

УДК 539.3

**Баженов В.А.**, д-р техн. наук,**Вабішевич М.О.**,**Гуляр О.І.**, д-р техн. наук,**Солодей І.І.**, канд. техн. наук

## **ОСОБЛИВОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ПРИ ДИНАМІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

**Вступ.** Ефективність розв'язання задач механіки руйнування значною мірою залежить від методик обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН). На сьогоднішній день широко застосовуються як прямі, так і енергетичні методи. У відповідності до відомих методик визначення КІН прямим методом, їх значення обчислюються в окремих точках; вздовж деякої лінії, що проходить через вершину тріщини; або усередненням значень в привершинній області. Основний недолік перших двох підходів – необхідність використання біля вершини тріщини достатньо малих скінченних елементів (СЕ) з характерним розміром  $1/200 \dots 1/250$  від довжини тріщини [5, 8, 9]. Останній, третій підхід виявився вельми ефективним в задачах механіки руйнування при статичному навантаженні [1]. Так, привершинна область у вигляді квадрата регулярної структури  $6 \times 6$  СЕ з розмірами елементів рівними  $1/10$  від довжини тріщини дає розв'язок, похибка якого лежить в межах  $2 \pm 3\%$  по відношенню до аналітичних розв'язків [4].

Важливими чинниками при розгляді задач динаміки безумовно виступають інерційні складові внутрішніх зусиль та швидкість деформування твердих тіл. Наявність першого з них потребує додаткового вивчення збіжності отримуваних розв'язків, інший – ставить самостійну задачу вивчення поведінки КІН при різних швидкостях навантаження досліджуваних об'єктів. Динамічний коефіцієнт інтенсивності напружень (ДКІН) є одним із найбільш важливих параметрів лінійнопружної механіки руйнування не тільки для оцінки розвитку наявних тріщин, але і для визначення часу та області появи нових пошкоджень. За останні роки у науковій літературі все частіше з'являються статті присвячені даній тематиці. Методи, які використовуються для пошуку рішення, можна умовно розділити на чотири групи за способом дискретизації досліджуваних об'єктів у просторі: метод скінченних різностей, метод скінченних елементів, метод граничних елементів та несіткові методи. З точки зору моделювання динамічних процесів у часі слід виділити два основні підходи: прямі

методи інтегрування рівнянь руху за часом та розклад розшукуваного розв'язку на основі скінченного спектру власних форм та частот.

Представлена робота базується на основі метода скінченних елементів, моментної схеми скінченного елемента, схеми Н'юмарка, блокового метода послідовної верхньої релаксації та спеціальної процедури визначення ДКІН, що використовує усереднення значень у привершинній області тріщини. Постановка задачі, розрахункові співвідношення та опис алгоритмів розв'язання ситем рівнянь обговорювались в роботах [2, 3].

**1. Методика визначення ДКІН.** Для опису напружено-деформованого стану (НДС) в околі вершини тріщини застосовується система координат  $y^i$  (рис. 1), пов'язана з фронтом тріщини, таким чином, щоб вісь  $y^1$  співпадала з нормаллю до поверхні тріщини,  $y^2$  орієнтована по нормалі до фронту тріщини, а  $y^3$  була спрямована вздовж дотичної до фронту. Сингулярне поле напружень поблизу вершини тріщини в системі координат  $y^i$  в усіх точках її фронту буде характеризуватися динамічним коефіцієнтом інтенсивності напружень. Конкретизація виразів, що описують взаємозв'язок напружень і переміщень з величиною ДКІН залежить від типу розкриття тріщини [3].

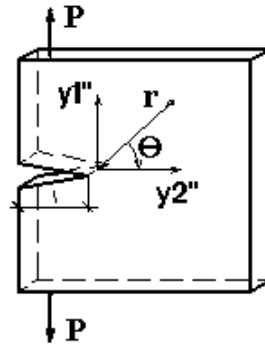


Рис. 1

Для тріщин нормального відриву:

$$\sigma^{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right); \quad K_{I(\sigma)} = \frac{\sigma^{11} \sqrt{2\pi r}}{\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)}, \quad (1)$$

$$u_1 = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2}); \quad K_{I(u)} = \frac{u_1 \mu \sqrt{2\pi r}}{\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} (2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2})}. \quad (2)$$

Привершинна область для обчислення динамічного КІН у тілі з тріщиною апроксимується масивом  $6 \times 6$  скінченних елементів регулярної, по можливості, структури (рис. 2). Вважається, що оптимальні розміри SE залежать від швидкості та природи навантаження. Так для задачі статичної, як відмічалось вище, цей показник  $k \sim 1/10$  від довжини тріщини при силовому навантаженні, для задачі з термосиловим навантаженням в роботі [6] оптимальним співвідношенням є  $k \sim 1/20$ .

Враховуючи вимоги методики, що пов'язані з наявністю сингулярності при обчисленні КІН з розгляду виключаються вузли та елементи, найближчі до вершини тріщини (рис. 2).

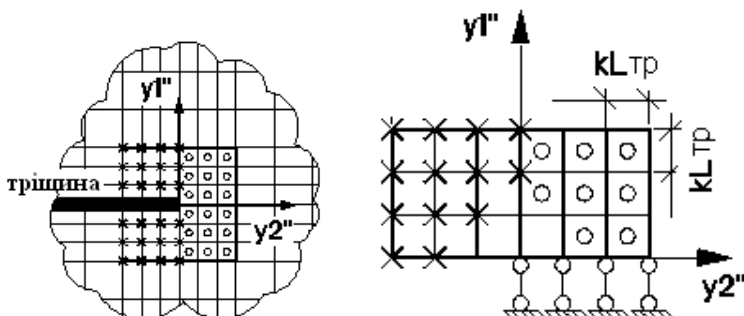


Рис. 2

$$K_I = 0.5(K_{I(\sigma)} + K_{I(u)}). \quad (3)$$

Точки, в яких ДКІН обчислюються за напруженнями позначені колами, за переміщеннями – хрестиками.

**2. Дослідження методики.** Оскільки у привершинній зоні розміри скінченних елементів, як правило, значно менші, ніж в іншій частині сіткової області, загальне число невідомих суттєво залежить від їх кількості на ділянці згущення. В даній роботі проведено дослідження збіжності розв'язків для металевієї пластини з центральною тріщиною при варіюванні розмірів СЕ привершинної області в умовах миттєво прикладеного імпульсного навантаження.

Рис. 3, а відображає схему проведення чисельних дослідів при варіюванні параметра  $k$  у частині зони, що межує з поверхнею тріщини та відповідає раніше наведеній методиці обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень. На основі отриманих розв'язків побудовано графік зміни похибки обчислення КІН прямим методом для задачі динаміки (рис.3, б), який уточнює оптимальний показник розміру сторони СЕ  $k = 1/15 \dots 1/20$  порівняно із варіантом статичного навантаження.

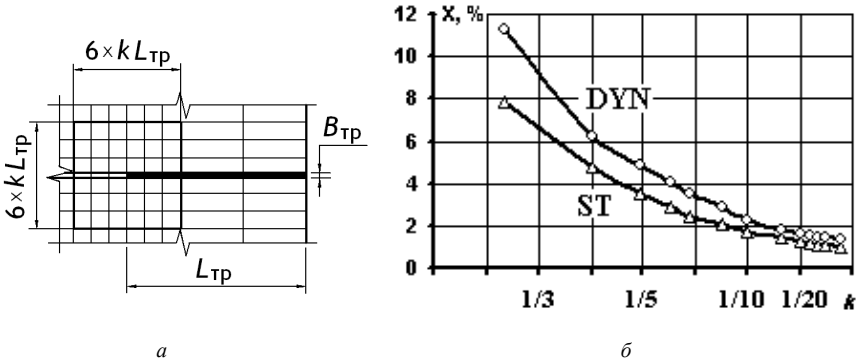


Рис. 3

Одним з ключових питань при розгляді дії силових імпульсів є вплив зміни швидкості навантаження на НДС конструкції, а отже, і на параметри механіки руйнування. Для металевої пластини з центральною тріщиною, що перебуває під дією імпульсного навантаження, проведено дослідження зміни значень динамічного КІН в залежності від швидкості приросту граничного розтягуючого тиску (рис. 4). Отримано значення коефіцієнта інтенсивності напружень для різних показників  $t_0$ . Для побудови графіка використано величину  $\lg(P_0/t_0)$ , що характеризує ступінь куту нахилу прямої АВ.

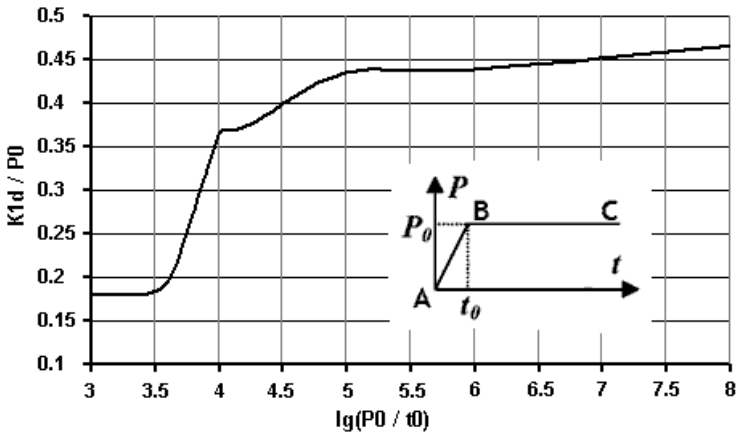


Рис. 4

Встановлено, що при характерному часі приросту навантаження  $t_0 \sim 10^{-2} \div 10^{-3.5}$  сек значення КІН практично співпадають із статичними (рис.4), починаючи з  $t_0 \sim 10^{-3.5}$  сек динамічний КІН різко зростає і стабілізується при  $t_0 \sim 10^{-5}$  сек. Подальше збільшення швидкості приросту імпульсу включаючи випадок миттєвого удару  $t_0 = 0$  сек не призводить до суттєвого збільшення значень КІН. При цьому величина динамічного КІН приблизно в 2.5-2.6 разів вища за статичний.

**3. Контрольні приклади.** Для дослідження вірогідності та ефективності застосування наведеної методики при обчисленні параметрів механіки руйнування в задачах динаміки проведено розрахунок пластини з центральною тріщиною, що знаходиться під дією змінного у часі рівнорозподіленого розтягуючого тиску.

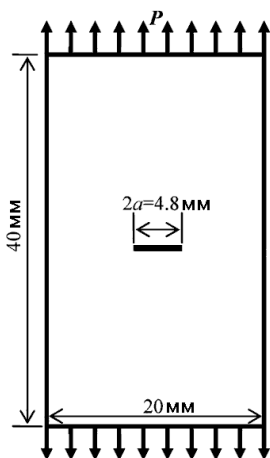


Рис. 5

Геометричні, граничні параметри та умови навантаження представлені на рис. 5. Фізико-механічні властивості ізотропного матеріалу приймалися: модуль Юнга  $E = 2 \times 10^{11}$  Па, коефіцієнт Пуасона  $\nu = 0.3$ , щільність  $\rho = 5 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Розглянуто два характерні випадки силового динамічного навантаження: миттєво прикладений імпульс тиску, який зберігається на всьому часовому інтервалі дослідження (рис.7), та у вигляді функції, що має профіль трикутника (рис. 9). Всі отримані нижче динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень представлені у вигляді нормалізованих значень по відношенню до параметра  $P_0(\pi a)^{1/2}$ , де  $P_0$  – максимальне значення тиску,  $a$  – половина довжини тріщини. Оскільки представлена модель має дві площини симетрії, розглядалась одна чверть пластини з відповідними закріпленнями на всіх симетрії. Вузли скінченноелементної моделі, що належать поверхні тріщини – відкріплені в її площині.

На попередньому етапі розрахунку отримано КІН для статичного варіанта навантаження, нормалізоване значення якого  $K_{1s} = 1.0376$ , що підтверджується даними роботи [4], а саме  $K_{1s} = 1.0382$ .

Результати аналізу еволюції нормованого динамічного коефіцієнта інтенсивності напружень під дією миттєво прикладеного навантаження представлено на рис.6 в межах часового інтервалу 50 мксек, який охоплює приблизно чотири періоди коливань пластини по основній власній частоті. Можна помітити, що глобальний максимум реалізується вже на першому періоді. Для порівняння, рівень статичного КІН означено пунктирною лінією.

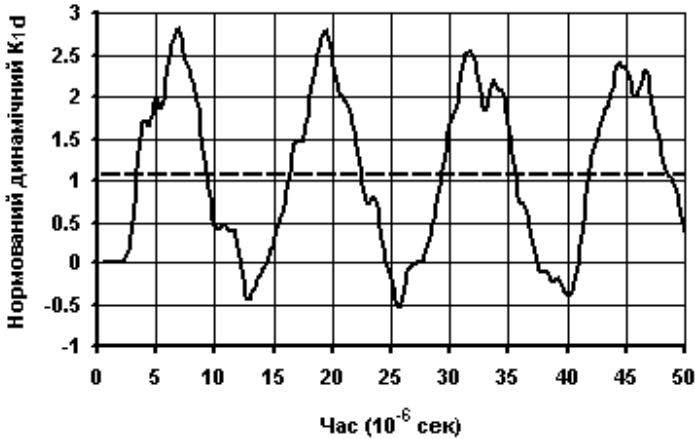


Рис. 6

На рис. 7 подано графік зміни нормованого ДКІН у часовому масштабі 14 мксек.

Кружками представлено розв'язок, що отриманий в роботі [12] на основі методу граничних елементів. Помітна добра збіжність представлених кривих не тільки за амплітудою  $K_{1d}$  (менше ніж 2% ÷ 3% за максимальним значенням) але і за періодом коливань.

Інші дослідники даної моделі [10, 11] також відмічають появу локального максимуму, який відповідає часовій координаті  $t = 4$  мксек, на відміну від [12]. Як відомо, прямі методи інтегрування рівнянь руху за часом автоматично включають весь спектр власних форм і частот моделі до розв'язку задачі. Результати, що базуються на обмеженому спектрі частот або враховують ефект демфірування будуть призводити до більш гладких розв'язків. Слід відзначити, що відмінність статичного та динамічного коефіцієнтів інтенсивності напружень складає приблизно 2.6 рази.

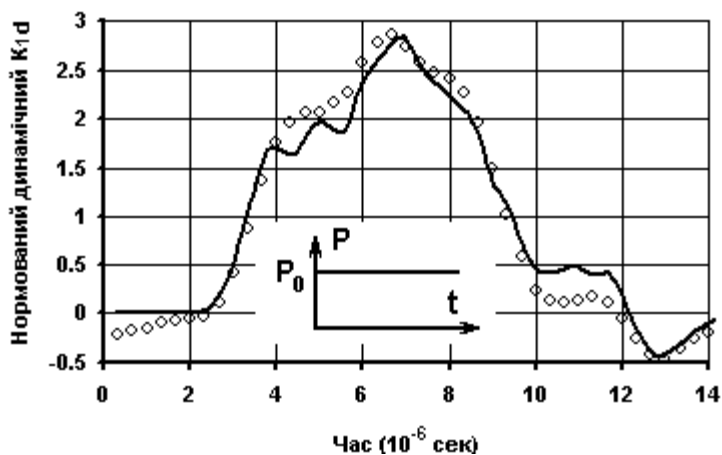


Рис. 7

Аналогічні дослідження проведено для варіанту навантаження у вигляді функції імпульсу тиску, що має профіль трикутника (рис. 9) з параметрами:  $t_a = 2$  мксек,  $t_b = 8$  мксек. Характерною відмінністю двох типів навантаження є реалізація коливань навколо статичного КІН, у першому випадку (рис. 6), та коливання навколо нуля після зняття навантаження у другому (рис. 8).

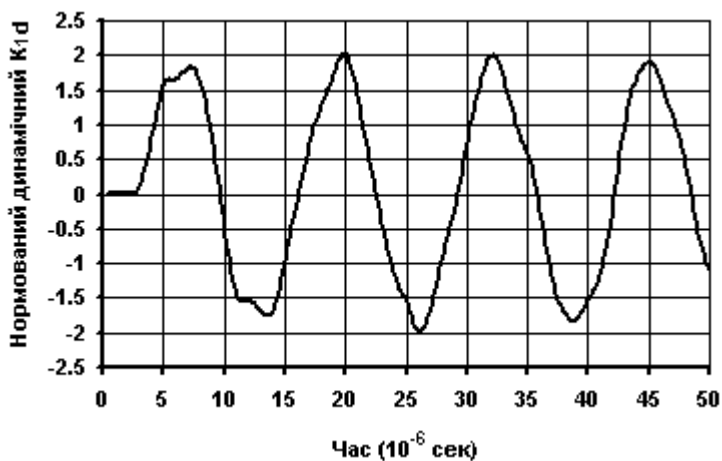


Рис. 8

Помітне зменшення максимальних значень амплітуди коливань нормованого динамічного КІН від  $K_{1d} = 2.8$  до  $K_{1d} = 2.0$ , що становить приблизно 30%. Треба зауважити, що імпульс у вигляді миттєво прикладеного тиску (рис. 7) з точки зору забезпечення коефіцієнта надійності представляє собою найбільш консервативну модель реальних процесів навантаження. Тому при розв'язанні практичних задач природньо проводити дослідження та давати оцінку зовнішнім впливам для отримання більш точних розв'язків, як це, наприклад, зроблено в роботі [7].

Проведено порівняння рішення, що отримане в роботі [12] (кружки) та на основі представленої методики (суцільна лінія) на перших 15 мксек коливань. Відмінність результатів не перевищує 1% в області максимальних значень  $K_{1d}$  та 3% в областях розвантаження.

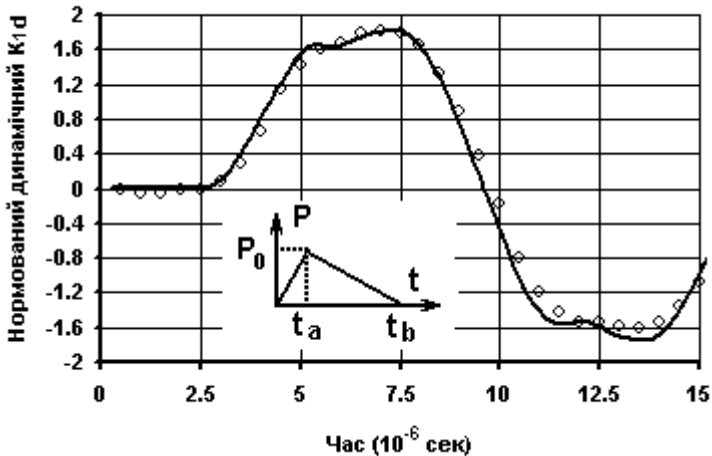


Рис. 9

**Висновки.** Таким чином, на основі проведених досліджень дана оцінка вірогідності та ефективності запропонованої методики визначення динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень (ДКІН) прямим методом при дії силових імпульсів, з різними швидкостями приросту навантаження.

Визначено оптимальні показники сіткової привершинної області тріщини для обчислення КІН в задачах динаміки. Побудовані графіки залежності КІН від швидкості приросту навантаження.



Отримані графіки еволюції нормованого динамічного КІН при дії імпульсів тиску (від поступового до миттєвого) показали високу збіжність ( $2\div 3\%$ ) з тестовими прикладами при однакових параметрах сіткових областей.

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298с.
2. *Вабіщевич М.О., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Дослідження вимушених коливань просторових неоднорідних призматичних тіл з тріщинами // Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць / Ін-т геотехнічної механіки ім. М.С.Полякова НАН України. – Дніпропетровськ, 2007. – Вип.71.-с.170-177.
3. *Вабіщевич М.О., Сахаров О.С., Солодей І.І.* Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень призматичних тіл з тріщинами при дії динамічного навантаження // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.78, 2006.-с.61-76.
4. *Ито Ю., Мураками Ю., Хасебэ Н. та ін.* Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: С74 В 2-х томах. Т. 1: Пер. с англ./Под ред. Ю. Мураками. — М.: Мир, 1990. — 448 с, ил.
5. *Морозов Е.М., Никитиков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука, 1980. – 256с.
6. *Гречух Н.А., Пискунов С.О., Остапенко Р.М.* Обчислення КІН в просторових тілах обертання при температурному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.80, 2006.-с.38-53.
7. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Особливості реалізації НМСЕ в задачах динамічної взаємодії неоднорідних пружнопластичних тіл // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.69, 2001. – с.134-146
8. *Asch M., Bercovier M.* A mixed 3D finite element for modeling thick plates // *Comput. Mech.* 1994. -13. - N5. –P.332-342.
9. *Guydish I.I., Fleming I.F.* Optimisation of the finite element mesh for the solution of fracture problems // *Eng. Fract. Mech.* – 1978. –Vol.10. –N1. –P.31-42.
10. *Fedelinski P, Aliabadi MH, Rooke DP.* A single-region time-domain BEM for dynamic crack problems. *Int J Solids Struct* 1995;32:3555–71.
11. *Lin X, Ballmann J.* Re-consideration of Chen’s problem by finite difference method. *Engng Fract Mech* 1993;44(5):735–9.
12. *Z. J. Yang, A. J. Deeks, H. Hao* Transient Dynamic Fracture Analysis Using Scaled Boundary Finite Element Method: a Frequency-Domein Approach // *Engineering Fracture Mechanics* 74, 2007.-pp.669-687.