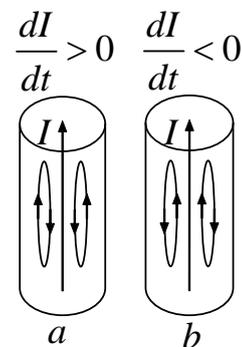


Рис. 3.54

внаслідок виникнення вихрових струмів швидкозмінний струм виявляється розподілений по перерізу провідника нерівномірно – він ніби витісняється на поверхню провідника. Це явище дістало назву *скін-ефекту* (від англ. skin – шкіра) або *поверхневого ефекту*. Оскільки струми високої частоти практично проходять по тонкому поверхневому шару, то проводи для них виготовляють порожніми всередині. У дешевих електроприладах провідники виготовляють з пластику, а методом напилювання по верху наносять тонкий шар металу (ремонт така проводка не підлягає). Під час проходження по суцільним провідникам струмів високої частоти внаслідок скін-ефекту нагріваються лише поверхневі його шари. На цьому заснований метод поверхневого гартування металів способом зміни частоти поля.

### 3.3.9. Самоіндукція. Індуктивність. Перехідні процеси в електричних колах з індуктивністю

Навколо провідника зі струмом виникає магнітне поле, яке утворює певний потік вектора індукції через контур провідника. Якщо по замкненому провіднику тече змінний струм, то навколо провідника виникає змінне магнітне поле, тобто через замкнутий контур провідника з часом виникає зміна магнітного потоку вектора індукції. Зміна магнітного потоку через контур, за законом Фарадея, спричинює індукційний струм. Струм, що індукується у контурі провідника, по якому тече змінний струм, називають *струмом самоіндукції*.

*Явище виникнення індукційного струму в провіднику внаслідок зміни магнітного потоку, зумовленої зміною струму в цьому ж провіднику, називають самоіндукцією.*

Величина електрорушійної сили самоіндукції була визначена американським фізиком Дж. Генрі:

$$\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.55)$$

Порівнюючи закон Генрі (3.55) та закон Фарадея (3.51)

$$\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\frac{d\hat{O}}{dt}, \quad (3.56)$$

можна дійти висновку, що магнітний потік, зумовлений зміною струму в провіднику, пропорційний силі струму:

$$\hat{O} = LI, \quad (3.57)$$

де  $L$  – індуктивність контуру – коефіцієнт пропорційності, який не залежить від сили струму та індукції магнітного поля, а є однозначною характеристикою провідного контуру, що визначається формою і розмірами контуру, а також магнітними властивостями навколишнього середовища. Одиницею вимірювання індуктивності є 1 Гн (генрі).

З формули (3.55) отримаємо фізичний зміст індуктивності провідника: *індуктивність* – це характеристика, що визначає міру інертних властивостей провідника стосовно зміни струму, чисельно дорівнює тій ЕРС самоіндукції, що виникає в контурі за швидкості зміни сили струму в ньому 1 А за 1 с:

$$L = \frac{|\varepsilon_{si}|}{dI/dt}.$$

Визначимо індуктивність довгого соленоїда завдовжки  $l$  з площею перерізу  $S$  і кількістю витків  $N$ . Для цього скористаємося (3.56), (3.57), (3.45) та (3.48):

$$\varepsilon_{si} = -\frac{d\Psi}{dt},$$

де  $\Psi = N\hat{O} = BSN = \mu\mu_0 I \frac{N^2}{l} S$  – повний потік вектора індукції крізь усі витки (потокочеплення).

Тоді:

$$\varepsilon_{si} = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d\left(\mu\mu_0 I \frac{N^2}{l} S\right)}{dt} = -\mu\mu_0 \frac{N^2}{l} S \frac{dI}{dt}. \quad (3.58)$$

Порівнюючи рівняння (3.58) із законом Генрі (3.55), одержуємо:

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} S. \quad (3.59)$$

Оскільки  $Sl = V$ , то формулу індуктивності довгого соленоїда можна записати так:

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l \cdot l} S \cdot l = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l^2} V \quad \text{або} \quad L = \mu\mu_0 n^2 V,$$

де  $n$  – кількість витків на одиницю довжини.

Унаслідок розмикання або замикання електричних кіл сила струму в них різко змінюється, що призводить до виникнення струмів самоіндукції, які називають *екстраструмами самоіндукції*.

Якщо електричне коло містить котушки з великими значеннями індуктивності  $L$ , то *екстраструми розмикання* в таких колах можуть значно перевищувати струми в колі від джерела. Часто це стає причиною яскравого спалаху лампочок і плавлення запобіжників внаслідок розмикання електричних кіл споживачів. Великі струми самоіндукції через швидке вимкнення спричиняють пробій повітряного проміжку між контактами вимикачів і появу дугового розряду, що призводить до плавлення контактів. Для гасіння дуги в коло вмикають конденсатори. Явище самоіндукції використовують в пусках ламп денного освітлення для запалювання газового розряду.

У разі вмикання джерела струму через котушку індуктивності проходить наростаючий струм, тому у витках котушки виникає струм

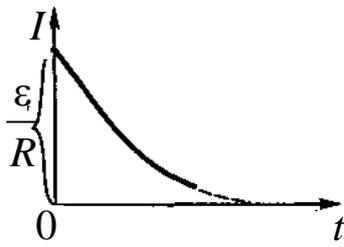


Рис. 3.55

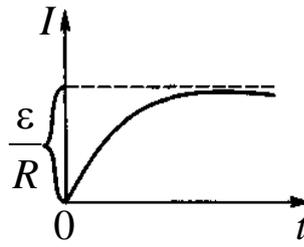


Рис. 3.56

самоіндукції, направлений за правилом Ленца проти зростаючого основного струму, що й спричинює інерційність зростання останнього (рис. 3.56). Чим

більша індуктивність  $L$  і менший опір  $R$ , тим повільніше зростатиме значення сили струму  $I$  в колі, наближаючись асимптотично до значення  $\varepsilon/R$ . Струм самоіндукції, який виникає внаслідок вмикання джерел струму в електричне коло з індуктивністю  $L$ , називають *екстраструмом замикання*.

Залежність екстраструмів розмикання та замикання від часу можна отримати, використовуючи правила Кірхгофа (п. 3.2.5), для кола із послідовно або паралельно з'єднаними джерелом  $\varepsilon$ , активним опором  $R$  та індуктивністю  $L$ .

Для екстраструму розмикання (рис. 3.55): 
$$I = I_0 e^{-R/L \cdot t}.$$

Для екстраструму замикання (рис. 3.56): 
$$I = I_0 \left(1 - e^{-R/L \cdot t}\right).$$

### 3.3.10. Взаємоіндукція. Трансформатори

Якщо провідні контури чи котушки зі струмами розміщені так, що магнітні потоки кожної з них хоча б частково перетинають витки сусідніх, то, окрім струмів самоіндукції, в кожному контурі буде виникати струм, зумовлений зміною потоку вектора індукції магнітного поля, створеного струмом сусідніх контурів, такий струм називають *струмом взаємоіндукції*.

*Явище виникнення електрорушійної сили індукції в замкненому контурі, розміщеному близько до замкненого контуру, в якому тече змінний струм, називають явищем взаємної індукції.*

Контури зі змінними струмами, в яких виникає явище взаємоіндукції через взаємне перетинання магнітних потоків, мають *індукційний зв'язок*. Електрорушійні сили  $\varepsilon_i$  що виникають у процесі взаємоіндукції, пропорційні швидкостям зміни струмів в контурах, між якими є індуктивний зв'язок:

$$\varepsilon_{i1} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad \text{та} \quad \varepsilon_{i2} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt},$$

де  $L_{12} = L_{21}$ , і мають назву *коефіцієнтів взаємної індуктивності контурів*. Коефіцієнти взаємоіндукції є мірою магнітного зв'язку між контурами і залежать від геометричної форми, розмірів і взаємного розміщення контурів зі струмом, а також від магнітних властивостей середовища, де розміщені контури (3.59).

На практиці для збільшення значення  $L_{12}$  обидва контури насаджують на спільне залізне осердя ( $\mu \gg 1$ ).

Явище взаємної індукції покладено в основу роботи **трансформатора** – пристрою для перетворення змінного струму однієї напруги в змінний струм іншої напруги за сталої частоти струму. Трансформатор складається з двох або більше обмоток, що мають загальне осердя з феромагнітного матеріалу (рис. 3.57).

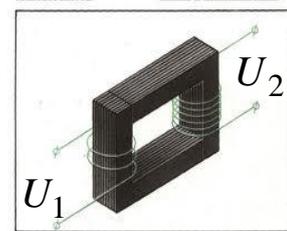


Рис. 3.57

Якщо первинна обмотка має  $N_1$  витків, а змінна вхідна напруга  $U_1$ , у вторинній обмотці, яка має  $N_2$  витків, вихідна напруга  $U_2$  (рис. 3.57), то відношення

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = k$$

називають коефіцієнтом трансформації.

*Коефіцієнт трансформації* чисельно дорівнює відношенню кількості витків другої обмотки трансформатора до кількості витків першої обмотки та показує, у скільки разів змінюється вихідна напруга порівняно із напругою на вході трансформатора. Якщо  $k > 1$ , то трансформатор підвищує напругу і його називають *підвищувальним*, а за  $k < 1$  трансформатор є *знижувальним*.

Електричну енергію, що зазвичай виробляється електростанціями, потрібно передавати на сотні і тисячі кілометрів до загальної енергетичної системи, промислових підприємств або безпосередньо до споживачів. Під час проходження струму по дротах ліній електропередачі відбуваються втрати електроенергії на їхнє нагрівання. Оскільки кількість теплоти, що виділяють дроти, прямо пропорційна квадрату сили струму й опору, то для обмеження втрат електроенергії

треба або збільшувати переріз проводів, що є дуже економічно не вигідним і технічно неможливим, або зменшити силу струму, підвищивши напругу. Для підвищення напруги на початку лінії електропередачі встановлюють підвищувальні трансформатори, а на кінці – знижувальні. На рис. 3.58 наведено умовну схему високовольтної лінії передачі.

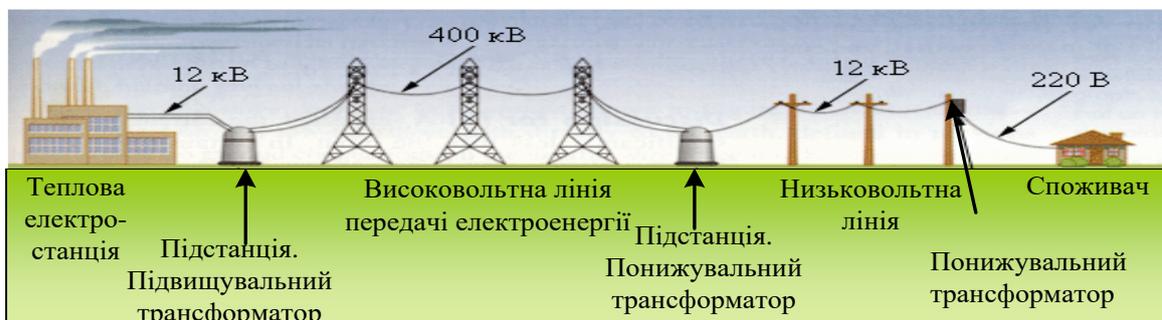


Рис. 3.58

Нині трансформатори застосовують практично в усіх промислових галузях, зокрема на підприємствах будівельної індустрії та безпосередньо у процесі будівництва. Трансформатори різняться за призначенням, розмірами, типами і видами залежно від потреб конкретних споживачів електричного струму (рис. 3.59).



Рис. 3.59

Трансформатори є основними елементами систем енергопостачання, електромашин, електрообладнання, електроустановок та їхніх деталей для отримання потрібної для них напруги живлення. Зокрема, можна виділити трансформатори для зварювальних апаратів, апаратів для прогріву бетону, ґрунту і труб, трансформатори для компресорів, транспортерів, бетономішалок, електроприводів будівельних машин, насосних и компресорних установок, гідродинамічні трансформатори

для будівельних і транспортних машин, трансформатори для освітлення будівельних майданчиків, ручних електричних машин та інших споживачів енергії.

### **3.3.11. Енергія магнітного поля струму. Енергія і густина енергії магнітного поля**

Для збудження у контурі електричного струму стороннім джерелам електрорушійних сил потрібно затратити певну енергію. Унаслідок зміни струму у замкненому провіднику виникає електрорушійна сила самоіндукції  $\mathcal{E}_{si}$ , що протидіє змінам струму. Щоб сила струму зростала, необхідно електрорушійній силі самоіндукції компенсувати енергією сторонніх електрорушійних сил. Тобто у процесі зростання сили струму джерело сторонніх електрорушійних сил виконує роботу проти електрорушійних сил самоіндукції. Ця робота спрямовується на утворення магнітного поля, енергія якого дорівнює роботі сторонніх електрорушійних сил. За час  $dt$  за сили струму  $I$  буде виконана робота, яка дорівнюватиме зміні енергії магнітного поля:

$$dA = dW_m = -\mathcal{E}_{si} Idt = \frac{d\hat{O}}{dt} Idt = Id\hat{O}. \quad (3.60)$$

Оскільки з (3.57)  $d\hat{O} = LdI$ , то з (3.60) отримаємо формулу:

$$dW_m = ILdI. \quad (3.61)$$

Інтегруючи (3.61) у межах від нуля до  $I$ , одержимо значення енергії магнітного поля замкненого провідного контуру зі струмом  $I$  та індуктивністю  $L$ :

$$W_m = \int_0^I ILdI = \frac{LI^2}{2}. \quad (3.62)$$

Енергія магнітного поля розподілена в усьому просторі, де локалізоване поле. Для обчислення енергетичних характеристик в окремих ділянках чи навіть точках заданого магнітного поля, виразимо формулу для обчислення енергії поля через його характеристики. Для спрощення розглянемо окремий випадок – магнітне поле довгого соленоїда зі струмом індуктивністю  $L$ . Підставимо (3.59) в (3.62):

$$W_m = \frac{1}{2} \mu \mu_0 n^2 I^2 V .$$

Оскільки в середині довгого соленоїда магнітне поле є однорідним, а його індукція з (3.45)  $B = \mu \mu_0 In$ , то:

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu \mu_0} B^2 V .$$

Якщо взяти до уваги формулу зв'язку вектора індукції магнітного поля і вектора напруженості магнітного поля

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} , \quad (3.63)$$

енергія магнітного поля у даній точці дорівнюватиме:

$$W_m = \frac{\vec{B} \vec{H}}{2} V .$$

А об'ємна густина енергії магнітного поля навколо кожної точки простору  $\varpi_m = \frac{W_m}{V}$  визначатиметься значеннями векторних характеристик поля:

$$\varpi_m = \frac{\vec{B} \vec{H}}{2} .$$

### 3.3.12. Система рівнянь Максвелла в інтегральній і диференціальній формах

Явище електромагнітної індукції Дж. К. Максвелл пояснював виникненням вихрового електричного поля скрізь, де є змінне магнітне поле (3.53), (3.54). Тобто контур, у якому виникає електрорушійна сила індукції, відіграє лише роль індикатора вихрового електричного поля у даній частині простору (див. п.3.3.8).

Дж. К. Максвелл висунув гіпотезу, згідно з якою аналогічно до закону електромагнітної індукції, зі зміною у часі індукції (зміщення)

електричного поля  $\frac{\partial D}{\partial t}$  виникає магніторушійна сила  $\epsilon_m$  (3.47), тобто

зміна у часі електричного поля має спричинити виникнення вихрового магнітного поля. Цей зв'язок можна записати як співвідношення:

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{l}) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{D} d\vec{S}). \quad (3.64)$$

Крім цього, як відомо, вихрове магнітне поле утворюється також струмами провідності, що описується законом повного струму (3.51). Зважаючи на зв'язок сили струму та густини струму (3.22) і вектора напруженості магнітного поля з індукцією (3.63), маємо:

$$\oint_l (\vec{H} d\vec{l}) = \int_S (\vec{j} d\vec{S}). \quad (3.65)$$

Поєднуючи обидві причини виникнення вихрового магнітного поля (3.64) та (3.65), матимемо:

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{l}) = \int_S (\vec{j} d\vec{S}) + \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{D} d\vec{S}). \quad (3.66)$$

З (3.66) випливає, що в природі існує два джерела вихрового магнітного поля – струм провідності  $I = \int_S (\vec{j} d\vec{S})$  і змінне у часі

електричне поле  $\frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{D} d\vec{S})$ .

Оскільки змінне в часі електричне поле створює магнітне поле так само, як і струми провідності, то природно було б вважати, що

$\frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{D} d\vec{S}) = I_{\text{сі}}$  є також особливим струмом, який Дж. К. Максвелл

назвав *струмом зміщення*.

Застосовуючи теорему Стокса, виразимо *узагальнений Максвеллом закон повного струму* у диференціальному вигляді:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Система рівнянь Максвелла є узагальненим математичним записом основних експериментальних законів електромагнітних явищ у довільному середовищі, вони встановлюють співвідношення між векторними характеристиками електромагнітного поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$  і  $\vec{H}$  та розподілом у просторі їхніх джерел: електричних зарядів і струмів.

В основу теорії Максвелла покладено чотири рівняння, які доповнюються трьома матеріальними рівняннями.

**Перше рівняння Максвелла** – це узагальнення закону Біо – Савара – Лапласа (3.39) і є більш узагальненою формою закону повного струму (3.51), який відображає той експериментальний факт, що джерелами вихрового магнітного поля можуть бути струми провідності і струми зміщення.

В інтегральній формі:

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{l}) = \int_S (\vec{j} d\vec{S}) + \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{D} d\vec{S}).$$

У диференціальній формі:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

**Друге рівняння Максвелла** є математичним записом експериментального закону електромагнітної індукції Фарадея (див п. 3.3.8). Узагальнений фізичний зміст його полягає в тому, що будь-яка зміна в часі магнітного поля спричиняє збудження вихрового електричного поля.

В інтегральній формі:

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = - \frac{d}{dt} \int_S (\vec{B} d\vec{S}).$$

У диференціальній формі:

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

**Третє рівняння Максвелла** відображає експериментальний факт відсутності в природі магнітних зарядів, тобто відсутність джерел магнітного поля, подібних до джерел електричного поля (зарядів) (див. п.3.3.4).

В інтегральній формі:

$$\int_S (\vec{B} d\vec{S}) = 0.$$

У диференціальній формі:

$$\text{div} \vec{B} = 0.$$

**Четверте рівняння Максвелла** є узагальненням на основі теореми Гаусса (3.5), закону Кулона (3.1) і фізично вказує на існування в природі джерел електричного поля у вигляді електричних зарядів, розподілених у просторі з об'ємною густиною  $\rho$ :

В інтегральній формі:

$$\int_S (\vec{D} d\vec{S}) = \int_V \rho dV.$$

У диференціальній формі:

$$\text{div} \vec{D} = \rho.$$

**Матеріальні рівняння** відображають властивості середовища і пов'язують між собою окремі характеристики електромагнітного поля:

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma\vec{E}.$$

Рівняння Максвелла разом із матеріальними рівняннями становлять повну замкнену систему рівнянь, яка дає можливість розв'язати будь-яку задачу макроскопічної електродинаміки: відшукати векторні значення характеристик поля у кожній точці простору в довільний момент часу за відомим розподілом електричних зарядів і струмів у функції координат і часу або ж, навпаки, визначити розподіл зарядів і струмів за відомими значеннями векторів поля.

З рівнянь Максвелла випливає, що змінне магнітне поле завжди пов'язане із утворюваним ним електричним полем, а змінне електричне поле завжди пов'язане із утворюваним ним магнітним полем, тобто електричні і магнітні поля нерозривно пов'язані одне з одним, створюючи єдине *електромагнітне поле*.

Теорія Максвелла є узагальненням основних законів електричних і магнітних явищ, тому за її допомогою можна пояснити вже відомі експериментальні факти і передбачити нові. Один з важливих висновків цієї теорії – існування магнітного поля струмів зміщення – дав Максвеллу можливість передбачити існування *електромагнітних хвиль* – змінного електромагнітного поля, що поширюється у просторі з кінцевою швидкістю (для вакууму  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с). Цей висновок і теоретичні дослідження властивостей електромагнітних хвиль привели Максвелла до створення електромагнітної теорії світла, згідно з якою світло також є електромагнітною хвилею.

### *Запитання для самоперевірки*

1. Що таке електричний заряд?
2. Запишіть закон *Кулона*.
3. Дайте визначення напруженості електростатичного поля.
4. Сформулюйте принцип суперпозиції електричних полів.
5. Що таке потік вектора напруженості електростатичного поля?
6. Сформулюйте теорему *Гаусса*.
7. Виведіть формули електричного поля заряджених нескінченних нитки та площини.
8. Запишіть формулу роботи електростатичного поля.
9. Дайте визначення потенціалу електростатичного поля.
10. Що таке циркуляція напруженості електростатичного поля?
11. Що називають електричним диполем?
12. Поясніть процес поляризації діелектриків, дайте визначення характеристик їхнього поляризованого стану.
13. Що таке вектор електричного зсуву, у чому полягає його зв'язок з напруженістю?
14. Що таке сегнетоелектрики? В чому полягає п'єзоелектричний ефект?
15. Опишіть поведінку провідників в електростатичному полі.
16. Запишіть формули електроємності провідника, конденсатора.
17. Якими величинами визначають енергію електростатичного поля?
18. Дайте визначення постійного електричного струму. Які умови його існування?
19. Дайте визначення та запишіть формулу сили та густини струму.
20. Що таке сторонні сили?
21. Дайте визначення ЕРС джерела струму.
22. Запишіть закон *Ома* для ділянки кола в інтегральній та диференціальній формах.
23. Що називають опором провідників?
24. Запишіть закон *Ома* для повного кола.
25. Сформулюйте правила *Кірхгофа*.
26. Якими величинами визначають роботу та потужність електричного струму?
27. Сформулюйте закон *Джоуля – Ленца*.
28. Що називають магнітним полем?
29. Дайте визначення індукції магнітного поля.

30. Сформулюйте закон *Ампера*.
31. Запишіть формулу магнітного моменту контуру із струмом.
32. Опишіть поведінку контуру із струмом в магнітному полі.
33. Поясніть принцип роботи електродвигунів.
34. Запишіть формулу сили Лоренца.
35. Опишіть рух заряджених частинок у магнітному полі.
36. Сформулюйте закон та запишіть формулу закону *Біо – Савара – Лапласа*.
37. Виведіть формулу магнітного поля прямого та колового провідників із струмом.
38. Поясніть взаємодію провідників зі струмом. Дайте визначення одиниці вимірювання сили струму – 1 ампер.
39. Сформулюйте закон повного струму.
40. Застосуйте закон повного струму для розрахунку магнітного поля соленоїда.
41. У чому полягає вихровий характер магнітного поля.
42. Що таке потік вектора магнітної індукції?
43. Запишіть формулу роботи в процесі переміщення провідника із струмом в магнітному полі.
44. У чому полягає явище електромагнітної індукції?
45. Сформулюйте закон *Фарадея* та правило *Ленца*.
46. Поясніть принцип роботи генераторів електричного струму.
47. В чому полягає явище самоіндукції? Що таке індуктивність? Запишіть формулу індуктивності котушки.
48. В чому полягають перехідні процеси у колі з індуктивністю?
49. У чому полягає явище взаємної індукції?
50. Що таке трансформатор? Запишіть формулу ККД трансформатора.
51. Якими величинами визначають енергію провідника із струмом?
52. Запишіть формулу об'ємної густини енергії магнітного поля.
53. Які причини зумовлюють існування магнітного поля в речовині?
54. Що є характеристиками намагніченого стану речовини?
55. Які види магнетиків Ви знаєте? Для чого застосовуються феромагнетики?
56. Дайте визначення електромагнітного поля.
57. Що таке струм зсуву?
58. Запишіть рівняння *Максвелла* в інтегральній та диференціальній формах для електромагнітного поля та поясніть їх.

## *Література*

1. *Загальний курс фізики: навч. посібник для студ. вищих техн. і пед. закладів освіти: в 3 т. / за ред. І.М. Кучерука. – К.: Техніка, 1999.*
2. *Трофимова Т.И. Курс фізики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – М.: Высш. шк., 1990.*
3. *Чолпан П.П. Фізика: підручник / П.П. Чолпан. – К.: Вища шк., 2003.*
4. *Баженов В.А. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології / В.А. Баженов, А.В. Перельмутер, О.В. Шишов. –К.: Каравела, 2009. –696 с.*
5. *Азнаурян І.О. Фізика та фізичні методи дослідження: навчальний посібник / І.О. Азнаурян. – К.: КНУБА, 2008. – 250 с.*
6. *Конспект лекцій з фізики (електрика та магнетизм) / В.І. Клапченко. – К.: КНУБА, 1999.*
7. *Фізика. Практичний курс: навчальний посібник для студентів заочної форми навчання всіх спеціальностей / В.І.Клапченко, Г.Д.Потапенко, І.О.Азнаурян та ін. – К.: КНУБА, 2005. – 256 с.*
8. *Савельев И.В. Курс фізики: учеб.: в 3-х т. / И.В. Савельев – М.: Наука, 1989.*
9. *Детлаф А.А. Курс фізики: учеб. пособие для вузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высш. шк., 1989.*
10. *Загальний курс фізики: збірник задач /І.П. Гаркуша, І.Т. Горбачу, В.П. Курінний та ін.; за ред. І.П. Гаркуші. – К.: Техніка, 2003.*
11. *Кордун Г.Г. Історія фізики. Короткий курс / Г.Г. Кордун. – К.: Вища шк., 1974.*
12. *Воловик П.М. Фізика для університетів: підручник / П.М. Воловик. – К.: Перун, 2006. – 864 с.*
13. *Зачек І.Р. Фізика і будівництво: навч. посібник / І.Р. Зачек, Г.А. Ільчук. –Л.: Афіша, 2008. –330 с*
14. *Костко О.К. Фізика для строительных и архитектурных вузов: учебное пособие / О.К. Костко. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2004. – 512 с.*
15. *Сивухин Д.В. Общий курс фізики. Механика / Д.В. Сивухин. – М.: Наука, 1979. –520 с.*
16. *Китель Ч. Берклеевский курс фізики. Механика / Ч. Китель, У. Найт, М. Рудерман; пер. с англ. – М.: Наука, 1971. – 480 с.*
17. *Алешкевич В.А. Университетский курс общей фізики. Механика твердого тела / В.А. Алешкевич, Л.Г. Деденко, В.А. Караваев. – М.: изд-во Физического факультета МГУ, 1997. – 72 с.*

18. *Гоц В.І.* Бетони і будівельні розчини: підручник / В.І. Гоц. – К.: ТОВ УВПК „ЕксОб”. – К.: КНУБА, 2003. – 472 с.

19. *Кривенко П.В.* Будівельне матеріалознавство: підручник / П.В. Кривенко, К.К. Пушкарьова, В.Б. Барановський, М.О. Кочевих, Ю.Г. Гасан, Б.Я. Константинівський, В.О. Ракша. – К.: ТОВ УВПК „ЕксОб”, 2004. – 704 с.

Навчальне видання

**Клапченко Василь Іванович**  
**Азнаурян Ірина Олександрівна**  
**Бурдейна Наталія Борисівна**  
**Долгошей Володимир Борисович**  
**Пономаренко Сергій Миколайович**

# **ФІЗИКА**

## **В БУДІВНИЦТВІ**

**Навчальний посібник**

Редагування та коректура *Г.В. Кобриної*  
Комп'ютерний набір *І.О. Азнаурян*  
Комп'ютерна верстка *Т.І. Кукарєвої*

Підписано до друку 2011. Формат 60 × 84<sub>1/16</sub>  
Ум. друк. арк. 14,65. Обл.-вид. арк. 15,75.  
Тираж 150 прим. Вид. № 37/І-10. Зам. №

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

E-mail: red-isdat@knuba.edu.ua

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі  
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів  
Видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.